

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

90. Band, Heft 2

28. Dezember 1961

S. 241-480

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Tenca, Luigi: Due teoremi sui determinanti. *Archimede* 12, 237—238 (1960).

Herz, J.-C.: Sur les propriétés spectrales des matrices normales. *Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul* 2, 145—146 (1959).

Neue Darstellung klassischer Eigenschaften der Normalmatrizen.

[Deutsche Zusammenfassung.]

Parodi, Maurice: Sur la formation de matrices stochastiques ayant pour valeurs caractéristiques celles d'une matrice donnée. *C. r. Acad. Sci., Paris* 250, 3258—3259 (1960).

Let A be a real matrix, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and c be the vector whose transpose is $(1, \dots, 1)$. The matrix $B = \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ will have the same latent roots as A (as well as 1) when I is the unit n -th order matrix. B will be stochastic provided real positive α_i can be chosen such that $a_{ij} + \alpha_j \geq 0$, $\sum_k (a_{jk} + \alpha_k) \leq 1$ and $\sum_k \alpha_k \leq 1$ for all i, j .

F. W. Posing.

Haynsworth, Emilie V.: Applications of a theorem on partitioned matrices. *J. Res. nat. Bur. Standards* 63B, 73—78 (1959).

Eine komplexe N -reihig-quadratische Matrix A sei symmetrisch in rechteckige „Blöcke“ A_{ij} zerlegt: A_{ij} hat n_i Zeilen und n_j Spalten, $i, j = 1, \dots, t$, und $\sum_{i=1}^t n_i = N$.

Weiter sei $A_{ij} X_j = X_i B_{ij}$, wobei jedes X_i aus r Spalten ($0 < r \leq n_i$, für wenigstens ein i sogar $r < n_i$) und n_i Zeilen (davon die ersten r linear unabhängig) besteht; alle B_{ij} sind also quadratisch und r -reihig. Unter diesen Voraussetzungen ist A ähnlich zu einer Matrix $\begin{pmatrix} B & Y \\ 0 & C \end{pmatrix}$, wobei B aus den Blöcken B_{ij} besteht und C in komplizierterer Weise aus den A_{ij} und X_i zusammengesetzt ist. Die Eigenwerte von A sind also die von B und C . Dieser Reduktionssatz wird auf „blockstochastische“ Matrizen A angewandt, d. h. solche, die in der beschriebenen Weise in Blöcke A_{ij} mit konstanter Zeilensumme s_{ij} zerlegt sind. (Die von A. Brauer, s. z. B. dies. Zbl. 46, 12, behandelten „verallgemeinerten stochastischen“ sind spezielle blockstochastische Matrizen). Verf. zeigt u. a., daß die Eigenwerte von $S = (s_{ij})$ auch Eigenwerte von A sind; dieses ist eine Verallgemeinerung eines der Brauerschen [loc. cit.] Resultate. Die Arbeit enthält sodann noch weitere Anwendungen des eingangs zitierten Reduktionssatzes auf einige spezielle Matrizentypen.

P. Dembowski.

Saxena, Bhagwat Swarup: Symbolic matrix integration. *Ganita* 8, 105—124 (1957).

In der — durch Druckfehler beeinträchtigten — Arbeit wird ein Formalismus zur Behandlung von Matrizenintegralen der Form $\int Y dx_{mn}$ und $\int y_{pq} dX$ entwickelt mit Matrizen Y und X , wo die Elemente y_{ik} abhängen von den x_{ik} als unabhängigen Variablen. Als Funktionen $Y(X)$ werden außer den einfachsten Ausdrücken zwei- und dreifache Produkte aus X und X' behandelt und die Ergebnisse tabellarisch zusammengestellt.

R. Zurmühl.

• Dehn, Edgar: Algebraic equations. An introduction to the theories of Lagrange and Galois. Unabridged and corrected republ. of the first ed. 1930. New York: Dover Publications, Inc. 1960, XI, 208 p. \$ 1,45.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. des Werkes im J.-buch Fortschr. Math. 56 (1930), 110.

Fried, E.: Über eine Verallgemeinerung der Auflösbarkeit von Gleichungen. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 2, 67—71 (1959).

Ist K ein Körper von Primzahlcharakteristik p , dann heiße jede Nullstelle eines Polynoms der Form $x^p - x - a \in K[x]$ ein Quasiradikal (über K). Der klassische Satz über die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Radikale wird dadurch von der Charakteristikvoraussetzung befreit, daß außer Radikalen auch Quasiradikale zugelassen werden. Zum Beweis wird insbesondere gezeigt, daß man durch Adjunktion der irreduziblen Quasiradikale zu einem Körper der Primzahlcharakteristik p genau alle zyklischen Erweiterungen p -ten Grades von K erhält. Im Anhang wird dann noch bewiesen, daß für ein irreduzibles Quasiradikal α die Konjugierten von $1/(\alpha - 1)$ eine Normalbasis von $K(\alpha)/K$ bilden. Diese Aussage gilt auch, wenn K ein Körper ist, der die n -ten Einheitswurzeln enthält, die Charakteristik von K nicht in n aufgeht und α ein irreduzibles Radikal n -ten Grades über K ist. F. Kasch.

Zierler, Neal: On the theorem of Gleason and Marsh. Proc. Amer. math. Soc. 9, 236—237 (1958).

Sei K der endliche Körper der Ordnung q und α die die Elemente von K invariant lassende lineare Abbildung von $K[x]$ in sich, welche x^i in x^{q^i-1} überführt. Unter der Ordnung eines über K irreduziblen Polynoms $f = f(x) \in K[x]$ wird die gemeinsame Ordnung aller seiner Wurzeln verstanden. Gleason und Marsh haben folgendes bewiesen (A. A. Albert, Fundamental concepts of higher algebra, Chicago 1956, p. 132): Sei f irreduzibel vom Grade n über K . Das Polynom $\alpha(f)$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn f die Ordnung $q^n - 1$ hat. Hier wird nun gezeigt, daß der Grad eines jeden irreduziblen Faktors von $\alpha(f)$ gleich der Ordnung von f ist. H. Schwerdtfeger.

Romanov, M. I.: Algebraic criteria for aperiodicity of linear systems. Soviet Phys., Doklady 4, 955—961 (1960), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 128, 291—294 (1959).

Verf. betrachtet ein charakteristisches Polynom $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$, $a_\nu > 0$, das keine mehrfachen Nullstellen besitzt, und fragt nach einem algebraischen Kriterium für Aperiodizität, d. h. nach einem Kriterium für die Existenz lauter reeller und negativer Nullstellen. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß die Hermitesche Form, die zu den Funktionen $\varphi(x) = f(x) - i f'(x)$ und $\varphi^*(x) = \overline{f'(x)} - i \overline{f(x)}$ gehört, positiv-definit ist. Diese Form $H(\varphi, u_0, \dots, u_{n-1}) = \sum_{i,k} a_{ik} u_i \overline{u_k}$ wird aus der sie erzeugenden Funktion $K(\varphi, \varphi^*) = [\varphi(x) \varphi^*(y) - \varphi(y) \varphi^*(x)]/(x - y) = 2[f(x) f'(y) - f'(x) f(y)]/(x - y) = 2 \sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k$ gebildet und ist dann und nur dann positiv-definit, wenn alle Hauptminoren ihrer Diskriminante positiv sind. Um diese Bedingungen aufzustellen, berechnet Verf. die Koeffizienten a_{ik} . Dazu eignet sich die Rekursionsformel $a_{ik} = a_{i-1, k+1} + \beta_{i, k+1}$, $\beta_{s, s} = (s+1) a_{s+1} a_t - (t+1) a_{t+1} a_s$. Verf. zeigt einen rationellen Rechengang auf und bringt einige Beispiele. R. Reiffig.

Levine, Jack: On the application of MacMahon diagrams to certain problems in the multiplication of monomial symmetric functions. Duke math. J. 26, 419—436 (1959).

Abkürzungsbeispiel (A): $a^2 b c + a^2 b d + \dots + b^2 a c + \dots = (2 \ 1 \ 1) = (2 \ 1^2) = (2^1 \ 1^2)$; ohne $a^2 c b$ usw. Entwicklungsbeispiel (E): $(21) (21) (2) = (62) + 2 (61^2) + 2 (53) + 2 (521) + 2 (4^2) + 4 (431) + 8 (42^2) + 6 (421^2) + 6 (3^2 \ 2) + 8 (32^2 \ 1) + 24 (2^4) + 12 (2^3 \ 1^2)$. Bei nur 2 Buchstaben a, b bleibt rechts nur $(62) + 2(53) + 2(4^2)$. — MacMahon-Diagramme (MacMahon, Combinatory Analysis, Cambridge 1915) sind Rechteckschemata aus Leerstellen und den Exponenten (parts in (A) $2 \ 1 \ 1$) der symmetrischen Potenzproduktschümmen. Z. B. der

Koeffizient 6 bei (421^2) ergibt sich auf Grund der 6 Diagramme

2.1.	.2.1	2..1	.21.	2.1.	2..1
.2.1	2.1.	.21.	2..1	2..1	2.1.
2...	2...	2...	2...	.2..	.2..
4211	4211	4211	4211	4211	4211

(d. h. der 6 Wörter oder Sätze $a a c - b b d - a a$; $b b d - a a c - a a$; $a a d - b b c - a a$; $b b c - a a d - a a$; $a a c - a a d - b b$; $a a d - a a c - b b$). Verf. benutzt solche Diagramme bei Produkten (E) mit Vorteil zur Gewinnung 1. wie eben eines Einzelterms in rechten Seiten der Art wie bei (E) , 2. der gesamten rechten Seite wie bei (E) , 3. der Entwicklungen der 7 allgemeineren Beispiele $(p^i)(q^j)$, $(p^i q^j)(r^k)$, $(p^i q^j)(r^k s^m)$, $(p^i q^j r^k)(s^m)$, $(p^i q^j r^k)(p^m q^n)$, $(p^i)(q^j)(r^k)$, $(1^r)(n^{e_n} \dots 2^{e_2} 1^{e_1})$.
I. Paasche.

Gruppentheorie:

Aczél, J., V. D. Belousov and M. Hosszú: Generalized assoziativität und bisymmetrie on quasigroups. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 11, 127—136 (1960).

Les équations demosiennes d'associativité, $(x \varphi_1 y) \varphi_2 z = x \varphi_3 (y \varphi_4 z)$ et d'entropie, $(x \varphi_1 y) \varphi_2 (u \varphi_3 v) = (x \varphi_4 u) \varphi_5 (y \varphi_6 v)$, où x, y, z, u, v appartiennent à un même ensemble quelconque E et où les φ_i sont les symboles opératoires de lois de quasigroupes sur cet ensemble E , sont résolues. On donne les solutions suivantes: si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des permutations arbitraires de E et $Q = E(c)$ un groupe quelconque, les solutions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ de la première équation sont les images de Q par les isotopies de composantes respectives (α, β, δ) , $(\delta, \gamma, 1)$, $(\alpha, \varepsilon, 1)$, $(\beta, \gamma, \varepsilon)$. — A des translations près —. Les solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ de la seconde équation sont les images d'un groupe abélien $R = E(\oplus)$ par les isotopies de composantes respectives (α, β, δ) , $(\delta, \varphi, 1)$, (χ, γ, φ) , (α, χ, ψ) , $(\psi, \varepsilon, 1)$, $(\beta, \gamma, \varepsilon)$, où φ, χ, ψ sont encore des permutations arbitraires de E . Application aux „gewebe“. Certains de ces résultats avaient déjà été donnés par M. Hosszú (ce Zbl. 83, 11). Cf. aussi A. Sade, Pacific J. Math. 10, 625—660 (1960), Th. 7.2, p. 632].
A. Sade.

Preston, G. B.: Embedding any semi-group in a D -simple semigroup. Trans. Amer. math. Soc. 93, 351—355 (1959).

R. H. Bruck proves in his book „A survey of binary systems“ (this Zbl. 81, 17) that any semigroup S can be embedded in a simple semigroup T with identity. The present author shows that T constructed by R. H. Bruck is D -simple if and only if S has an identity and is D -simple. A semigroup is said to be D -simple if it consists of a single D -class. Using a characterization of the D -classes of the semigroup of all mappings of a set into itself it will be proved that any semigroup can be embedded in a D -simple demigroup with identity.
J. Szendrei.

Bruck, R. H.: Sums of normal endomorphisms. Proc. Amer. math. Soc. 10, 674—678 (1959).

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Loop und M die Menge der Abbildungen von G in sich. Für $\alpha, \beta \in M$ werden Summe und Produkt definiert: $x(\alpha + \beta) = (x\alpha)(x\beta)$, $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ für alle $x \in G$. In $(M, +)$ erzeugt die Menge der normalen Endomorphismen von G eine Loop L . Bezüglich Addition und Multiplikation ist L genau dann ein assoziativer Ring, wenn G potenzassoziativ ist.
G. Pickert.

Benado, Mihail: Remarques sur un théorème de monsieur Oleg N. Golovine. Czechosl. math. J. 9 (84), 475—484 (1959).

In earlier communications (this Zbl. 80, 18) the author has introduced the concept of a Y_q -normal subgroup of a group, and has generalized a theorem by Golovine as follows: If in a regular product of two groups one factor is Y_q -normal, then so is the other, and the group is the Y_q -regular product of these two factors. The author

extends this result to products of an arbitrary number of factors (so that Y_q -normality of all but one factor implies Y_q -normality of this remaining one) under one additional assumption on the commutator function q that goes into the definition of Y_q -normality as given loc. cit. This additional assumption is satisfied in most of the cases considered earlier.

Hanna Neumann.

Shepperd, J. A. H.: Betweenness groups. J. London math. Soc. 32, 277—285 (1957).

A betweenness group is a group, G say, whose elements satisfy a ternary relation " b lies between a and c ", in symbols $[a, b, c]$, which is invariant under the group operation: if $[a, b, c]$, then also $[a g, b g, c g]$ and $[g a, g b, g c]$ for all elements g of G . The axioms governing this relation were discussed in an earlier paper (this Zbl. 71, 50). Here the author describes the structure of betweenness groups in terms of ordered groups, to which they are closely related, and succeeds in determining all possible types: A betweenness group may be finite, but is then one of the two groups of order four. Both these groups can be furnished with a betweenness relation. An infinite betweenness group is either the direct product of a cycle of order two with a fully ordered group; in this case the betweenness relation is that naturally induced by the order relation in the locally infinite factor. Or else the betweenness group is locally infinite. In this case it is an O -group (i. e. a group that can be fully ordered). The betweenness relation may be that naturally induced by an order of the group; if not, then the group contains a normal subgroup of index two, convex with respect to the given order of the whole group, and its order induces the betweenness relation in the subgroup. Thus the subgroup consists of all elements of G for which $[1, h, h^2]$, while the elements of the other coset are those satisfying $[h, 1, h^2]$ or $[h, h^2, 1]$. Every group containing a fully ordered subgroup of index two can be made a betweenness group provided the factor group induces an order-isomorphism on the subgroup. A corollary of these results, giving conditions under which a locally infinite extension of an ordered group by a cycle of order two can be ordered, has been generalized in a later paper by B. H. Neumann and the author (this Zbl. 77, 33).

Hanna Neumann.

Baumslag, Gilbert: Wreath products and finitely presented groups. Math. Z. 79, 22—28 (1961).

The author proves that the restricted wreath product $A \wr B$ of two finitely presented groups A and B is finitely presented if, and only if, either A is the trivial group or B is finite. The proof uses an ad hoc generalization of the wreath product that is interesting, but too complicated to describe here. It follows from the result that it is effectively undecidable whether a group in any recursive class of finitely generated, recursively presented groups can be finitely presented. For if it were, one deduces that it would be decidable whether or not a finitely presented group A is trivial. But this is not possible by a theorem of Rabin (this Zbl. 79, 248).

Hanna Neumann.

Schützenberger, Marcel Paul: Sur l'équation $a^{2+n} = b^{2+m} c^{2+p}$ dans un groupe libre. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2435—2436 (1959).

The equation of the title between elements of a free group entails that a , b , and c generate a cyclic subgroup. This generalizes a result, namely $m = n = p = 0$, of R. C. Lyndon (this Zbl. 84, 28); independent generalizations of Lyndon's result by Schenkman, Baumslag (cf. the reviews below), Lyndon, Stallings are contained in the author's result. The proof uses techniques from the theory of free semigroups. An example shows that the corresponding proposition with three powers instead of two on the right-hand side of the equation is false. The author remarks that his method of proof will also show that in a free group a commutator is a square or a higher power only if it is trivial.

B. H. Neumann.

Schenkman, Eugene: The equation $a^n b^n = c^n$ in a free group. *Ann. of Math.*, II. Ser. **70**, 562—564 (1959).

R. C. Lyndon's result (this *Zbl.* **84**, 28) that the relation $a^2 b^2 = c^2$ in a free group implies $ab = ba$, is here proved as a special case of the more general result: For any integer $n > 1$, the relation $a^n b^n = c^n$ in a free group implies that a and b permute. Other proofs of this theorem have been given by M. P. Schützenberger (review above), G. Baumslag (review below) and — quoting Baumslag — by R. C. Lyndon and by J. Stallings.

Hanna Neumann.

Baumslag, Gilbert: On a problem of Lyndon. *J. London math. Soc.* **35**, 30—32 (1960).

Generalizing a question asked by R. Lyndon (this *Zbl.* **84**, 28) the author proves that the equation $a^n b^n = c^n$ in a free group implies $ab = ba$ whenever the exponent n is greater than one. Different proofs of the same results have been given by Schenkman, Schützenberger (cf. the reviews above) and — according to the author — by Lyndon and Stallings.

Hanna Neumann.

Kostrikin, A. I.: Über das Burnside'sche Problem. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. **23**, 3—34 (1959) [Russisch].

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung seines schon früher (dies. *Zbl.* **84**, 255) skizzierten Beweises für die eingeschränkte Burnside-Vermutung für Primzahl-exponenten (vgl. auch dies. *Zbl.* **89**, 14). Fast gleichzeitig gelang P. S. Novikov die Widerlegung der allgemeinen Burnside-Vermutung über die lokale Endlichkeit der ordnungsbeschränkten Gruppen [*Doklady Akad. Nauk SSSR* **127**, 749—752 (1959)]. Die eingeschränkte Burnside-Vermutung für den Exponenten p besagt, daß es für jede natürliche Zahl k bis auf Isomorphie nur endlich viele endliche Gruppen vom Exponenten p mit k Erzeugenden gibt. Gleichwertig damit ist die Existenz einer endlichen Gruppe $\bar{B}_{k,p}$ mit k Erzeugenden vom Exponenten p , die sich auf jede endliche Gruppe mit k Erzeugenden vom Exponenten p homomorph abbilden läßt. Nach dem Resultat von Novikov ist dabei die Voraussetzung der Endlichkeit der betrachteten Gruppen jedenfalls für Exponenten $p > 72$ unentbehrlich. Jeder Gruppe kann man in bekannter Weise einen Liering zuordnen [vgl. etwa M. Hall, *The theory of groups* (dies. *Zbl.* **84**, 22), S. 329]. Hat die Gruppe den Exponenten p , so erfüllt der zugehörige Liering die $(p-1)$ -te Engelbedingung $[x y^{p-1}] = \dots [x, y], y] \dots y = 0$ für alle x, y . Hinreichend für die Gültigkeit der eingeschränkten Burnside-Vermutung für den Exponenten p ist die lokale Nilpotenz der Lieringe mit Charakteristik p (d. h. mit dem Primkörper der Charakteristik p als Operatorenbereich) und mit $(p-1)$ -ter Engelbedingung; siehe A. I. Kostrikin; dies. *Zbl.* **80**, 246). Auf diese Weise hatte Verf. früher (dies. *Zbl.* **79**, 261) schon die eingeschränkte Burnside-Vermutung für Primzahlexponenten $p \leq 7$ bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird auf die Zusammenhänge zwischen Gruppen und Lieringen nicht weiter eingegangen; Verf. beschränkt sich auf den Beweis des folgenden Hauptsatzes: Ein Liering mit n -ter Engelbedingung und Charakteristik $p \geq n$ oder $p = 0$ ist lokal nilpotent. Eine einfache Reduktion zeigt, daß man den Hauptsatz nur für $p > n$ zu beweisen braucht. In der zuletzt erwähnten Arbeit (dies. *Zbl.* **79**, 261) hatte Verf. gezeigt, daß das Radikal N (d. h. die Summe der lokal nilpotenten Ideale) eines Lieringes L mit Charakteristik p und n -ter Engelbedingung im Fall $n < p$ selbst lokal nilpotent ist und daß der Faktorring L/N kein Radikal hat. Daher genügt es, die Annahme der Existenz eines radikalfreien Lieringes $L \neq 0$ der Charakteristik p mit n -ter Engelbedingung auf einen Widerspruch zu führen. Die lokale Nilpotenz der Lieringe von Charakteristik p mit $(n-1)$ -ter Engelbedingung wird dabei als schon bewiesen angenommen. Wegen der Zentrumsfreiheit von L kann man sich die Lie-multiplikation durch $[x, y] = xy - yx$ gegeben denken. Der gewünschte Widerspruch entsteht durch Konstruktion eines kommutativen Hauptideals $H = \{c\} \neq 0$ in L . Man kann jedes Element aus H in der Form $h = \sum [c u^k]$ mit $0 \leq k < n$

schreiben. Die Kommutativität von H bedeutet $H^2 = 0$ oder $c u^k c = 0$ für $0 \leq k < n$ und $u \in L$. Das Element c ergibt sich als letztes Glied einer endlichen Folge von Elementen $c(m) \neq 0$ mit $c(m) u^k c(m) = 0$ für $0 \leq k < 2m$ und $u \in L$. In § 1 wird zunächst gezeigt, daß für $m \geq 2$ und $2m + 3 < p$ aus der Existenz eines Elementes $c(m)$ die Existenz eines Elementes $c(m+1)$ folgt. Als $c(1)$ kann jedes Element $d \neq 0$ mit $d^2 = 0$ genommen werden; die Existenz solcher Elemente wird in § 2 bewiesen. Die Hauptschwierigkeit macht der Übergang von $c(1)$ zu $c(2)$. In § 3, der über die Hälfte der Arbeit einnimmt, wird für einen Liering von Charakteristik $p > 5$ mit n -ter Engelbedingung für $n < p$ oder $p = 0$ die Existenz eines Elementes $c(2)$ nachgewiesen. Auf die Einzelheiten der Beweise kann nicht näher eingegangen werden.

H. Salzmann.

Szép, J.: Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen. II. Publ. math., Debrecen 6, 254–261 (1959).

In der ersten Mitteilung (dies. Zbl. 84, 255) hat der Verf. das folgende Problem betrachtet: Gegeben sei eine Gruppe A und eine Menge Γ . Zu bestimmen sind sämtliche Gruppen G , welche eine zu A isomorphe Untergruppe und ein zu Γ isomorphes (im mengentheoretischen Sinne) Repräsentantensystem umfassen. In dieser Arbeit bemerkt Verf. vorerst folgendes: Betrachten wir die Zerlegung einer Gruppe G in Nebenklassen nach einer Untergruppe A ; $G = A e + A \alpha + A \beta + A \gamma + \dots$. Für die Elemente $\Gamma = (e, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$ des Repräsentantensystems definieren wir eine Multiplikation $\alpha \circ \beta = \gamma$ durch die Gleichung $\alpha \beta = a \gamma$ ($a \in A$). Dann wird Γ zu einer multiplikativen Struktur $\Gamma(A)$, welche eine Fastgruppe genannt wird. Im obigen Erweiterungsproblem ist es daher natürlich, daß wir von einer vorgegebenen Gruppe A und Fastgruppe Γ ausgehen. Der Verf., bemerkt, daß diese Betrachtung die Lösung des Problems beträchtlich vereinfacht. Weiter beweist Verf. folgende zwei Sätze: Satz 1. $\Gamma(A)$ ist dann und nur dann eine Gruppe, falls $\langle \Gamma \rangle \cap A$ ein Normalteiler in $\langle \Gamma \rangle$ ist. Satz 2. Sei G endlich. G ist auflösbar, falls $\Gamma(A)$ eine Gruppe wird, A und $\Gamma(A)$ nilpotent sind, und außerdem entweder A oder $\Gamma(A)$ abelsch ist. (Die letzte Bedingung ist nicht mehr nötig nach einem neuen Satz von Kegel.)

N. Itô.

Blackburn, Norman: Nilpotent groups in which the derived group has two generators. J. London math. Soc. 35, 33–35 (1960).

Kann man die Kommutatorgruppe G' der Gruppe G endlicher Klasse durch zwei Elemente erzeugen, so ist entweder G' abelsch oder eine endliche metazyklische Gruppe der Klasse 2. Der Beweis dieses Satzes wird geführt durch Rückführung auf den entsprechenden Satz für p -Gruppen, der ebenfalls vom Verf. gefunden wurde (dies. Zbl. 77, 32). Die Basis für diese Rückführung ist folgendes Lemma: Es gibt eine nur von der ganzen Zahl k und der Primzahl p abhängige ganze Zahl $f = f(k, p)$ mit folgender Eigenschaft: ist G eine Gruppe der Klasse k , deren p -Komponente P der Bedingung $P^{p^m} = 1$ genügt, dann ist $P \cap G^{p^{m+f}} = 1$.

R. Baer.

Kolettis jr., George: Semi-complete primary abelian groups. Proc. Amer. math. Soc. 11, 200–205 (1960).

Unter den höhenendlichen abelschen p -Gruppen treten bekanntlich solche Gruppen K auf, die direkte Summen zyklischer Gruppen sind, und solche Gruppen H , die mit der Torsionsuntergruppe ihrer hinsichtlich der p -adischen Topologie abgeschlossenen Hülle übereinstimmen und hier als torsionsvollständig bezeichnet werden. Verf. bildet nun direkte Summen aus je einer solchen Gruppe H und je einer solchen Gruppe K und nennt die dabei entstehenden Gruppen $G = H \oplus K$ halb-vollständig. Jede dieser Darstellungen $H \oplus K$ einer halbvollständigen Gruppe G werde eine Standard-Zerlegung von G genannt. Die Standard-Zerlegungen von G sind nicht eindeutig. Sind $G = H \oplus K$ und $G = H' \oplus K'$ zwei Standard-Zerlegungen von G , so existiert aber eine ganze Zahl n , so daß $p^n H \cong p^n H'$ und

$p^n K \cong p^n K'$ ist. Ferner existieren Untergruppen $\tilde{H}, \tilde{H}', \tilde{K}$ und \tilde{K}' von H, H', K und K' und Gruppen B und B' derart, daß $G = \tilde{H} \oplus B \oplus \tilde{K}$ und $G = \tilde{H}' \oplus B' \oplus \tilde{K}'$ gilt, wobei \tilde{H} und \tilde{H}' torsionsvollständig sind, B und B' nur Elemente mit beschränkter Ordnung besitzen und $\tilde{H} \cong \tilde{H}', \tilde{K} \cong \tilde{K}'$ und $B \cong B'$ ist. Zwei halbvollständige Gruppen $G = H \oplus K$ und $G^* = H^* \oplus K^*$ mit denselben Ulmschen Invarianten sind genau dann isomorph, wenn es eine ganze Zahl n gibt, so daß für jedes $i \geq n$ sowohl die i -ten Ulmschen Invarianten von H und H^* als auch die i -ten Ulmschen Invarianten von K und K^* gleich sind. Als Anwendung dieses Isomorphiesatzes wird schließlich an einem Beispiel eines Systems halbvollständiger Gruppen gezeigt, daß es überabzählbar viele nicht-isomorphe Gruppen der Mächtigkeit des Kontinuums mit denselben Ulmschen Invarianten gibt. K. Latt.

Ribenboim, P.: Sur quelques constructions de groupes réticulés et l'équivalence logique entre l'affinement de filtres et d'ordres. Summa Brasil. Math. 4, 65—89 (1958).

Eine additiv geschriebene, Abelsche Verbandsgruppe G mit der Unterhalbgruppe P aller nichtnegativen Elemente wird vom Verf. total zerlegbar genannt, wenn zu jedem Paar $a, b \in P$ eine Summenzerlegung $b = b_1 + b_2$ ($b_1, b_2 \in P$) von b existiert, derart, daß 1. $b_2 \wedge a = 0$ und 2. stets $b_1 \wedge c = 0$, wenn $a \wedge c = 0$. Wie üblich bezeichnet Verf. mit $E(a)$ für $a \in P$ die Menge aller c mit $c \wedge a = 0$ und mit \bar{a} die Äquivalenzklasse (das „filet“) aller a' mit $E(a') = E(a)$. Die Menge F aller „filets“ bildet dann bekanntlich einen distributiven Verband mit dem kleinsten Element 0, wenn man F durch die Vorschrift „ $\bar{a} \leq \bar{b}$ genau dann, wenn $E(a) \geq E(b)$ “ ordnet. Das Hauptstück der Arbeit bildet der Beweis des folgenden Einbettungssatzes: Es sei G eine Verbandsgruppe, F der Verband ihrer „filets“. Ferner sei F' ein Boolescher Oberverband von F , der ebenso wie F zum kleinsten Element 0 hat, und der außerdem der Bedingung genügt, daß zu jedem $a' \in F'$ ein \bar{a} in F mit $a \geq \bar{a}'$ existiert. Dann kann man eine total zerlegbare Gruppe G^* konstruieren, bei der der Verband F^* der „filets“ zu F' kanonisch isomorph ist, und einen Verbandsisomorphismus von G in G^* , der (trivialerweise) F in F^* verbandsisomorph abbildet. — Der Schlußparagraph wendet den Einbettungssatz in gewissen Sinne auf Grundfilterprobleme an. Man weiß: Es gelte für die Menge E die Behauptung (U): Zu jedem Filter aus Untermengen von E existiert in der Menge aller Untermengen von E ein umfassender Ultrafilter. Dann gilt für E die Behauptung (O): Jede Ordnung von E kann zu einer Totalordnung von E verfeinert werden. Dagegen ist noch nicht entschieden, ob umgekehrt (U) eine Folge von (O) ist. Verf. formuliert nun für Boolesche Algebren einerseits und für Verbandsgruppen G andererseits zwei Behauptungen (U') und (O'), von denen er auf Grund des Einbettungssatzes zeigen kann, daß sie logisch äquivalent sind, und die die Eigenschaft haben, daß (U) aus (U') und (O) aus (O') folgt. W. Krull.

Gol'dberg, P. A.: Zu einem Satz von Wielandt. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 1 (85), 153—156 (1959) [Russisch].

Es sei π eine Menge von Primzahlen und G eine Gruppe. G heißt eine π -Gruppe, wenn G periodisch ist und für jedes Element g von G jeder Primteiler der Ordnung von g zu π gehört. Eine Untergruppe H von G heißt eine Sylowsche π -Untergruppe von G , wenn H eine π -Gruppe ist und für jedes p aus π jede Sylowsche p -Untergruppe von H gleichzeitig eine Sylowsche p -Untergruppe von G ist. G heißt eine S -Gruppe, wenn G das direkte Produkt ihrer Sylowschen p -Untergruppen ist. Nun beweist Verf. den folgenden Satz: G sei eine Gruppe. H sei eine Sylowsche π -Untergruppe von G , die gleichzeitig eine S -Gruppe ist und deren Normalisator einen endlichen Index in G hat. M sei eine π' -Untergruppe von G , wo $\pi' \subseteq \pi$ ist. Dann gibt es ein Element γ in G mit $M \subseteq \gamma^{-1} H \gamma$. (Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Wielandt, vgl. dies. Zbl. 56, 256.) N. Itô.

Yacoub, K. R.: A note on semispecial permutations. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 164—169 (1958).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 72, 259) hat Verf. analytische Darstellungen für halbspezielle Permutationen erhalten (es gibt einen Punkt, den der Ref. nicht verstehen kann). In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. die Eindeutigkeit der Darstellungen. N. Itô.

Fong, Paul: Some properties of characters of finite solvable groups. Bull. Amer. math. Soc. 66, 116—117 (1960).

Es sei \mathfrak{G} eine endliche Gruppe der Ordnung $g = p^a g'$, $(p, g') = 1$ und B ein p -Block von irreduziblen Charakteren von \mathfrak{G} . Es sei d der Defekt von B und \mathfrak{D} Defektgruppe von B [R. Brauer, Math. Z. 63, 406—444 (1956)]. Ist p^{a-d+e} das Maximum der höchsten p -Potenzen p^{a-d+e_i} , die im Grad x_i eines Charakters χ_i aus B vorkommen, dann heißt $e \geq 0$ die Spanne von B (Bezeichnung des Ref.). R. Brauer [dies. Zbl. 73, 14, insbesondere S. 59 (III)] der dort besprochenen Arbeit] vermutet: Die Struktur der Defektgruppe \mathfrak{D} des Blocks B ist um so komplizierter, je größer die Spanne e von B ist; \mathfrak{D} ist abelsch genau dann, wenn $e = 0$ ist. — Verf. skizziert den Beweis der folgenden Sätze: \mathfrak{G} sei eine endliche auflösbare Gruppe. (1) Der Index des Zentrums von \mathfrak{D} in \mathfrak{D} sei p^c . Dann ist $e \leq c$. Insbesondere: Wenn \mathfrak{D} abelsch, so ist $e = 0$. (2) B enthalte den Hauptcharakter von \mathfrak{G} . \mathfrak{D} ist abelsch genau dann, wenn $e = 0$ ist. Hier ist \mathfrak{D} eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{G} und $e = 0$ besagt: Der Grad jedes Charakters aus B ist teilerfremd zu p . O. Tamaschke.

Littlewood, D. E.: The Kronecker product of symmetric group representations. J. London math. Soc. 31, 89—93 (1956).

Das „innere Produkt“ von S -Funktionen wird durch $\{\lambda\} \circ \{\mu\} = \sum g_{\lambda\mu\nu} \{\nu\}$ definiert, wenn (λ) und (μ) Partitionen derselben Zahl n sind und für die zugehörigen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n $[\lambda] \times [\mu] = \sum g_{\lambda\mu\nu} [\nu]$ gilt. Um Kronecker-Produkte von irreduziblen Darstellungen von S_n oder, was hiernach dasselbe ist, innere Produkte von S -Funktionen zu analysieren, wird ein Satz von Robinson und Taulbee (dies. Zbl. 56, 257) so verallgemeinert: $((\alpha) H \uparrow G) \times (\beta) = ((\beta) G \downarrow H \times (\alpha)) \uparrow G$. Hier ist H Untergruppe der endlichen Gruppe G , (α) Darstellung von H , $(\alpha) H \uparrow G$ die von ihr induzierte Darstellung von G , (β) Darstellung von G , $(\beta) G \downarrow H$ ihre Beschränkung auf H . Dieser Satz liefert, wenn für das gewöhnliche Produkt der S -Funktionen $\{\varrho\} \{\sigma\} = \sum \Gamma_{\varrho\sigma\nu} \{\nu\}$ gilt, die Formel

$$(\{\lambda\} \{\mu\}) \circ \{\nu\} = \sum \Gamma_{\varrho\sigma\nu} (\{\lambda\} \circ \{\varrho\}) (\{\mu\} \circ \{\sigma\}),$$

die, wie an Beispielen gezeigt wird, für die Analyse von Nutzen ist. H. Boerner.

Littlewood, D. E.: Plethysm and the inner product of S -functions. J. London math. Soc. 32, 18—22 (1957).

In der im vorstehenden Referat besprochenen Arbeit wurde das mit \circ bezeichnete „innere Produkt“ von S -Funktionen eingeführt und ein Satz angegeben, der ein Resultat von Robinson und Taulbee verallgemeinert. Zur Analyse von $(\{\vartheta\} \otimes \{\varphi\}) \circ \{\nu\}$, wo (ϑ) eine Partition von n , (φ) eine von m bedeutet, wird dieser Satz auf die symmetrische Gruppe S_{nm} und diejenige imprimitive Untergruppe von ihr angewandt, die m Folgen von je n Symbolen und zugleich die Symbole in jeder von ihnen symmetrisch permutiert. Es ergibt sich

$$(\{\vartheta\} \otimes \{\varphi\}) \circ \{\nu\} = \sum K_{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\varphi} (\{\lambda^{(1)}\} \circ \{\vartheta\}) \otimes (\{\mu^{(1)}\} \circ \{\alpha_1\}) \cdots \\ \cdots (\{\lambda^{(i)}\} \circ \{\vartheta\}) \otimes (\{\mu^{(i)}\} \circ \{\alpha_i\}).$$

Hier sind die $(\lambda^{(i)})$ Partitionen von n , die $(\mu^{(i)})$ und (α_i) Partitionen von m_i mit $m_1 + \cdots + m_i = m$, und die Koeffizienten K und Γ sind durch

$$(\{\lambda^{(1)}\} \otimes \{\mu^{(1)}\}) \cdots (\{\lambda^{(i)}\} \otimes \{\mu^{(i)}\}) = \sum K_{\lambda\mu\nu} \{\nu\}$$

und $\{\alpha_1\} \{\alpha_2\} \cdots \{\alpha_i\} = \sum \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\varphi} \{\varphi\}$ bestimmt. Beispiele dienen zur Illustration.

H. Boerner.

Gutnik, L. A.: On the extension of integral subgroups of some groups. Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 4) 47—78, engl. Zusammenfassung 77—78 (1957) [Russisch].

R sei die Gruppe aller reellen n -reihigen Matrizen der Determinante 1. Es wird bewiesen, daß die Untergruppe aller ganzzahligen Matrizen aus R eine maximale diskrete Untergruppe ist. Weiter sei M eine nichtsinguläre, schiefsymmetrische, ganzzahlige Matrix mit $n = 2p$ Reihen und G die Gruppe aller reellen Matrizen A mit $A' M A = M$. Wieder wird untersucht, ob die Untergruppe Γ aller ganzzahligen Matrizen aus G eine maximale diskrete Untergruppe ist. Es genügt, den Fall $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ zu betrachten, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Elementen d_1, \dots, d_p ist mit $d_1 = 1$ und $d_i | d_{i+1}$. Höchstens dann kann Γ maximal sein, wenn alle d_i quadratfrei sind. Ist die letztere Bedingung erfüllt, dann ist Γ maximal, falls p ungerade ist. Stets ist Γ im Falle $D = E$ maximal. Falls Γ nicht maximal ist, wird die maximale, Γ enthaltende Untergruppe angegeben. *R. Kochendörffer.*

Lingberg, Rolf: Zur Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen über einem Körper von Charakteristik $\neq 2$. Arch. der Math. 10, 344—347 (1959).

F. Bachmann hat (dies. Zbl. 50, 369) die Gruppe $PGL(2, K)$ über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ gekennzeichnet als eine von involutorischen Elementen (= Elementen der Ordnung 2) erzeugte Gruppe G , in der jedes Element das Produkt von zwei involutorischen Elementen ist, und in der folgende Axiome gelten: Bezeichne die involutorischen Elemente in G mit a, b, c, d, v, \dots und nenne zwei Elemente a, b verbindbar, wenn es ein v gibt so, daß av und bv involutorisch sind. Axiom T : Ist $a \neq b$ und sind abc, abd involutorisch, so ist acd involutorisch. Axiom $\sim V$. Es gibt a, b , welche unverbindbar sind. Axiom $UV 1$: Sind weder a, b noch c, d verbindbar, so gibt es ein v so, daß abv und cdv involutorisch sind. Axiom $UV 2$: Sind weder a, b noch a, c noch a, d verbindbar, so ist abc oder abd oder acd involutorisch. — In der vorliegenden Note beweist Verf., daß Axiom $UV 2$ eine Folge aus den übrigen Axiomen ist. Eine der Konsequenzen aus dieser Vereinfachung des Axiomensystems für $PGL(2, K)$ ist, daß, wie schon früher von Bergau bemerkt, in dem Axiomensystem des Ref. für die ebene hyperbolische Geometrie (dies. Zbl. 55, 139) das letzte Axiom von den übrigen abhängig ist, vgl. auch die Darstellung in Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, dies. Zbl. 85, 145. Im übrigen findet dieses Ergebnis seine natürliche Eingliederung in neuere, weitergehende Untersuchungen des Verf., in denen in systematischer Weise die speziellen orthogonalen Gruppen $SO(3, K, f)$ in 3 Variablen über einem Körper K beliebiger Charakteristik und mit einer entarteten oder nichtentarteten quadratischen Form f vom Index 0 oder 1 charakterisiert werden. *W. Klingenberg.*

Lester, Anne: Some semigroups on the two-cell. Proc. Amer. math. Soc. 10, 648—655 (1959).

Verf. betrachtet topologische Halbgruppen S , die homöomorph zur 2-Zelle sind. Wenn für den relativ zur Ebene gebildeten Rand B von S die Beziehung $B^2 = B$ erfüllt ist, muß B entweder eine Gruppe sein, oder die Produktbildung besitzt in B die triviale Form $xy = x$ bzw. $xy = y$. An dieses bekannte Ergebnis anknüpfend untersucht Verf. die Struktur von solchen topologischen Halbgruppen S , die 1. homöomorph zur 2-Zelle sind, 2. ein Null-Element 0 und sonst kein Idempotent als inneren Punkt besitzen und deren Rand B relativ zur Ebene 3. die Multiplikation $xy = x$ trägt. Es wird gezeigt, daß dann in S eine Halbgruppe T existiert, die 0 und ein Eins-Element enthält und für die $S = BT$ gilt. Außerdem gilt für $e, f \in B$ und $s, t \in T$ die Gleichung $(es)(ft) = e(st)$, und aus $es = ft$ folgt $s = t$. Am Schluß der Arbeit werden zwei konkrete Beispiele angegeben. *H.-J. Kowalsky.*

• **Ljubarskij, G. Ja.:** Gruppentheorie und ihre Anwendung in der Physik. [Teorija grupp i ee primeneniye v fizike.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958. 354 S. R. 18,20 [Russisch].

Das vorliegende Buch behandelt ausführlich in sehr klarer und übersichtlicher Weise die für den Physiker erforderlichen Grundlagen der Gruppentheorie und der Darstellungstheorie endlicher und unendlicher Gruppen. Die in der Physik wesentlichen Gruppen (Raumgruppe, Drehgruppe, Lorentzgruppe) werden beschrieben und ihre Darstellungen untersucht. Die gruppentheoretischen Ergebnisse werden auf die verschiedensten physikalischen Probleme angewendet. Mit der Kenntnis der Grundlagen der linearen Algebra ist das Buch ohne große Mühe zu lesen. Der Stoff ist in 17 Kapitel eingeteilt. Etliche Paragraphen sind durch Aufgaben für den Leser ergänzt. Im Anhang sind mehrere Charakterentafeln zusammengestellt, sowie ein Verzeichnis der Raumgruppen und ihrer wichtigsten Bestimmungsstücke und eine Tabelle der Racah-Koeffizienten. Nach einer Darstellung der Grundlagen der Gruppentheorie (Kap. I) werden einige spezielle Gruppen als Beispiele betrachtet (Permutationsgruppe, Drehgruppe, Punktgruppe, Translationsgruppe) (Kap. II). Kap. III und IV sind der allgemeinen Darstellungstheorie von Gruppen gewidmet. Der Begriff der Reduzibilität wird eingeführt, eine kurze Einführung in die Theorie der Charaktere gegeben. Das direkte Produkt von Darstellungen wird definiert und ein Kriterium für die Realität von Darstellungen abgeleitet. Dann werden ausführlich irreduzible Darstellungen und Charakterentafeln für spezielle Gruppen abgeleitet (Permutationsgruppe, Punktgruppe, Raumgruppe) (Kap. V). Die drei folgenden Kapitel behandeln Anwendungen der bisherigen Ergebnisse auf physikalische Probleme: Kleine Schwingungen symmetrischer Systeme (Kap. VI), Phasenübergänge 2. Art (Kap. VII) und Kristalle (Kap. VIII). Mit unendlichen Gruppen, und zwar speziell Lieschen Gruppen, beschäftigen sich die folgenden Kapitel. Zuerst werden allgemeine Eigenschaften Liescher Gruppen untersucht (Kap. IX). Dann werden die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe und der orthogonalen Gruppe abgeleitet. Dabei werden auch die zweiwertigen oder Spin-Darstellungen berücksichtigt (Kap. X). Es wird kurz auf Doppelpunktgruppen eingegangen. Den bei der Zerlegung von Kronecker-Produkten von irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe auftretenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten und ihren Eigenschaften, sowie den aus ihnen abgeleiteten Racah-Koeffizienten ist Kap. XI gewidmet. In Kap. XII werden aus der Symmetrie des Hamilton-Operators gegenüber einer unendlichen Gruppe von Transformationen Erhaltungssätze abgeleitet (Impulssatz, Drehimpulssatz). Ferner wird gezeigt, wie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen nach irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe des Hamilton-Operators klassifiziert werden können. Gleichungen, die invariant gegen die Euklidische Gruppe sind, werden in Kap. XIII untersucht. Als Beispiel werden die Maxwellschen Gleichungen für ein Feld der Frequenz ω behandelt. In Kap. XIV werden die gruppentheoretischen Methoden auf die Absorption und die Kombinationsstreuung (Raman-Effekt) von Licht angewandt. Die irreduziblen Darstellungen der Lorentzgruppe werden in Kap. XV behandelt und in Kap. XVI im Zusammenhang mit relativistisch invarianten Gleichungen benutzt. Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit speziellen Kernreaktionen.

H. W. Streitwolf.

Verbände. Ringe. Körper:

Keedy, M. L.: On a theorem of Jónsson and Tarski. *Portugaliae Math.* 16, 11—14 (1957).

The following modification of a theorem of B. Jónsson and A. Tarski (this Zbl. 49, 158) is proved: A necessary and sufficient condition for an abstract relation algebra A to be isomorphic to a relation algebra whose elements consist of all re-

lations included in some relation is that A be a complete and atomistic relation algebra in which every atom is the intersection of a right ideal element and the converse of a right ideal element. If A is also simple, then the condition is necessary and sufficient for A to be isomorphic to the relation algebra formed of all relations contained in a Cartesian product U^2 . — An element x is said to be a right ideal element provided $x = x; 1$. A is simple if $1; x; 1 = 1$ for all $x \neq 0$.

R. Sikorski.

Stearns, Richard: The voting problem. Amer. math. Monthly **66**, 761—763 (1959).

A pattern S is a finite set A with a pair of binary relations P (preferred over) and I defined in A and satisfying (i) I is reflexive and symmetric, (ii) P is irreflexive and antisymmetric, (iii) aIb if and only if neither aPb nor bPa (i. e. I is uniquely determined by P). S is called a voter, if it is strong (i. e. aIb implies $a = b$) and ordered (i. e. both I, P are transitive). A set of voters generates a new pattern S as follows: aPb in S if and only if a is preferred over b in majority of the given voters (and I is determined by (iii)). The voting problem: finde the smallest number $v(n)$ of voters required to generate an arbitrary pattern the set A of which contains n elements. There is shown that $v(n) \leq n + 1$ resp. $\leq n + 2$ for odd resp. even n and further that $v(n) \geq 55 n / \log n$ for large n . This are stronger results as in D. C. McGarvey: A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica* **21**, 608—610 (1953).

K. Čulík.

Amemiya, Ichiro and Israel Halperin: Complemented modular lattices derived from non-associative rings. Acta Sci. math. **20**, 181—201 (1959).

Für einen (nicht notwendig assoziativen) Ring R bildet man die (durch Mengeneinklusion teilweise geordnete) Menge L_n der $(e)_i (=$ Durchschnitt aller das Idempotent e enthaltender Linksideale) im Ring derjenigen (n, n) -Matrizen mit Elementen aus R , bei denen in der Hauptdiagonale nur assoziierende Elemente und oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen stehen. Für einen idempotent-assoziativen (d. h. $(ab)c = a(bc)$ falls eins der a, b, c idempotent) Ring R , werden in Fortführung früherer Untersuchungen (Fryer und Halperin, dies. Zbl. **83**, 157; Amemiya und Halperin, dies. Zbl. **85**, 145) hauptsächlich folgende Ergebnisse gewonnen: Ist R regulär (d. h. zu jedem a existieren b, c mit idempotenten ba, ac und $a(ba) = a = (ac)a$), so ist L_2 ein relativ komplementärer modularer Verband mit 0, der sogar komplementär ist und eine homogene Basis der Ordnung 2 besitzt, falls in R ein Rechtseinsselement existiert. Ist R alternativ-regulär mit Rechtseinsselement, so ist L_3 ein komplementärer modularer Verband mit einer homogenen Basis der Ordnung 3, dessen normierte Rahmen der Ordnung 3 sämtlich die in den oben erwähnten Arbeiten eingeführten einschränkenden Bedingungen erfüllen, und L_3 ist isomorph zum Verband L' , falls R im Sinne der genannten Arbeiten Koordinatenring von L' ist.

G. Pickert.

Ritchie, R. W.: A generalization of noncommutative Jordan algebras. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 926—930 (1959).

Verf. betrachtet Algebren endlicher Dimension und mit von 2 und 3 verschiedener Charakteristik, in denen die Identitäten $(x^2 y)x = x^2(yx)$, $x^2 x = x x^2$ gelten, und beweist, daß eine halbeinfache Algebra dieser Art eine nichtkommutative Jordan-Algebra mit Einselement und daher eine direkte Summe einfacher Subalgebren ist. Eine solche einfache Subalgebra ist entweder eine (kommutative) Jordan-Algebra, eine quasiassoziative Algebra, oder eine Algebra, deren Grad höchstens zwei ist.

E. Trost.

Leger, G. F.: A note on derivations of Lie algebras. II. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 10—11 (1959).

Sei L eine Liealgebra über einem Körper der Charakteristik 0 und sei $D(L)$ bzw. $I(L)$ die Liealgebra der Derivationen bzw. der inneren Derivationen von L . Ist S

eine halbeinfache Liealgebra und ist M ein S -Modul, dann ist M direkte Summe von SM und dem Untermodul M^S der Elemente aus M , die durch S annulliert werden. Bezeichne ferner R das Radikal von L , $Z(R)$ das Zentrum von R und $L = S + R$ die Levische Zerlegung von L . Dann zeigt Verf. im Anschluß an den ersten Teil (dies. Zbl. 50, 262): Aus $R^S \leq Z(R)$ folgt, daß $D(L)$ über $I(L)$ zerfällt („splits“). Ferner wird an einem Beispiel gezeigt, daß $D(L)$ über $I(L)$ zerfallen kann, ohne daß $D(R)$ über $I(R)$ zerfällt. Damit wird eine Frage aus der zuvor erwähnten Arbeit beantwortet.

F. Kasch.

Schafer, R. D.: On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. math. Soc. 10, 917—925 (1959).

Es sei A eine nichtassoziative Algebra mit Einselement von endlicher Dimension über einem Körper F , dessen Charakteristik von 2 und 3 verschieden ist. Eine Abbildung $x \rightarrow N(x)$ von A auf F heißt eine kubische Form über A , wenn $(x, y, z) = \frac{1}{6} [N(x+y+z) - N(x+y) - N(x+z) - N(y+z) + N(x) + N(y) + N(z)]$ trilinear ist und $N(\alpha x) = \alpha^3 N(x)$ für jedes α aus F gilt. Dann ist $(x, x, x) = N(x)$. (x, y, z) ist nicht degeneriert, wenn aus $(x, y, z) = 0$ für alle y, z folgt: $x = 0$. Verf. bestimmt diejenigen A , zu denen (als Norm) eine nicht degenerierte kubische Form $N(x)$ mit der Eigenschaft $N(xy) = N(x)N(y)$ (x, y in A) gehört. A erweist sich als separable alternative Algebra über F mit der Dimension 1, 2, 3, 5 oder 9. Im Fall einer quadratischen Form $N(x)$ sind die möglichen Dimensionszahlen bekanntlich 1, 2, 4 und 8.

E. Trost.

Wong, E. T. and R. E. Johnson: Self-injective rings. Canadian math. Bull. 2, 167—173 (1959).

Es sei C ein beliebiger Ring. Verff. nennen dann einen Oberring Q von C einen Rechts-Quotientenring von C , wenn Q als C -Rechtsmodul folgende Eigenschaft besitzt: Ist B ein C -Rechtsmodul mit $Q \supseteq B \supseteq C$ und f ein C -Homomorphismus von B in Q , so folgt aus $f(C) = 0$ stets $f = 0$. Die Existenz und Struktur maximaler Quotientenringe wurde von dem zweiten Verf. (dies. Zbl. 77, 258) und von Y. Utumi (dies. Zbl. 70, 266) behandelt. Verff. gewinnen diese Ergebnisse erneut aus allgemeineren Untersuchungen, deren Methoden an entsprechende Arbeiten von G. D. Findlay und J. Lambek (dies. Zbl. 85, 261) anknüpfen.

H.-J. Kowalsky.

Subrahmanyam, N. V.: Lattice theory for certain classes of rings. Math. Ann. 139, 275—286 (1960).

A ring R is said to be a P_1 -ring [resp. a P_2 -ring] if to each element a of R there exists an idempotent a° in the centre of R such that $aa^\circ = a$ [$aa^\circ = 0$] and for any idempotent e satisfying $ae = ea = a$ [$ae = ea = 0$] also $a^\circ e = a^\circ$ [$a^\circ e = e$] holds. Any ring with unity 1 whose only nonzero idempotent in its centre is 1, is a P_1 -ring; such rings are called here special P_1 -rings. — An associate ring (in the sense of Sussman, see this Zbl. 83, 29) is both a P_1 -ring and a P_2 -ring, and the purpose of the present paper is to extend the Sussman's results concerning the associate rings to these more general classes of rings. In a P_1 -ring a partial ordering ($<$) and a relation of compatibility (\sim) is introduced by making $a < b$ if $a^\circ b = a$ resp. $a \sim b$ if $a^\circ b = a b^\circ$; maximal (compatible) sets are defined as in Sussman's cited paper. Next, any P_2 -ring R will be imbedded in a P_1 -ring R' and a partial ordering resp. a relation of compatibility in R will be defined as the restrictions to R of these in R' ; one can show that every maximal element resp. set in R is also maximal in R' . — Results: All the idempotents of a P_1 - or a P_2 -ring are in the centre. Any P_1 -ring is isomorphic to a subdirect sum of special P_1 -rings, each of which is subdirectly irreducible. A P_2 -ring without unity is the direct sum of a P_1 -ring and a ring without nonzero idempotents. For a P_1 -ring R , the following statements are equivalent: (i) R has unity element, (ii) R is also a P_2 -ring, (iii) R has a maximal element (relative to the partial ordering $<$). A P_1 -ring or a P_2 -ring

without nilpotent elements in which the compatibility is a transitive relation between its nonzero elements is either a Boolean ring or a special P_1 -ring. Any maximal set M in a P_1 -ring is a distributive lattice under the operations $x \cap y = x^\circ y$ and $x \cup y = x + y - x y$ ($x, y \in M$).
G. Szász.

Govorov, V. E.: Die durch endliche Amalgame frei erzeugten Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. 50 (92), 241—246 (1960) [Russisch].

Die Vereinigungsmenge \mathfrak{D} der Algebren A_α über dem Körper P mit den vereinigten Teilalgebren $U_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ heißt ein verallgemeinertes Amalgam, wenn das Rechnen in $U_{\alpha\beta}$ durch A_α und A_β in gleicher Weise definiert ist. Die Algebra A heißt das freie Erzeugnis von \mathfrak{D} , wenn A durch \mathfrak{D} erzeugt wird und wenn für jede \mathfrak{D} enthaltende Algebra B ein Homomorphismus von A auf eine Algebra $B' \subseteq B$ existiert, der \mathfrak{D} identisch auf sich abbildet. Sei D eine Algebra, F eine freie Teilalgebra und \mathfrak{F} ein System freier Erzeugender von F . Ferner sei V eine Teilalgebra von D mit dem Erzeugendensystem \mathfrak{B} . Dann heißt D eine vollständig freie Algebra über V , in Zeichen $D = [V, \mathfrak{F}]$, wenn eine Basis von D aus allen nichtassoziativen Wörtern in $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{F}$ besteht, in denen jede Klammer der Länge 2 aus zwei Elementen aus \mathfrak{F} besteht. Die Hauptergebnisse der Arbeit sind: 1. Ist die freie Algebra S mit endlich vielen Erzeugenden homomorph auf eine Algebra G abgebildet, die das freie Erzeugnis des verallgemeinerten Amalgams \mathfrak{D} der Algebren A_1, \dots, A_k ist, dann läßt sich in S stets ein System von freien Erzeugenden wählen, deren Bilder bei dem Homomorphismus in \mathfrak{D} liegen. 2. Die Algebra G sei die freie Summe der Algebren A_1, \dots, A_k mit der vereinigten Teilalgebra U . Es existiere ein Homomorphismus von $D = [V, \mathfrak{F}]$ mit endlichem \mathfrak{F} auf G , wobei V auf U abgebildet wird. Dann läßt sich in $F = \{\mathfrak{F}\}$ ein System von erzeugenden Elementen finden, deren Bilder in eins der A_i fallen.
R. Kochendörffer.

Goldman, A. J.: A note on algebras. Amer. math. Monthly 66, 795—796 (1959).

Verf. beweist, daß die linke bzw. rechte reguläre Darstellung einer assoziativen Algebra A von endlicher Dimension dann und nur dann eine isomorphe Abbildung von A ist, wenn es in A kein von Null verschiedenes Element x bzw. y gibt, so daß $xz = 0$ bzw. $zy = 0$ für jedes z aus A gilt. Ein (von M. Newman gegebenes) Beispiel zeigt eine Algebra, in der jedes Element rechter und linker Nullteiler ist, ohne daß es Elemente x, y der oben erwähnten Art gibt.
E. Trost.

Cohn, P. M.: Rings of zero-divisors. Proc. Amer. math. Soc. 9, 909—914 (1959).

In the following "ring" (or "algebra") means commutative ring (or algebra) with identity and subrings (or subalgebras) always have the same identity as the containing one. In the note under review the author shows that a ring R can be embedded as a subring of a ring S such that every element of S is either a zero divisor or a unit of R . The proof goes via a lemma which shows that if t is a nonunit of R , R can be embedded as a subring of R' such that t is a zero divisor of R' and the units of R' are the units of R . The theorem follows by transfinite induction. The same theorem holds for algebras over a field. The above mentioned theorem leads the author to study algebras R with the property that the only nonunits are the field multiples of the identity. He proves that R is the subdirect sum of extension fields of the base field and that an element z of R is either transcendental over the base field or the base field is $GF(2)$ and z is idempotent. If such an algebra is finite dimensional it is either the base field or a Boolean algebra.
J. P. Jans.

Frejdman, P. A.: Brief an die Redaktion (anlässlich eines Artikels von M. Šperling). Mat. Sbornik, n. Ser. 52 (94), 915—916 (1960) [Russisch].

Betrifft die in diesem Zbl. 60, 78 angezeigte Arbeit.

Matlis, Eben: Injective modules over Prüfer rings. Nagoya math. J. 15, 57—69 (1959).

This paper discusses Prüfer rings from a study of injective modules over them. The main results are as follows. Let R be an integral domain with quotient field Q . (i) In case R is a valuation ring, R is almost maximal if and only if Q/R is an injective R -module. In this case Q/I is an indecomposable injective R -module for every ideal I of R . (ii) Every R -homomorphic image of Q is injective if and only if R is a Prüfer ring and every R -homomorphic image of Q is semi-compact. (iii) In case $Q \neq R$, the following statements are equivalent. 1. R is a maximal valuation ring. 2. R is a Prüfer ring with linearly compact quotient field. 3. All R -homomorphic images of Q are injective and $\text{Hom}_R(Q/R, Q/R) \cong R$. 4. R is an almost maximal valuation ring and $\text{Hom}_R(Q/R, Q/R) \cong R$. 5. $\text{Ext}_R^1(A, S) = 0$ for any torsion-free module A and any torsion-free module S of rank one. (iv) Let R be Noetherian. Then every finitely generated torsion R -module is a direct sum of cyclic modules if and only if R is a Dedekind ring. K. Morita.

O'Keefe, Kathleen B.: A property of the differential ideal $[y^p]$. Trans. Amer. math. Soc. 94, 483—497 (1960).

Es sei y eine differenzierbare Unbestimmte, deren i -te Ableitung mit y_i bezeichnet wird. Verf. betrachtet den Polynomring $R[y, y_1, y_2, \dots]$ über dem rationalen Zahlkörper mit der üblichen Differentiation. Für das von y^p erzeugte differenzierbare Ideal $[y^p]$ gilt dann $y_1^{2p-1} \equiv 0[y^p]$, und allgemein ist für jedes i eine geeignete Potenz von y_i in $[y^p]$ enthalten. Von J. F. Ritt wurde die Frage aufgeworfen, welches die kleinste natürliche Zahl q_i mit $y_i^{q_i} \equiv 0[y^p]$ ist. Verf. beweist im ersten Teil seiner Arbeit in verhältnismäßig knapper Weise das schon von J. F. Ritt ohne Beweis angegebene Resultat $q_1 = 2p - 1$. In dem wesentlich längeren zweiten Teil der Arbeit wird sodann der Fall $i = 2$ behandelt. Mit Hilfe sehr umfangreicher Rechnungen wird das Resultat $q_2 = 3p - 2$ gewonnen. Verf. vermutet, daß das allgemeine Eregbnis $q_i = (i + 1)(p - 1) + 1$ lautet. H.-J. Kowalsky.

Rayner, F. J.: Hensel's lemma. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 307—311 (1957).

Verf. verallgemeinert den Henselschen Hilfssatz auf nichtarchimedisch pseudobewertete perfekte kommutative Ringe. (Für eine ringtheoretische Fassung dieser Aussage sowie für nichtkommutative Verallgemeinerungen siehe Zassenhaus, dies. Zbl. 56, 266.) H. Benz.

Aurora, Silvio: Multiplicative norms for metric rings. Pacific J. Math. 7, 1279—1304 (1957).

Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Ring R mit Einselement und einer Mahlerschen Pseudobewertung $\|a\|$ bereits ein bewerteter Schiefkörper ist, z. B. die folgenden: 1. Die Gruppe G der regulären Elemente aus R bildet eine offene Menge bezüglich der durch $\|a\|$ auf R induzierten Ringtopologie. 2. Die Gesamtheit der Elemente $\neq 0$ aus R ist zusammenhängend. 3. $\|a\|$ ist auf G multiplikativ. Diese Bedingungen werden angewandt, um den bekannten Satz (der sich auch als Aussage für normierte Divisionsalgebren formulieren läßt), daß jeder archimedisch bewertete perfekte Schiefkörper wertisomorph zum reellen oder komplexen Zahlkörper oder zum Schiefkörper der reellen Quaternionen ist, unter schwächeren Voraussetzungen auszusprechen. Es genügt z. B. zu verlangen: 1. R ist perfekt. 2. $\|a\|$ ist auf G multiplikativ. 3. Die Halbgruppe H der Elemente a aus R , die keine „verallgemeinerten Nullteiler“ sind, d. h. für die gilt $\inf(\|ax\|/\|x\|) > 0$, $\inf(\|xa\|/\|x\|) > 0$, wo x über alle Elemente $\neq 0$ aus R läuft, ist zusammenhängend und dicht. Ist R eine (reelle) Banachsche Algebra, so genügt es, die Bedingung 2. zu verlangen. (Vgl. Albert, dies. Zbl. 29, 10; 33, 349, Edwards, dies. Zbl. 43, 114, Mazur, dies. Zbl. 20, 201.) H. Benz.

Moriya, Mikao: Zur Galoisschen Theorie der Schiefkörper. Math. J. Okayama Univ. 9, 49—62 (1959).

Eine Schiefkörpererweiterung K/L heißt galoissch, wenn L Fixkörper einer Automorphismengruppe \mathfrak{H} von K ist. Verf. nennt dann \mathfrak{H} eine Galoisgruppe von K/L ; diese ist durch die galoissche Erweiterung K/L nicht eindeutig bestimmt. Dabei ist zu beachten, daß gelegentlich in der Literatur auch nur die Gruppe $\mathfrak{G}(K/L)$ aller Automorphismen der galoisschen Erweiterung K/L als Galoisgruppe bezeichnet wird. Es gilt dann Satz 1: Sei K/L endlichdimensional und galoissch und sei Z ein Zwischenkörper von K/L . Dann und nur dann ist Z/L galoissch, wenn es eine Galoisgruppe \mathfrak{H} von K/Z und eine Galoisgruppe von K/L gibt, die \mathfrak{H} als Normalteiler enthält. — Dies ist insofern interessant, als diese Aussage für die Gruppen $\mathfrak{G}(K/Z)$ und $\mathfrak{G}(K/L)$ nicht zu gelten braucht. Ferner ergibt sich, daß die Fortsetzung jeder Galoisgruppe von Z/L auf K stets eine Galoisgruppe von K/L ist. — Sodann wird die Dimensionsgleichung für galoissche Erweiterungen verallgemeinert. Bezeichne dazu $V_K(S)$ den Zentralisator einer Teilmenge S aus K in K . Satz 2: Sei K/L endlichdimensional und galoissch; ferner sei \mathfrak{G} eine Galoisgruppe von K/L und \mathfrak{Z} der Normalteiler der inneren Automorphismen von K aus \mathfrak{G} ; schließlich bezeichne jetzt Z das Zentrum von K . Dann gilt $(K:L) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{Z}) (V_K(L):Z)$. — Hieraus ergeben sich weitere Folgerungen. — Schließlich werden Ergebnisse über Galoisgruppen mit Primzahlpotenzordnung bewiesen. Hierzu erwähnen wir Satz 4: Sei K/L galoissch mit der Galoisgruppe \mathfrak{P} , wobei $\text{Ord}(\mathfrak{P}) = p^e$, $p = \text{Primzahl}$, und das Zentrum von L enthalte keine primitive p -te Einheitswurzel. Dann gilt 1. $V_K(L)$ ist das Kompositum der Zentren von K und L ; folglich ist die Gruppe \mathfrak{Z} aller inneren Automorphismen aus \mathfrak{P} abelsch. Wenn insbesondere das Zentrum von K in L enthalten ist, so gehört \mathfrak{Z} zum Zentrum von \mathfrak{P} . 2. $(K:L)$ ist ein Teiler von p^e ; wenn K/L außer-galoissch oder $p \neq \chi(K)$ ist, dann gilt $(K:L) = p^e$. F. Kasch.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

● Schwarz, Štefan: *Algebraische Zahlen*. Praha: Pírodovědecké Nakladatelství 1950. 291 S.

Der vorliegende 16. Band der Sammlung „Kruh“ (Kreis) enthält eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen. Diese Einführung ist für Anfänger bestimmt und dementsprechend elementar bearbeitet. Stellenweise findet man jedoch auch Bemerkungen über Resultate und Probleme komplizierterer Natur, die für den Anfänger interessant sind, jedoch die Konzeption des Büchleins überschreiten. Aus methodischen Gründen ist die Idealtheorie am Beispiel eines quadratischen Körpers erläutert, während die Arithmetik der ganzen Zahlen in beliebigen algebraischen Körpern ziemlich kurz besprochen wird. Der Gruppenbegriff wird explizit nicht verwendet. Aus dem Inhalt: Arithmetik ganzer rationaler Zahlen, Arithmetik der Polynome über einem Zahlkörper, algebraische Zahlen und algebraische Zahlkörper, Sätze über ganze Zahlen in quadratischen Körpern, spezielle quadratische Körper, Arithmetik quadratischer Ideale, Arithmetik der ganzen Zahlen in algebraischen Körpern n -ter Grades, das Fermatsche Problem, Quaternionen. — Erfrischend wirken die in dem Büchlein vorhandenen zahlreichen historischen Bemerkungen. O. Borůvka.

Borevič (Borewicz), Z. I.: On the proof of principal ideal theorem. Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 13 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 3) 5—8, engl. Zusammenfassung 8 (1957) [Russisch].

Beweis der gruppentheoretischen Formulierung des Hauptidealsatzes unter Benutzung von Ergebnissen einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 52, 21).

R. Kochendörffer.

Zaikina, N. G.: Verteilung der n -ten Nichtreste nach dem Modul eines Primideals im imaginären quadratischen Körper. Moskovsk. gosudarst. ped. Inst. V. I. Lenin, učenyje Zapiski 108, mat. Kafedry 2, 273—282 (1957) [Russisch].

Dans ce travail l'A. établit que pour chaque idéal premier ϱ d'un corps quadratique imaginaire K la plus petite norme des nonrestes de puissance $n^{\text{ème}}$ par rapport à l'idéal ϱ est moindre que $N(\varrho)^{1/2\alpha}$ si n divise $N(\varrho) - 1$ et $N(\varrho) > c(K, n, \varepsilon)$, où α est un nombre réel ainsi que $\mu(\alpha) > 1/n + \varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit, la fonction $\mu(\alpha)$ étant défini auparavant (v. ce Zbl. 89, 24) et $c(K, n, \varepsilon)$ étant une constante qui dépend de K, n, ε . En ce qui concerne les restes de puissance $n^{\text{ème}}$ par rapport à l'idéal premier ϱ , le nombre R de ces restes qui se trouvent dans le parallélogramme E_T qui a son centre dans l'origine de coordonnées dont la plus grande diagonale est égale à $2T$ et dont les arêtes sont parallèles au vecteurs $1, \gamma$ qui constituent une base pour les nombres du corps K , a la propriété suivante $R = c(\gamma) T^2 / \sqrt{|d|} n + O(T^2 / \log^2 N(\varrho))$, où $c(\gamma)$ est l'aire du parallélogramme E_1, n divise $N(\varrho) - 1$ et $T \leq \sqrt[4]{N(\varrho)} \log^2 N(\varrho)$.

C. P. Popovici.

Barbilian, D.: L'argument d'Euclide pour l'infinité des nombres premiers. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. 8, 7—72, russ. und französ. Zusammenfassung 64—72 (1957) [Rumänisch].

Le résultat principal de ce travail, obtenue par une méthode strictement algébrique, quoique non élémentaire, en suivant le schéma d'Euclide de la démonstration de l'infinité des nombres premiers rationnels et en s'appuyant sur la théorie du conducteur, et le suivant: Dans l'ordre principal d'un corps de nombres algébriques de degré n il y a au moins un ensemble infini d'idéaux premiers de degré $g < n$. Il résulte que le théorème de Dirichlet sur l'infinité des idéaux premiers de degré 1 se trouve, par cela, algébriquement établi pour toute extension cyclique du corps des nombres rationnels, de degré premier l , où le cas des corps quadratiques correspond à $l = 2$. L'A. donne dans le cas $l = 2$, une démonstration complètement élémentaire libérée de la théorie du conducteur et rapportée seulement à quelques théorèmes simples, propres aux corps quadratiques. En ce qui concerne le théorème de Dirichlet-Kronecker qui établit que dans les corps de Kummer de degré premier l il y a une infinité d'idéaux premiers de degré l , l'A. étaye algébriquement ce théorème pour quelques corps quadratiques assez étendus: les corps des nombres quadratiques de discriminant d négatif et ceux de discriminant positif d caractérisés par $d \equiv 4 \pmod{16}$ et $d \equiv 8 \pmod{32}$. D'abord l'A. a obtenu, par voie strictement algébrique, que pour un nombre entier r impair et libre de carrés, respectivement pair et libre de carrés, il existe une infinité de nombres premiers $p = nr + 1$ qui satisfont à $p \equiv -1 \pmod{4}$ respectivement $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Dans ce travail l'A. s'occupe aussi avec le problème de l'infinité des éléments irréductibles dans les anneaux pas nécessairement commutatifs. A cet effet, l'A. introduit les définitions suivantes: Noyau d'un produit d'éléments irréductibles = l'ensemble des classes d'association à droite auxquelles appartiennent les facteurs. Suite à diviseurs = juxtaposition d'éléments dont chaque terme divise à droite ou bien à gauche (indifféremment) le terme précédent. Anneau à idéal principal à droite = anneau Ω à élément-unité, sous-commutatif à droite $\Omega \omega \subset \omega \Omega$, $\omega \in \Omega$, dont le groupe des unités E est sous-permutable à gauche avec le semi-groupe O des nondiviseurs de zéro $aE \subset Ea$, $a \in O$ et où chaque idéal bilatéral I , qui renferme au moins un nondiviseur de zéro, est principal à droite $I = \eta \Omega$. Dès lors on démontre ces analogues non commutatifs des théorèmes commutatifs classiques: a) Dans un anneau à élément-unité et dont le semi-groupe des nondiviseurs de zéro est à suites à div'seurs finies, tout nondiviseur de zéro est représentable comme produit (fini) d'éléments irréductibles. b) Dans un anneau Ω à élément-unité dont tous les idéaux gauches sont bilatéraux et principaux, tout semi-groupe O à suites à diviseurs finies et tel que $a = bc$, où $a \rightarrow O$, $b, c \rightarrow \Omega$ implique $b, c \rightarrow O$, possède un théorème fondamental non commutatif, c'est-à-dire les éléments de O se laissent décomposer en produit (fini) d'éléments irréductibles en O , dont le noyau reste invariant. c) Dans les anneaux à idéal prin-

cipal à droite, chaque nondiviseur de zéro $a \in O$ se laisse décomposer, dans le semi-groupe O des non diviseurs de zéro, en produits (finis) d'éléments irréductibles, dont les classes d'association sont invariantes et permutables. L'A. établit encore le théorème: L'ensemble des classes d'éléments irréductibles associés, d'un anneau Ω , est infini si l'une ou l'autre des conditions suivantes se trouve remplie: 1. Caractéristique nulle et propriété d'intégrité rationnelle de Ω , c'est-à-dire $\Omega \cap R = C$, où C est l'anneau des entiers rationnels et R , son corps quotient. 2. Intégrité des éléments irréductibles (tout élément irréductible est nondiviseur de zéro) et groupe des unités minimum ($E = \{+1, -1\}$). 3. Théorème fondamentale faible (à noyaux pas nécessairement invariants mais à dimension invariante) et existence d'au moins $L+1$ classes d'éléments irréductibles associés, où L signifie la limite (finie) des dimensions des noyaux relatifs aux différences $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ de deux unités. C. P. Popovici.

Mori, Mitsuya: Über die Klassenkörpertheorie für unendliche Erweiterungen von einem p -adischen Zahlkörper. Proc. Japan Acad. 33, 376—379 (1957).

Das Ergebnis der Arbeit kann folgendermaßen beschrieben werden: Sei K/k eine endliche abelsche Erweiterung mit der Gruppe \mathfrak{G} einer unendlichen algebraischen Erweiterung k eines p -adischen Zahlkörpers k_0 , K_n/k_n abelsche Näherungskörper mit zu \mathfrak{G} isomorphen Galoisgruppen \mathfrak{G}_n und $k K_n = K$. Nach dem Verschiebungssatz der lokalen Klassenkörpertheorie gilt für die Normengruppen der Multiplikationsgruppen $N_{K_n/k_n}(K_{n_x}^\times) N_{k_{n+1}/k_n}(k_{n+1}^\times) = k_n^\times$; einem Element (a_n) mit a_n aus k_n^\times aus dem projektiven Limes $\mathfrak{F}(k) = \varprojlim (k_n^\times, N_{k_{n+1}/k_n})$ kann daher mittels des Normsymbols $(a_n, K_n/k_n) = s_n$ aus \mathfrak{G}_n eindeutig der die s_n induzierende Automorphismus s aus \mathfrak{G} zugeordnet werden. Diese Abbildung $(a_n) \rightarrow s$ liefert den Isomorphiesatz der lokalen Klassenkörpertheorie für unendlich-algebraische Grundkörper k , und zwar im Gegensatz zu Moriya [Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 39—44, 452—459 (1942); dies. Zbl. 61, 60] ohne Einschränkung über den Grad $(K:k)$. Natürlich handelt es sich auch um eine andere Verallgemeinerung, da $\mathfrak{F}(k)$ statt k^\times zugrunde gelegt wird.

W. Jehne.

Feit, Walter: On p -regular extensions of local fields. Proc. Amer. math. Soc. 10, 592—595 (1959).

Excepting an example given relating to a theorem of Šafarevič, all arguments in this note are group theoretical. For a given prime p , a finite group G of order n is p -regular if $(n, p) = 1$. Let F be the free group on x and y , and for a given prime power $q = p^f$ let $N(q)$ be the normal subgroup generated by the element $y^{-1}xy - x^q$. The author characterizes those homomorphisms of the factor group $H(q) = F/N(q)$ which are p -regular. These are the factor groups $G(a, b, c) = F/N(a, b, c)$ of order a, b , where $N(a, b, c)$ is the normal subgroup of F generated by the three elements $x^a - 1$, $y^b x^c - 1$, and $y^{-1}xy - x^q$, and where (a, b, c) are non-negative integers restricted as follows: (*) $0 \leq c < a$, $0 < b$, $(b, q) = 1$, $c(q-1) \equiv q^b - 1 \equiv 0 \pmod{a}$. As the author remarks, the p -regular homomorphisms of $H(q)$ constitute the totality of Galois groups of the finite normal extensions of a field K which is complete with respect to an discrete valuation whose residue class field is finite and consists of $q = p^f$ elements, a result which the author attributes to K. Iwasawa [Trans. Amer. math. Soc. 80, 448—469 (1955)]. This result together with the author's theorem determines the number of non-isomorphic normal extensions of K with given (p -regular) Galois group G as the number of triples (a, b, c) satisfying (*) such that G is isomorphic to $G(a, b, c)$.

C. Faith.

Taniyama, Yutaka: Distribution of positive 0-cycles in absolute classes of an algebraic variety with finite constant field. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 8, 123—137 (1958).

Es sei k ein endlicher Körper mit q Elementen, und es seien V, A eine Mannigfaltigkeit und die zugehörige Albanese'sche Mannigfaltigkeit, beide definiert über k .

Die Dimensionen von V , A werden mit r , r' bezeichnet. Über das Verhalten der Zetafunktionen $Z_V(u)$, $Z_A(u)$ gibt es eine Vermutung von Lang, welche besagt, daß der Quotient $Z_V(q^{-r}u)/Z_A(q^{-r'}u)$ im Kreise $|u| < q$ weder einen Pol noch eine Nullstelle besitzt. Verf. beweist hier einen Satz, welcher eng mit dieser Vermutung zusammenhängt. Es wird gezeigt, daß die Verteilung der positiven 0-Zyklen gegebenen Grades m in jeder Zyklenklasse approximativ dieselbe ist für alle Klassen, vorausgesetzt daß $m \geq 2r' + 2$. Hierbei ist die Klassenbildung der Zyklen modulo dem Kern der Albanesischen Abbildung $\alpha: V \rightarrow A$ zu verstehen. Genauer läßt sich das Ergebnis des Verf. wie folgt formulieren: Für jeden Punkt b von A , rational über der Erweiterung $k_\mu \mu$ -ten Grades über k , bezeichne man mit $M_\mu(m, b)$ die Anzahl der positiven 0-Zyklen a vom Grade m auf V , rational über k_μ , für welche $\alpha(a) = b$. Es gilt dann

$$|M_\mu(m, b) - M_\mu(m, b')| < C_m \cdot q^{\mu(mr - \frac{1}{2}m)}$$

für $b, b' \in A$. Hierbei bedeutet C_m eine Konstante. — Die positiven 0-Zyklen m -ten Grades in der zu b gehörigen Klasse bilden ein irreduzibles algebraisches System der Dimension $mr - r'$: die Zetafunktionen dieser Systeme haben alle dasselbe Verhalten im Kreise $|u| < q^{-(mr - r' - 1)}$, falls $m \geq 2r' + 2$. Hieraus ergibt sich die Vermutung von Lang, unter Benutzung von Beobachtungen von Weil über die Zetafunktionen (dies. Zbl. 32, 394).

P. Roquette.

Zahlentheorie:

Carlitz, L.: Some congruences involving sums of binomial coefficients. Duke math. J. 27, 77—79 (1960).

J. Adam [Princeton math. Series 12, 191—238 (1957)] a prouvé la congruence

$$\sum_{k=0}^n \binom{a-k(q-1)}{k} \binom{b+k(q-1)}{n-k} \equiv \binom{a+b+1}{n} \pmod{q}$$

dans laquelle q est premier, $n \geq 0$, et a, b entiers arbitraires. Cette congruence est équivalente à la suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{a+kq}{k} \binom{b+(n-k)q}{n-k} \equiv \binom{a+b+nq}{n} \pmod{q}.$$

L'A. montre que cette seconde congruence peut être déduite assez facilement d'identités déjà connues.

A. Sade.

Rotkiewicz, A.: Sur les nombres composés n qui divisent $a^{n-1} - b^{n-1}$. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 8, 115—116 (1959).

L'A. démontre le théorème suivant: a, b et s étant des nombres naturels, où $a > b$ et $(a, b) = 1$, il existe une infinité de nombres naturels n qui sont produits de s nombres premiers distincts et tels que $n | a^{n-1} - b^{n-1}$. C'est une généralisation d'un théorème du rapporteur (ce Zbl. 83, 261), qu'on obtient pour $b = 1$, $s = 2$. La démonstration va par l'induction, en utilisant le théorème de G. D. Birkhoff et H. S. Vandiver [Annals of Math., II. Ser. 5, 173—186 (1904)] sur les diviseurs premiers primitifs des nombres $a^n - b^n$. Remarque du rapporteur: A la page 115 lignes 5 et 14 il faut supprimer le mot „si“.

A. Schinzel.

Rédei, L. und P. Turán: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern. Acta arithmetica 5, 223—225 (1959).

Let k be the finite field $GF[q]$ of $q = p^m$ elements, p prime, and let

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{q-2} x^{q-2},$$

where $a_i \in GF[q]$, $i = 0, 1, 2, \dots, q-2$, $a_0 \neq 0$. Now L. Rédei has proved (Algebra I, this Zbl. 55, 257) that the equation $f(x) = 0$ has exactly $q-1-r$ distinct solutions in $GF[q]$, where r denotes the rank of a certain cyclic matrix z of the coefficients. Unfortunately it is difficult to determine this number r . In the paper under review the authors give a very simple proof of the theorem that $r = r_{hms}$,

where r_{hms} is the "Hauptminorsummenrang", that is the greatest rational integer k for which the sum of all principal minors of z of order k do not vanish. This number r_{hms} is often easier to calculate than the usual rank r . W. Ljunggren.

Vandiver, H. S.: On distribution problems involving the numbers of solutions of certain trinomial congruences. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 1635—1641 (1959).

Let S_n denote the set $0, 1, 2, \dots, n-1$ and g a primitive root of the odd prime $p = cl + 1$. Let further $[i, j]$ denote the number of sets (r, s) which satisfy the congruence $g^{j+ls} + g^{i+cr} = 1 \pmod{p}$, where i and j are fixed in S_c and S_l respectively. In trying to prove a conjecture mentioned in a previous paper (this Zbl. 81, 38), the author was led to the following related result, which is stated and proved here: Let l be an odd prime and r a fixed rational integer and let $b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{l-1} = l$ with the b 's given integers in S_l . Then there exist infinitely many primes $p, c \not\equiv 0 \pmod{l}$, such that if $g^c \equiv t \pmod{p}$ then $[v, 0], [v, 1], [v, 2], \dots, [v, l-1]$ is the set of the b 's in some order, provided that $t^l + 1 \not\equiv 0 \pmod{l}$, $t \not\equiv 0$, $t + 1 \not\equiv n^l$ and $(t^l + 1)/(t + 1) \not\equiv w^l$. At last the author indicates a proof of a generalization of this theorem. W. Ljunggren.

Toscano, Letterio: Sulle soluzioni intere dell'equazione $4x^3 = 27y^2 + N$. Rivista Mat. Univ. Parma 8, 405—406 (1957).

E. Bombieri (dies. Zbl. 88, 254) hat alle Lösungen der diophantischen Gleichung $4x^3 = 27y^2 + N$ ermittelt, wobei $-22 \leq N \leq 80$, $N \neq 0$, $N \neq 49$ ist. Verf. zeigt, wie man diese Lösungen — ausgehend von einer geschickten Zerlegung von N — auf schnellerem Wege findet. N. Hofreiter.

Goldhaber, J. K.: Integral p -adic normal matrices satisfying the incidence equation. Canadian J. Math. 12, 126—133 (1960).

Bei der Aufstellung symmetrischer Blockpläne handelt es sich darum, für ganze Zahlen λ, k, v mit $0 < \lambda < k < v$ und $k(k-1) = \lambda(v-1)$ zu der Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,v}$ mit $b_{ii} = k$, $b_{ij} = \lambda$ (für $i \neq j$) eine Inzidenzmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,v}$ (d. h. eine solche mit $a_{ij} = 0$ oder 1) mit $AA^T = B$ zu finden, wobei sich weiter sogar mit E als der (v, v) -Einheitsmatrix und $S = (1)_{i,j=1,\dots,v}$ die Gleichung $A^T(E - tS)A = B - tk^2S$ für jede Zahl t ergibt. Die dadurch nahegelegte nähere zahlentheoretische Untersuchung liefert bei teilerfremden $k, k - \lambda$ die Sätze: 1. Existiert eine rationalzahlige (v, v) -Matrix C mit $CC^T = B$, so gibt es zu jeder Primzahl p eine Matrix A mit ganzen p -adischen Zahlen als Elementen und $AA^T = B = A^T A$. 2. Ist $t = a/b^{-1} > v^{-1}$, dabei a, b ganz und $(av - b)b$ ungerade, und gibt es eine rationalzahlige (v, v) -Matrix C mit $C^T C = B$, so existiert eine ganzzahlige Lösung X der Matrixgleichung $X^T(E - tS)X = B - tk^2S$. — Schließlich werden noch Bedingungen dafür hergeleitet, daß eine ganzzahlige Lösung der in Satz 2 genannten Matrixgleichung eine Inzidenzmatrix oder das Negative einer solchen ist. G. Pickert.

Lehmer, Emma: On Euler's criterion. J. Austral. math. Soc. 1, 64—70 (1959).

The author gives explicit expressions for $2^{(p-1)/k} \pmod{p}$ in terms of quadratic partitions of p for $k = 3, 4, 5, 8$. The proofs are based on some previous results of the author (this Zbl. 45, 20; 64, 278) and of A. L. Whiteman (this Zbl. 46, 268). Remark of the reviewer: 1° Equivalent results for $k = 3, 4$ have already been known (cf. B. A. Venkov, Elementary Number Theory, Moscow 1937, chapter 3) 2° on p. 67 line 3 instead of "[4]" should be "by (4)". A. Schinzel.

Sugunamma, M.: Certain results concerning $\sigma_k(n)$ and $\varphi_k(n)$. Ann. Polon. math. 8, 173—176 (1960).

Mit Hilfe der Riemannschen ζ -Funktion wird gezeigt:

$$\lim \sigma_n(n+a)/\sigma_n(n) = e^a; \quad \lim \varphi_n(n+a)/\varphi_n(n) = e^a;$$

$$\lim \sigma_n(n+a) \varphi_n(n+a) / \sigma_n(n) \varphi_n(n) = e^{2a},$$

wo $q_k(n) = n^k \prod (1 - p_i^{-k})$ und a und n natürliche Zahlen sind.

B. Stolt.

Succi, Francesco: Una generalizzazione delle funzioni aritmetiche completamente moltiplicative. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. **16**, 255—280 (1957).

The author uses the following symbols: $f \times g$ denotes the convolution of the arithmetic functions f and g ($(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$); α denotes the unity function ($\alpha(1) = 1$, $\alpha(n) = 0$ for $n > 1$); $f^{\times^{-1}}$ denotes the reciprocal function of f ($f^{\times^{-1}} \times f = \alpha$; f is supposed not identically $= 0$). If f is totally multiplicative ($f(mn) = f(m)f(n)$) we have obviously: (*) $f^{\times^{-1}} = \mu f$ (μ is the Möbius function) and (*) holds, of course, in the case also that $-f$ is totally multiplicative. The author considers the set C' of the functions for which (*) holds, and the set \tilde{C}_0 of the functions f , such that f or $-f$ is totally multiplicative. He proves the existence of an infinity of functions f satisfying the relations $f \in C'$, $f \notin \tilde{C}_0$, and shows that a function $f \in C'$ is determined by assuming $f(1) = +1$ or -1 and by assuming arbitrary values $f(r)$ for the numbers r for which $\mu(r) = -1$. Recursive relations are given in order to calculate $f(n)$ for every n when the values $f(1) = \pm 1$ and $f(r)$ have been assigned. Some allied questions are handled; in particular a necessary and sufficient condition is established in order for a function $f \in C'$ to be contained in \tilde{C}_0 .

M. Cugiani.

Staś, W.: Über eine Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz. *Acta arithmetica* **5**, 427—434 (1959).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der unteren Abschätzung des Restgliedes $R(x)$ im Primzahlsatz. Es wird folgendes Resultat bewiesen: Es sei $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ eine Nullstelle der Riemannschen Zeta-Funktion, $\mu_2 \leq \beta_0 < 1$, $T > \max(c_3, \exp \exp 2|\varrho_0|)$, dann gilt für

$$T \exp(-\log T \log \log \log T / (\log \log T)^2) - 1 \leq x < T$$

die untere Abschätzung

$$\max_x |R(x)| > T^{\beta_0} \exp(-8 \log T / \log \log T),$$

wobei $R(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) - x$ gesetzt wurde. $\Lambda(n)$ ist, wie üblich, gleich $\log p$, falls n eine Potenz der Primzahl p ist und Null sonst.

P. Szűsz.

McCarthy, P. J.: The probability that $(n, f(n))$ is r -free. *Amer. math. Monthly* **67**, 368—369 (1960).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Es sei r eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, $f(n)$ eine positive nicht-abnehmende, für alle natürlichen n definierte Funktion, $f^*(n)$ die Anzahl der m mit $f(m) = n$; ferner seien die Voraussetzungen $f(n) = o(n)$, $f^*(f(n)) = o(n)$ erfüllt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der größte gemeinsame Teiler $(n, f(n))$ keine r -te Potenz enthält, gleich $\zeta(2r)^{-1}$; unter „Wahrscheinlichkeit“ versteht man den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Q(t)$, wobei $Q(t)$ die Anzahl der n unterhalb t bedeutet, für die $(n, f(n))$ keine r -te Potenz enthält.

P. Szűsz.

Cassels, J. W. S.: On a problem of Steinhaus about normal numbers. *Colloquium math.* **7**, 95—101 (1959).

Als Antwort auf eine von H. Steinhaus aufgeworfene Frage beweist Verf. den folgenden Satz: Man definiere auf der Menge \mathfrak{A}_3 der Zahlen ξ , deren triadische Entwicklung die Ziffer 2 nicht enthält, ein Maß auf die folgende Weise: Ist $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(\xi) 3^{-k}$ ($\varepsilon_k(\xi) = 0$ oder 1), so bezeichnet man als das μ -Maß einer Teilmenge \mathfrak{B} von \mathfrak{A}_3 das Lebesguesche Maß der Menge der Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(\xi) 2^{-k}$, wenn ξ die Menge \mathfrak{B} durchläuft. Dann sind „ μ -fast alle“ ξ normal in jeder Basis, die nicht

eine Potenz von 3 ist, d. h. ist b eine beliebige natürliche Zahl, die nicht die Gestalt 3^m hat und stellt man ξ in der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(\xi) b^{-k}$ [$\varepsilon_k(\xi) = 0, 1, \dots, (b-1)$] dar, so kommen in der Entwicklung aller ξ sämtliche Ziffern mit der gleichen relativen Häufigkeit $1/b$ vor, höchstens bis auf eine Menge der ξ vom μ -Maße Null, wobei das μ -Maß auf die obige Weise definiert wurde. P. Szűs.

LeVeque, W. J.: On the frequency of small fractional parts in certain real sequences. II. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 130—149 (1960).

Einige Beweise in der gleichbetitelten Arbeit I. (dies. Zbl. **85**, 34) sind infolge eines Versehens unvollständig; besser gesagt, Verf. beweist nicht genau das, was er behauptet. In der vorliegenden Note gibt Verf. eine Berichtigung und beweist zwei verwandte Sätze, und zwar Satz 1. Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion mit $f(x) = O(x^{-1})$, $f'(x) = O(x^{-2})$ für $x \rightarrow \infty$, $0 < f(x) < \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty$; man setze ferner $g(x) = \frac{f(\log x)}{x}$, $G(n) = \sum_{k=1}^n g(k)$. Es bezeichne

$$T_n^{(d)} = T_n^{(d)}(x) = \sum_{\substack{m, l; m \leq n, (m, l) \leq d, \\ |mx - l| < g(m)}} 1,$$

$\mathfrak{M}(E)$ das Lebesguesche Maß der Menge E . Dann gilt für festgelegtes d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M} \left(T_n^{(d)} < 2 \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{r=d+1}^{\infty} r^{-2} \right) G(n) + \omega \left(\left(\frac{12}{\pi^2} \sum_{r=1}^d \frac{2r-1}{r^2} \right) G(n) \right)^{1/2} \right) = \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^{1/2}} dt.$$

Satz 2. Es sei $T_n(x) = \sum_{\substack{m \leq n \\ ||mx|| < g(m)}} 1$, wobei $||\dots||$ den Abstand der zwischen den

Strichen stehenden Zahlen von der nächstbenachbarten ganzen Zahl bedeutet; dann gilt $T_n(x) \sim 2G(n)$ für fast alle x . P. Szűs.

LeVeque, W. J.: On the frequency of small fractional parts in certain real sequences. III. J. reine angew. Math. **202**, 215—220 (1959).

(Teil I s. dies. Zbl. **85**, 34, Teil II s. vorstehendes Referat.) In der vorliegenden Arbeit behandelt Verf. die Anzahl der Lösungen der Ungleichung (*) $||a_k x - \alpha_k|| < f(x)$, wobei $f(k)$ eine monoton abnehmende Funktion bedeutet; die nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist, a_1, a_2, \dots eine zunehmende Folge natürlicher Zahlen, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ eine Folge reeller Zahlen ist und $||\dots||$ den Abstand der zwischen den Strichen stehenden Zahl von der nächstbenachbarten ganzen Zahl bedeutet. Das Hauptresultat lautet folgendermaßen: Satz 1. Es bezeichne $N_n(x; a_k, \alpha_k, f(k))$ die Anzahl der Lösungen von (*) für $k \leq n$, man

setze ferner $F(n) = \sum_{k=1}^n f(k)$. Gilt dann $\sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{a_k} \sum_{l=1}^k (a_k, a_l) = O(F(n)^{2-\delta})$ mit

irgendeinem positiven δ , so gilt $N_n(x; a_k, \alpha_k, f(k)) \sim 2F(n)$ für fast alle x . Der Beweis wird mittels der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt; gewisse Schwierigkeiten entstehen dadurch, daß die auftretenden Zufallsveränderlichen nicht unabhängig sind. Aus Satz 1 werden mehrere Sätze hergeleitet, die sich auf spezielle Folgen ($a_k = k^m$ ($m \geq 2$), $a_k = 2^k$, $a_k = k!$, a_k durchläuft eine Folge, deren Glieder eine beschränkte Anzahl von Teilern haben) beziehen. Die Arbeit schließt mit einer Abschätzung der Differenz $|N_n(x; a_k, \alpha_k, f(k)) - 2F(n)|$, die aus der Tschebyscheffschen Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitet werden kann.

— Bei den Beweisen spielt die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ keine Rolle. P. Szűs.

• **Gelfond, A. O.: Transcendental and algebraic numbers.** Translated from the first Russian ed. by Leo F. Boron. New York: Dover Publications, Inc. 1960. VII, 190 p. \$ 1,75.

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. **48**, 33.

Fel'dman, N. I.: Über die Transzendenz der Zahlen gewisser Klassen. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 1 (85), 237—244; **Berichtigung**. Ibid. Nr. 5 (89), 257 (1959) [Russisch].

The author uses Roth's method (this Zbl. 64, 285) to prove the Theorem: "If the inequality $\alpha - p/q < q^{-k}$ ($k > 1$) has infinitely many solutions in integers p, q where $q > 0$, $(p, q) = 1$, and if further $q = q' q''$ where q' and q'' are integers such that $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\log q'}{\log q} = 0$, while q'' has at most finitely many given prime factors P_1, \dots, P_t , then α is transcendental". This theorem is a special case of one due to D. Ridout (this Zbl. 79, 274). K. Mahler.

Yakabe, Iwao: Note on arithmetic properties of Kummer's function. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 13, 49—52 (1959).

Durch Übertragung der Methode von C. L. Siegel für Besselfunktionen auf die Kummersche Funktion wird folgende Transzendenzaussage bewiesen: Ist $K = K_{\kappa, \lambda}(x)$ eine Lösung der Kummerschen Differentialgleichung $K'' + (\lambda - x)x^{-1} K' = \kappa x^{-1} K$, dann gilt für rationale Werte $\kappa, \lambda \neq 0, -1, -2, \dots: 1$. Alle Nullstellen von $K_{\kappa, \lambda}(x)$ sind transzendent; 2. Sind κ und $\kappa - \lambda$ keine ganzen Zahlen und ist α eine algebraische Zahl ungleich Null, dann ist einer der Werte $K_{\kappa, \lambda}(\alpha)$ oder $K'_{\kappa, \lambda}(\alpha)$ transzendent. F. Kasch.

Sidlovskij, A. B.: Über die Transzendenz und algebraische Unabhängigkeit der Werte gewisser Funktionen. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 8, 283—320 (1959) [Russisch].

Let $y_1 = f_1(z), \dots, y_m = f_m(z)$ be Siegel E -functions [C. Siegel, Transcendental Numbers. Princeton 1949 (this Zbl. 39, 44), Chapter 2] satisfying a system of linear differential equations

$$(A) \quad y'_k = Q_{k0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{ki}(z) y_i \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

where the Q 's are rational functions with algebraic coefficients. In his important paper (this Zbl. 85, 273), the author had generalized Siegel's transcendency theorem for such equations and given a detailed proof of the following result: "If $\alpha \neq 0$ is an algebraic number distinct from the poles of the Q 's, then the numbers $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ are algebraically independent over the rational number field if and only if the functions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ are algebraically independent over the field of rational functions of z ." In the present paper the author applies this theorem to five rather general classes of E -functions, all definable as limiting cases of generalized hypergeometrical series. E. g., his first example states: "Let $\lambda_0 \geq 0$ be an integer, and let $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ be rational numbers no two of which have an integral difference; let $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ be distinct algebraic numbers not zero, and let β_1, \dots, β_n be algebraic numbers linearly independent over the rational field I . Then the numbers $\varphi_{\lambda_0}(\beta_i), \varphi_{\lambda_j}(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) where

$$\varphi_{\lambda}(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^r}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+r)} = \lambda z^{-\lambda} e^z \int_0^z t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

are algebraically independent over I ". (The special case $\lambda_0 = 0, m = 0$ is Lindemann's theorem). Another case generalizes Siegel's theorem on Bessel functions. To prove these results, one must show e. g. that the $(m+1)n$ functions

$$\varphi_{\lambda_0}(\beta_j z), \varphi_{\lambda_j}(\alpha_i z) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

are E -functions, satisfy a system of differential equations (A), and are algebraically independent over the field of rational functions of z . K. Mahler.

Bergström, Harald: The fundamental theorem of Roth. Nordisk mat. Tidskrift 7, 57—72, engl. Zusammenfassung 96 (1959) [Schwedisch].

Dies ist eine sehr leicht lesbare Darstellung des Beweises des berühmten Satzes von Roth über diophantische Approximationen. Unter Verwendung von Vektoren

die nebst den üblichen Axiomen eines Vektorraumes gewisse zusätzliche Begriffsbildungen befriedigen, ist es dem Verf. gelungen eine erhebliche Verbesserung der Übersicht des Beweises zu geben. *S. Selberg.*

Hartman, S.: A feature of Dirichlet's approximation theorem. Acta arithmetica 5, 261—263 (1959).

Verf. hat früher (dies. Zbl. 38, 188) gezeigt, daß es zu jeder ganzen Zahl s eine reelle Zahl $c = c(s) > 0$ so gibt, daß für beliebige ganze Zahlen a, b und eine beliebige irrationale Zahl α die Ungleichung $|\alpha x - y| < c/x$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen mit $x \equiv a \pmod{s}$, $y \equiv b \pmod{s}$ besitzt. Als überraschendes Resultat ergibt sich jetzt, daß eine analoge Aussage (d. h. Approximation mit Kongruenzbedingungen) für den Dirichletschen Approximationssatz nicht gilt. Im einzelnen wird gezeigt: Theorem 1: Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl α so, daß für jede Konstante $c > 0$ ein $t > 1$ so existiert, daß $|\alpha x - y| \geq t^{-1}$ für jedes positive $x < ct$, $(x, p) = 1$ gilt. Theorem 2: Für fast alle α und beliebiges $c > 0$ gibt es ein $t > 1$ so, daß $|\alpha x - y| \geq t^{-1}$ für jede ungerade ganze Zahl $x \leq ct$ gilt. Die Beweise gründen sich auf die Theorie der Kettenbrüche.

F. Kasch.

● **Sudan, Gabriel: Geometrische Theorie der Kettenbrüche.** [Geometrizarea fracțiilor continue.] București: Editura Tehnică 1959. 436 S. Lei 17,— [Rumänisch].

Cet ouvrage est consacré à l'étude géométrique des fractions continues. Il est divisé en dix chapitres parmi lesquels les premiers deux contiennent l'exposé général de la théorie des fractions continues. Tous les autres sont consacrés à la représentation géométrique des fractions continues. Dans le premier chapitre on trouve la définition des fractions continues régulières, des réduites et des entré réduites d'une fraction continue et leurs propriétés. Une fraction continue régulière, dont la notation est $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, est une suite de nombres entiers obtenus d'un nombre réel α comme suit: a_0 est la partie entière de α , a_1 est la partie entière de $1/(\alpha - a_0)$ si $\alpha \neq a_0$, a_2 est la partie entière de $1/(\alpha_1 - a_1)$ si $\alpha_1 \neq a_1$, où $\alpha_1 = 1/(\alpha - a_0)$ etc. . . Si $\alpha \neq a_0$, $\alpha_1 \neq a_1, \dots$, mais $\alpha_n = a_n$, alors le nombre réel α est caractérisé par une suite finie des nombres entiers et on adopte pour α la notation $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. La réduite d'une fraction continue régulière $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ est un nombre rationnel noté par R_i , à lequel on associe la fraction continue régulière $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_i]$. Si A_i/B_i est la fraction irréductible de R_i , alors les fractions $(A_i x + A_{i-1})/(B_i x + B_{i-1})$, où $x = 1, 2, 3, \dots, (a_{i+1} - 1)$, sont dénommées les entré réduites correspondantes à la paire des réduites (R_{i-1}, R_{i+1}) . Les propriétés établies sont utilisées à la détermination des solutions de l'équation diophantienne $ax - by = c$, où a, b sont premiers entre eux et à la décomposition des nombres naturels dans une somme de deux carrés. Sont étudiées les fractions continues périodiques et on démontre les théorèmes de Lagrange et de Galois, le théorème de Lagrange assignant que la fraction continue d'un nombre irrationnel dont le degré est deux est périodique et le théorème de Galois assignant que la période de la fraction continue du conjugué d'un nombre irrationnel $\alpha > 1$ dont le degré est deux est l'inverse de la période de la fraction continue de α . On étudie la fraction continue de $\sqrt{A/B}$, où A/B est un nombre rationnel, non carré, plus grand que 1 et comme application on étudie les équations de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, $x^2 - Dy^2 = -1$, où D est un nombre entier, non carré. Le deuxième chapitre contient l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels. En considérant comme valeur de meilleure approximation d'un nombre réel α toute fraction A/B telle que toute autre fraction plus approchée de α que A/B ou qui se trouve à la même distance que A/B a le dénominateur plus grand que B , on démontre que les réduites, sauf peut-être A_0/B_0 , et les entré réduites, si $2x > a_{i+1}$ ou si

$$[a_{i+1}, a_i, a_{i-1}, \dots, a_2, a_1] > [a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]$$

dans le cas où $2\alpha = a_{i+1}$ (le théorème de Smith) sont les seules valeurs de meilleure approximation d'un nombre réel $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. On démontre le théorème de Vahlen qui assigne que pour deux réduites consécutives A_i/B_i et A_{i+1}/B_{i+1} ($i > 0$) on a $|\alpha - A_i/B_i| < 1/2B_i^2$ ou $|\alpha - A_{i+1}/B_{i+1}| < 1/2B_{i+1}^2$, le théorème de Borel qui assigne que pour trois réduites consécutives A_{i-1}/B_{i-1} , A_i/B_i , A_{i+1}/B_{i+1} d'un nombre α une au moins d'entre elles à la propriété $|\alpha - A_j/B_j| < 1/\sqrt{5} B_j^2$ ($j = i-1, i$ ou $i+1$) et le théorème de Hurwitz qui assigne l'existence des nombres réels α pour lesquels l'inégalité $|\alpha - p/q| < 1/cq^2$, où $c > \sqrt{5}$, n'admet qu'un nombre fini des solutions entiers p et q . On introduit, avec Perron, pour chaque α la borne supérieure $M(\alpha)$ des nombres c pour lesquels l'inégalité $|\alpha - p/q| < 1/cq^2$ admet une infinité des solutions entiers p et q et on donne les propriétés de ce nombre $M(\alpha)$. La première représentation géométrique donnée dans ce livre et celle de Lettenmayer où on considère un cercle dont la circonférence est de longueur égale à 1, on adopte une origine 0 et un sens positif, par exemple celui trigonométrique pour parcourir cette circonférence et sur laquelle on représente les nombres α , 2α , 3α , 4α , ..., où α est un nombre irrationnel $0 < \alpha < 1$, par des points qui sont les extrémités des arcs α , 2α , 3α , 4α , ... l'une extrémité des lesquelles est en 0. Un point P_i ($i > 0$) de la suite des points $\{P\}$ ainsi obtenue est dénommé essentiel si la distance entre 0 et P_i est plus petite que la distance entre 0 et tout point de la suite $\{P\}$ qui précède P_i dans cette suite. La suite des points essentiels est infinie. Si P_{B_i} est un point essentiel, alors A_i/B_i est une réduite de α où $|B_i\alpha - A_i| < \frac{1}{2}$. On étend cette représentation géométrique dans le cas où on a deux nombres irrationnels α_1 et α_2 et l'on considère deux suites $A'_1/B_1, A'_2/B_2, \dots, A''_1/B_1, A''_2/B_2, \dots$ de nombres rationnels pour lesquels $|\alpha_1 - \frac{A'_i}{B_i}| < \frac{1}{B_i \sqrt{B_i}}$, $|\alpha_2 - \frac{A''_i}{B_i}| < \frac{1}{B_i \sqrt{B_i}}$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} B_i = \infty$. On remarque que la représentation géométrique faite sur la circonférence de longueur 1 peut être effectuée sur un segment de longueur 1 qui est fermé par rapport au module 1 c'est-à-dire si l'extrémité d'un des segments mesurés en commençant d'une des extrémités dénommée 0 du segment de longueur 1 dépasse ce segment, la portion qui dépasse est mesurée de nouveau en commençant de l'extrémité 0. Si on prend deux segments de longueur 1 issus de l'extrémité 0 de ces deux segments et qui font un angle droit entre eux on obtient dans un carré, dénommé carré fondamental, des points avec lesquels on peut caractériser les fractions qui approchent les nombres irrationnels α_1 et α_2 . On utilise encore les lignes polygonales de Klein pour représenter les réduites et les entreréduites d'une fraction continue et l'on obtient ces lignes polygonales en joignant par des segments les points de coordonnées (B_i, A_i) où $R_i = A_i/B_i$ est une réduite de la fraction continue considérée. Cette dernière représentation géométrique des fractions continues est utilisée pour illustrer les avantages des représentations géométriques dans la démonstration des théorèmes du deuxième chapitre et des autres théorèmes. La même représentation géométrique est utilisée à l'étude des fractions continues généralisées $a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots$ où $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ sont des nombres réels. La représentation géométrique de Speiser consiste dans la représentation de chaque fraction irréductible a/b par un cercle de rayon $1/2b^2$ situé au dessus de l'axe Ox et tangente à l'axe Ox dans le point d'abscisse a/b . Ainsi à chaque nombre irrationnel α correspond une suite de tels cercles, deux cercles voisins étant tangentes. Une autre représentation géométrique avec des cercles est celle de G. Humbert qui consiste en ce que on trace un demi-cercle au dessus de l'axe Ox , le diamètre étant le segment $(0, 1)$, puis on trace un demi-cercle au dessus de l'axe Ox , le diamètre étant $(0, \frac{1}{2})$, où $\frac{1}{2} = (0+1)/(1+1)$ en considérant que $0 = 0/1$ et $1 = 1/1$ et un demi-cercle au dessus de l'axe Ox , le diamètre étant $(\frac{1}{2}, 1)$, puis on trace un demi-cercle au dessus de l'axe Ox , le diamètre étant $(0, \frac{2}{3})$, où $\frac{2}{3} = (0+1)/(1+2)$ etc. ... Enfin on utilise un réseau parallèle quel'on obtient dans un système de coordon-

nées dont les axes font entre eux un angle φ en traçant des parallèles à l'axes Ox et à l'axe Oy qui passent par des points de coordonnées entiers situés sur Ox et sur Oy . C'est la méthode de Minkowski.

C. P. Popovici.

Flor, Peter: Inequalities among some real modular functions. Duke math. J. 26, 679—682 (1959).

Es sei α eine Irrationalzahl mit der Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$. Die Größen $k(\alpha)$, $I(\alpha)$, $S(\alpha)$ seien definiert durch

$$k(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \quad I(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\substack{x, y \text{ ganz,} \\ 0 < x \leq t}} t |\alpha x - y|; \quad S(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\substack{x, y \text{ ganz,} \\ 0 < x \leq t}} t |\alpha x - y|.$$

Dann werden die folgenden beiden Sätze bewiesen: Satz 1. Die drei Relationen $k(\alpha) = \infty$, $I(\alpha) = 0$, $S(\alpha) = 1$, sind für jedes irrationale α äquivalent. Satz 2. Ist $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ eine beliebige Folge von Irrationalzahlen, so sind die drei Relationen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k(\gamma_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(\gamma_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\gamma_n) = 1$$

äquivalent. Satz 2 enthält natürlich als Spezialfall ($\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \alpha$) den Satz 1. Die Haupthilfsmittel der Beweise sind die von Morimoto herrührenden Darstellungen von $I(\alpha)$ und $S(\alpha)$ mittels der Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von α .

P. Szűsz.

Anfert'eva, E. A.: Über eine Identität von Chowla und Selberg. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 3 (10), 13—21 (1959) [Russisch].

Die im Titel erwähnte Identität lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \zeta_Q(s) &= a^{-s} \zeta(2s) + \zeta(2s-1) \varphi_1(s) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{1-2s}(n) \varphi_2(s, n) \int_0^{\infty} v^{s-3/2} \exp \left[-\frac{\pi n \sqrt{\Delta}}{2a} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right] dv, \end{aligned}$$

$Q = a x^2 + b x y + c y^2$; $\varphi_1(s) = 2^{2s-1} a^{s-1} \sqrt{\pi} \Delta^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{-1}(s)$, $\varphi_2(s, n) = 2^{s+\frac{1}{2}} n^{s-\frac{1}{2}} \pi^s \cos \pi n b/a \cdot a^{-1/2} \Gamma^{-1}(s) (\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{2}-s}$ $\Delta = \text{abs. Betrag der Diskriminante von } Q$. Von der Dirichletreihe für Q ausgehend wird durch die Mellintransformation, durch eine als erlaubt nachgewiesene Vertauschung von Integrationen, durch Verschiebung der Integrationslinie und Heranziehung bekannter Abschätzungen für ζ und Γ die nach des Verf. Meinung unbewiesene Identität hergeleitet.

G. Hoheisel.

Zemmer, J. L.: A boolean geometry for the integers. Amer. math. Monthly 67, 56—57 (1960).

The author defines for the ring J of rational integers a distance function with values in a Boolean algebra. In his first theorem is obtained a characterization of the ring of integers as Boolean-valued ring. In the second it is proved that the only isometries of the Boolean space of the integers are reflections and translations.

D. Vaida.

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Romanovskij, P. I. and A. V. Vorob'ev: Beschränktheitsbedingungen und Wachstumsabschätzungen für halbb additive Funktionen. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenyje Zapiski 57, Trudy Kafedr Mat. 4, 99—106 (1957) [Russisch].

Verf. beweisen Sätze über die Beschränktheit für halbb additive Funktionen, die auf Untermengen einer additiven, normierten Halbgruppe definiert sind. Zuerst betrachten sie die Halbgruppe der reellen Zahlen. Z. B. sei e eine meßbare Menge positiver Zahlen mit der Bedingung $\inf_{a>0} a^{-1} \text{mes } e \cap (0, a) = \lambda > \frac{1}{2}$, und $f(x)$ eine endliche, meßbare, auf e definierte und halbb additive (d. h. aus $x_1 \in e$, $x_2 \in e$, $x_1 + x_2 \in e$ folgt $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$) Funktion. Dann ist $f(x)$ auf jeder Menge $e \cap \langle A, A+h \rangle$ ($A > 0$, $h > 0$) nach oben beschränkt, und außerdem existiert eine Menge $e^* \subset e$

mit der Eigenschaft $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-1} \text{mes } e^* \cap (0, a) > 2\lambda - 1$, derart, daß $f(x)$ auf jeder Menge $e^* \cap (0, B)$ ($B > 0$) nach unten beschränkt ist. Weitere Ergebnisse betreffen eine beliebige additive, normierte Halbgruppe E . Sei $e \in E$ und $x \in e$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_i \in e$, $\|x_i\| \leq \lambda \|x\|$ ($i = 1, 2$), $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, so heißt x λ -erreichbar in e . Satz: Ist jeder Punkt der Menge $e \in E$ λ -erreichbar in e , eine halbadditive Funktion auf e $f(x) > -\infty$ und $M \geq 0$, $f(x) \leq M$ für $x \in e$, $\|x\| < \gamma$, $c = -\ln 2/\ln \lambda$; dann $f(x) < 2M \|x\|^c \gamma^c$ falls $\|x\| \geq \gamma$. Ein Beispiel zeigt, daß diese Abschätzung auf dem Wege der Verkleinerung der Zahl c nicht verbessert werden kann. Verff. geben noch weitere Resultate dieser Art an. *J. Lipiński.*

Vorob'ev, A. V.: Halbadditive Funktionen auf Mengen des n -dimensionalen Euklidischen Raumes. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenye Zapiski 57, Trudy Kafedry Mat. 4, 107—120 (1957) [Russisch].

Verf. untersucht die Beschränktheitsbedingung für Funktionen $f(x)$, die auf meßbaren Untermengen e des n -dimensionalen Euklidischen Raumes E definiert und halbadditiv sind. Die Abschätzung hängt von der Lage von e in einem Kegel ab. Z. B. sei K ein Kegel und S_r die Kugel mit dem Radius r , deren Mittelpunkt in der Kegelspitze liegt, $\theta = \text{mes } K \cap S_r / \text{mes } S_r$, $e \subset K$, $\varrho = \sup_{a \in e} \text{dist}(a \cdot \|a\|^{-1}, E \setminus K)$,

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{mes } e \cap K \cap S_r / \text{mes } K \cap S_r > 1 - 2^{-1} \theta^{-1} \varrho^n (\varrho + 1)^{-n}.$$

$f(x)$ eine endliche, in e halbadditive Funktion. Dann existiert eine Kugel S_r , derart, daß $f(x)$ in jedem Punkt $a \in e \cap K' \cap S_r$ ($K' = \{a : a \in K, \text{dist}(a \cdot \|a\|^{-1}, E \setminus K) > (\varrho + 1) \sqrt[2]{2\theta(1-\lambda)}\}$) lokal nach oben beschränkt ist. Es gibt noch drei ähnliche Sätze. *J. Lipiński.*

Rogers, C. A. and S. J. Taylor: The analysis of additive set functions in Euclidean space. Acta math. 101, 273—302 (1959).

Den Hauptgegenstand der Arbeit bilden allgemeine Zerlegungssätze für die reellwertigen, vollständig additiven (v. a.) Mengenfunktionen F auf dem Körper \mathfrak{B} der Borelmengen in einem festen Intervall I_0 des \mathbb{R}_n . In bezug auf das Lebesguesche Maß μ gilt bekanntlich der Satz, daß jede solche Funktion eindeutig in der Form $F = F_1 + F_2 + F_3$ darstellbar ist, wobei F_1 absolut stetig (d. h. $F_1(E) = 0$ für alle $E \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(E) = 0$), F_2 singulär (d. h. auf einer Menge vom Maß Null konzentriert) und diffus (d. h. $F_2(\{x\}) = 0$ für alle $x \in I_0$), F_3 atomar (d. h. auf einer höchstens abzählbaren Menge konzentriert) ist. Verff. verallgemeinern diese Begriffe durch Betrachtung beliebiger Hausdorffscher Maßfunktionen $h(t)$ (d. h. für $t \rightarrow 0$ erklärter, stetiger, monoton wachsender Funktionen mit $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$) und der zugehörigen Maße $\mu_h(E)$. Eine v. a. Mengenfunktion F auf \mathfrak{B} wird a) h -stetig oder b) stark h -stetig, bzw. c) h -singulär oder d) fast h -singulär genannt, falls a) für jedes $E \in \mathfrak{B}$ mit $\mu_h(E) = 0$ oder b) für jedes $E \in \mathfrak{B}$ mit σ -endlichem $\mu_h(E)$ die Gleichung $F(E) = 0$ gilt, bzw. c) falls F auf einer Menge E_0 mit $\mu_h(E_0) = 0$ oder d) auf einer solchen mit σ -endlichem $\mu_h(E_0)$ konzentriert ist. Im Spezialfall $h(t) = t^\alpha$ werden diese Begriffe etwas modifiziert und mit dem Zusatz „ α -dimensional“ (statt „ h -“) versehen. Es wird dann gesagt, eine v. a. Mengenfunktion F auf \mathfrak{B} habe die genaue Dimension α , falls sie α -dimensional stetig und fast α -dimensional singulär ist. U. a. werden die beiden folgenden Zerlegungssätze bewiesen: 1. Für jede v. a. Mengenfunktion F auf \mathfrak{B} und jede reelle Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq n$ gibt es eine eindeutige Zerlegung $F = F_1 + F_2 + F_3$ derart, daß F_1 stark α -dimensional stetig, F_2 von der genauen Dimension α und F_3 α -dimensional singulär ist. 2. Zu jeder v. a. Mengenfunktion F auf \mathfrak{B} gibt es genau eine höchstens abzählbare Menge (paarweise verschiedener) reeller Zahlen α_i mit $0 \leq \alpha_i \leq n$ derart, daß eine eindeutige Zerlegung $F = F^{(d)} + F^{(\alpha_1)} + F^{(\alpha_2)} + \dots$ existiert, bei der die Funk-

tion $F^{(d)}$ ein diffuses Dimensionsspektrum hat (d. h. für kein $\alpha \in [0, n]$ existiert eine v. a. Mengenfunktion G auf \mathfrak{B} von der genauen Dimension α mit $G(E) \leq F(E)$ für alle $E \in \mathfrak{B}$), während jedes $F^{(\alpha)}$ von der genauen Dimension α_i ist. Für die bei 1. auftretende Komponente F_2 wird eine Integraldarstellung gegeben, die im Lebesgueschen Fall mit der des Radon-Nikodymschen Satzes übereinstimmt. — Ähnliche Sätze wie 1. und 2. werden auch für beliebige Maßfunktionen $h(t)$ bzw. für gewisse Systeme von solchen paarweise vergleichbaren Funktionen angegeben.

B. Volkmann.

Popruzenko, J.: Sur certaines représentations des fonctions d'ensemble à variation bornée. II: Fonctions σ -normales. Colloquium math. 5, 176—184 (1958).

(La prima parte v. questo Zbl. 82, 266.) — L'A. dimostra i seguenti risultati:

1. sia \mathfrak{M} un insieme astratto tale che \mathfrak{M} risulti $\geq \aleph_1$ ed inferiore al più piccolo aleph inaccessibile (un aleph \aleph_α è detto inaccessibile se non può ottenersi come somma di un numero n di numeri cardinali minori di \aleph_α con $n < \aleph_\alpha$ e se inoltre l'indice α è un numero ordinale di seconda specie), sia $F(E)$ una funzione reale d'insieme, definita sui sottoinsiemi E di \mathfrak{M} , σ -normale (cioè a variazione limitata e tale che

$$F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F(E_k)| \quad \text{con } E_k \cap E_{k+1} = \emptyset; \text{ in tali ipotesi si ha: A. se } F(E)$$

si annulla in ogni insieme fatto d'un sol punto, essa è identicamente nulla, B. se la F è $\neq 0$ in un insieme costituito d'un sol punto, esistono una funzione d'insieme χ totalmente singolare [cioè tale che in corrispondenza ad un certo insieme M di potenza minore di \mathfrak{M} si abbia $\chi(E) = \chi(E \cdot M)$] ed un insieme al più numerabile $E_0 \subset \mathfrak{M}$, verificanti le condizioni: $|F(E)| \leq |\chi(E)|$, $F(E_0) = \chi(E_0) \neq 0$. 2. sia N un insieme fondamentale di numeri irrazionali (cioè un insieme di numeri irrazionali contenuti in $(0, 1)$ tale che ogni suo sottoinsieme N_0 abbia potenza minore di \bar{N} se e solo se esiste una successione di interi positivi $\{c_k\}$ in corrispondenza alla quale, per tutti i numeri $a = (a_1, a_2, \dots)$ di N_0 riesca definitivamente $a_k < c_k$) e sia $\bar{F}(E)$ una funzione σ -normale nell'insieme dei boreliani relativi ad N ; in questo ipotesi si ha: A. se \bar{F} è nulla in ogni insieme di potenza minore di \bar{N} , è identicamente nulla, B. se \bar{F} è $\neq 0$ in un insieme E tale che $\bar{E} < \bar{N}$ allora esiste una funzione χ totalmente singolare ed un boreliano E' di N di potenza minore di \bar{N} soddisfacenti le condizioni $|F(E)| \leq |\chi(E)|$, $\bar{F}(E') = \chi(E') \neq 0$.

L. De Vito.

Newman, P.: On a theorem of Urbanik. Fundamenta Math. 46, 231—234 (1959).

Auf einem Körper von Teilmengen X einer Menge E seien gegeben n reelle Funktionen $v_i(X)$ ($i = 1, \dots, n$) mit: (1) $v_i(X) \geq 0$; (2) aus $X \subseteq Y$ folgt $v_i(X) \leq v_i(Y)$ (mit \subseteq , falls $v_i(Y - X) > 0$); (3) $v_i(X \cup Y) \leq v_i(X) + v_i(Y)$ (mit \cup , falls $v_i(X) \neq 0$ oder $v_i(Y) \neq 0$); (4) ist $v_i(Y) > 0$, so existiert ein $X \subseteq Y$ mit $v_i(X) > v_i(Y) > 0$. Dann existiert eine Zerlegung $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ mit $v_i(E_i) \geq v_i(E)/n$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $>$ gilt für mindestens ein i . Gilt noch: (5) ist $v_i(X) = 0$, so ist $v_j(X) = 0$ für $j = 1, \dots, n$; so existiert eine Zerlegung mit $v_i(E_i) > v_i(E)/n$ für $i = 1, \dots, n$.

G. Nöbeling.

Goetz, A.: On measures in fibre bundles. Colloquium math. 7, 11—18 (1959).

Der Begriff des Faserbündels verallgemeinert bekanntlich den des Produkt- raumes. Dementsprechend wird hier der Begriff des Produktes zweier Maße in natürlicher Weise zum „Produkt zweier Maße in einem Faserbündel \mathfrak{B} “, wofür wir hier kurz \mathfrak{B} -Produkt sagen wollen, verallgemeinert. Es sei hierzu $\mathfrak{B} = (B, p, X, Y, G)$ ein Faserbündel mit einem Totalraum B , einem lokal-kompakten Basisraum X , einer Projektionsabbildung $p: B \rightarrow X$, einer lokal-kompakten Faser Y und einer Strukturgruppe G . Mit X und Y ist dann bekanntlich auch B lokal-kompakt. Sind nun μ und ν Bairesche Maße auf X bzw. Y , so heißt ein Bairesches Maß λ auf B \mathfrak{B} -Produkt von μ und ν , wenn für jeden Atlas $(\Gamma_j, q_j)_{j \in I}$ von Bündelkarten (Γ Ko-

ordinatensystemen), jedes $j \in I$ und jede Bairesche Menge $Z \subset V_j \times Y$ gilt: $\lambda(\varphi_j(Z)) = (\mu \times \nu)(Z)$. (Hierbei werden von $\varphi_j: V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$ die üblichen Verträglichkeitseigenschaften gefordert.) Es wird gezeigt, daß zu vorgegebenem μ und ν genau dann das (dann eindeutig bestimmte) \mathfrak{B} -Produkt λ existiert, wenn das Maß ν auf Y G -invariant ist. Für das \mathfrak{B} -Produkt gilt ein verallgemeinerter Fubini-scher Satz. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß zu einem Baireschen Maß λ auf B und zu ν auf Y ein Bairesches Maß μ auf X existiert derart, daß λ das \mathfrak{B} -Produkt von μ und ν ist. Eingehend wird der Fall untersucht, wo B eine lokal-kompakte Gruppe und G eine abgeschlossene Untergruppe von B ist, für welche die kanonische Abbildung $p: B \rightarrow B/G$ einen lokalen Schnitt besitzt. Dann kann bekanntlich B als Totalraum eines Faserbündels $B = (B, p, B/G, G, G)$ aufgefaßt werden. Ist μ ein B -invariantes Bairesches Maß auf X und ν das linksinvariante Haarsche Maß von G , so erweist sich das B -Produkt λ als das links-invariante Haarsche Maß auf B . Hiervon gilt auch eine Umkehrung. H. Bauer.

Peck, J. E. L.: Doubly stochastic measures. Michigan math. J. 6, 217—220 (1959).

In analogy with doubly stochastic matrices and permutation matrices the author introduces the following definitions. Let X resp. Y denote the half lines $0 \leq x < +\infty$ resp. $0 \leq y < +\infty$. A nonnegative measure μ defined in $X * Y$ (i. e. in the positive quadrant of the (x, y) plane) is called a doubly stochastic measure if for each measurable subset E of finite Lebesgue measure $|E|$ of the half line $(0, +\infty)$ one has $\mu(E * Y) = \mu(X * E) = |E|$. A doubly stochastic measure μ is called a permutation measure if each line $x = \text{const}$ or $y = \text{const}$ intersects the support of μ in one point only. Let M denote the set of all generalized (i. e. not necessarily nonnegative) measures ν on the (x, y) plane which are such that if E is a linear set of finite Lebesgue measure, the total variation of ν on $E * Y$ and $X * E$ is finite. A topology is defined in M by calling a neighbourhood of $\nu_0 \in M$ the set of all $\nu \in M$ such that for a finite number of functions φ_k ($k = 1, 2, \dots, q$) which are continuous in the interval $(0, a)$ one has

$$\left| \int_0^t \int_0^\infty \varphi_k(x) d(\nu - \nu_0) \right| < \varepsilon \quad \text{and} \quad \left| \int_0^\infty \int_0^t \varphi_k(y) d(\nu - \nu_0) \right| < \varepsilon$$

for $0 < t \leq a$. It is shown that the closure (with respect to the above topology) of the convex hull of permutation measures is the set of all doubly stochastic measures. A. Rényi.

Pratt, John W.: On interchanging limits and integrals. Ann. math. Statistics 31, 74—77 (1960).

Verf. beweist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. Die Integration wird bezüglich eines Maßes μ verstanden, die Konvergenz der Funktionenfolge kann fast überall bezüglich μ oder dem Maße nach stattfinden. Als Folgerungen ergeben sich u. a. ein Resultat von H. Scheffé (dies. Zbl. 32, 290) und Bedingungen über die Differentiation unter dem Integral nach einem Parameter. Hervorzuheben an dieser Arbeit ist die Einfachheit der Beweisführung, so daß sie auch für pädagogische Zwecke von Interesse ist.

H.-J. Roßberg.

Marcus, Solomon: Sur une théorie du type Lebesgue pour l'intégrale de Riemann. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 175—184 (1958).

Das Haupttheorem dieser Arbeit lautet: Damit eine auf einer nach Jordan meßbaren Menge E (im $R^{(n)}$) beschränkte reellwertige Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein Riemann-Integral über E hat, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes reelle α , mit ev. Ausnahme abzählbar unendlich vieler, die Teilmenge von E , in deren Punkten $f \geq \alpha$ ist, Jordan-meßbar ist. Die hier auftretende Ausnahmемenge findet man schon angewandt in zwei Arbeiten des Ref.: Christiaan Huygens

5, 205 (1927); Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 15, 321—329 (1928). Vergleiche auch die didaktische Verarbeitung dieses Stoffes in O. Haupt-G. Aumann, Differential- und Integralrechnung, Bd. III (erste Aufl.), Berlin 1938; dies. Zbl. 22, 123.

J. Ridder.

Marcus, S.: Conditions d'équivalence à une constante pour les fonctions intégrables Riemann et pour les fonctions jouissant de la propriété de Baire. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 4, 283—285 (1959).

L'A. dimostra con considerazioni elementari, che sfruttano solo la teoria classica dell'integrazione, due noti teoremi che ordinariamente si dimostrano ricorrendo a proprietà della teoria delle funzioni misurabili e integrabili secondo Lebesgue. Pre-

messso che: 1. se è $(R) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx = 0$ si scrive $(R) f(x) \sim g(x)$ 2. un insieme E della forma $(G - P) \cup R$, dove G è aperto e P ed R sono di prima categoria secondo Baire, si dice che gode della proprietà di Baire. 3 una funzione $f(x)$ tale che, per ogni α reale, l'insieme $\{x; f(x) > \alpha\}$ gode della proprietà di Baire, si dice che gode anch'essa della proprietà di Baire, i due teoremi sono: I. Se $f(x)$ è integrabile (R) su $(-\infty, \infty)$ e se esiste un insieme H , dappertutto denso, tale che $(R) f(x+h) \sim f(x)$ per ogni $h \in H$, allora esiste una costante c tale che $(R) f(x) \sim c$. II. Sia H un insieme dappertutto denso. Se $f(x)$ gode della proprietà di Baire su $(-\infty, \infty)$ e se, per ogni $h \in H$ si ha $f(x+h) = f(x)$ per ogni x , esclusi al più quelli di un insieme di prima categoria, allora esiste una costante c tale che $f(x) = c$ per ogni x , tranne al più quelli di un insieme di prima categoria.

L. Giuliano.

Jeffery, R. L.: Generalized integrals with respect to functions of bounded variation. Canadian J. Math. 10, 617—626 (1958).

$\omega(x)$: finite non-decreasing function defined on the closed interval $[a, b]$. C : set on which ω is continuous. $F(x)$: finite function defined and continuous on C with finite right and left limits $F(x+)$, $F(x-)$ at any point $x \in [a, b]$. By „ ω -measure“ is meant the Lebesgue-Stieltjes measure associated to ω . The difference quotient $\psi(x, h)$ is defined for $x \in [a, b]$, $x+h \in C$ as

$$(F(x+h) - F(x-)) / (\omega(x+h) - \omega(x-))$$

if $h > 0$ and $\omega(x+h) - \omega(x-) \neq 0$; as

$$(F(x+h) - F(x+)) / (\omega(x+h) - \omega(x+))$$

if $h < 0$ and $\omega(x+h) - \omega(x+) \neq 0$; and as 0 if $\omega(x+h) - \omega(x+) = 0$. The ω -derivative $D_\omega F(x) = \lim \psi(x, h)$ as $h \rightarrow 0$, provided the limit exists. F is „AC- ω “ (on E) if for $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any finite set of non-overlapping intervals (x_i, x'_i) on $[a, b]$ (with $x_i \in E$, $x'_i \in E$) the inequality $\sum (\omega(x'_i+) - \omega(x_i-)) < \delta$ implies $\sum |F(x'_i+) - F(x_i-)| < \varepsilon$. F is „ACG- ω “ on $[a, b]$ if this interval is the union of a denumerable sequence of closed sets on each of which F is AC- ω . Theorem 2: If F is AC- ω on $[a, b]$, if $D_\omega F(x) = f(x)$ except for a set of ω -measure zero and if $a \in C$, $x \in C$, then $F(x) - F(a) =$

$\int_a^x f(x) d\omega$. Theorem 4: If F is ACG- ω on $[a, b]$, if f is an ω -measurable function on $[a, b]$ and $D_\omega F(x) = f(x)$ except for a set of ω -measure zero, then $F(b+) - F(a-)$ can be determined in a denumerable set of operations. Hints to the proofs: They rest on a Vitali property of intervals relatively to the ω -measure (lemma 2). Theorem 4 is proved by adapting the classical (i. e., $\omega(x) = x$) totalization procedure. {Remarks by the reviewer: (1) As it stands, lemma 2 is incorrect. Here is a counterexample: $a = 0$, $b = 1$; E consists of the point $x = \frac{1}{2}$; the open intervals $(x, x+h_i)$ are $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i})$, $i = 1, 2, \dots$; $\omega(x) = 0$ when $0 \leq x < \frac{1}{2}$; $\omega(x) = 1$ when $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Lemma 2 holds for intervals $[x, x+h_i]$. This alteration does not

affect the application p. 621 because H is continuous, but it invalidates the equality p. 625, lines 9—10. The closed interval function $F(x'') - F(x')$, $x' < x''$, is additive for partitions in non-overlapping intervals; $F(x''+) - F(x'-)$ is not for discontinuous ω . (2) From results of A. P. Morse [Trans. Amer. math. Soc. **61**, 418—442 (1947; this Zbl. **31**, 387) p. 431] and C. A. Hayes and C. Y. Pauc [Canad. J. Math. **7**, 221—274 (1955; this Zbl. **68**, 46), p. 256 (Proposition 3.16) and p. 235 (Theorem 1.64)], for the closed interval basis on $[a, b]$, the full differentiation theorem of any (signed) Lebesgue-Stieltjes measure with respect to any ω -measure follows. This theorem includes the information conveyed by theorem 2 above.}

Chr. Pauc (M. R. **21**, Nr. 113).

Cesari, Lamberto: Recent results in surface area theory. Amer. math. Monthly **66**, 173—192 (1959).

L'A. espone, in questo lavoro, i principali risultati della teoria della misura delle superficie, quale si è venuta sviluppando in questi ultimi tempi. Come superficie continua, egli definisce ogni coppia (T, A) ove T è una trasformazione continua dell'insieme A dello spazio euclideo E_2 nello spazio euclideo E_3 , ed ove A è un insieme chiuso di Jordan di ordine di connessione finito. Dopo aver richiamato la nozione di „immagine“ o „grafico“ di una superficie, di superficie semplice, monotona etc., l'A. passa al concetto di area di una superficie continua e di integrale superficiale. Egli riporta dapprima la definizione di area per (T, A) , data da Lebesgue nel 1900, come limite inferiore delle aree delle superficie poliedrali convergenti verso (T, A) in un senso opportuno. Ricordati, a tal proposito i fenomeni osservati da Schwarz e da Peano (1890) e richiamate le principali proprietà dell'area di Lebesgue, $L(T, A)$, tra le quali la semicontinuità inferiore in una topologia opportuna. L'A. passa a considerare la nozione di variazione totale per una superficie piana, nel senso di Jordan, $V(T, A)$, e nel senso di Banach, $W(T, A)$, e richiama il teorema, che generalizza quello di Banach per le funzioni di una variabile reale, secondo cui, per una superficie piana, si ha: $V(T, A) = W(T, A) = L(T, A)$. Una superficie piana è detta a variazione limitata se $V(T, A) < +\infty$. Se (T, A) è una superficie arbitraria, si introducono le variazioni totali per le superficie (piane) che sono proiezioni di (T, A) sui piani coordinati (T_1, A) , (T_2, A) , (T_3, A) . Allora, per un risultato dello stesso Cesari, (1942) si ha $L(T, A) < \infty$ se e solo se $L_r(T, A)$ ($r = 1, \dots, 3$) sono a variazione limitata. Vengono quindi richiamate le definizioni di area di una superficie date da Peano e da Geöcze e la loro equivalenza con quella di Lebesgue. L'A. passa quindi al concetto di superficie (T, A) assolutamente continua ed accenna al problema della rappresentabilità dell'area di una superficie (T, A) mediante l'integrale classico. L'ultima parte del lavoro è dedicata ad una rapida esposizione di alcuni risultati della teoria topologica delle superficie e delle connessioni di questa con la teoria della misura delle superficie.

L. De Vito.

Levine, Norman: A note on functions continuous almost everywhere. Amer. math. Monthly **66**, 791—792 (1959).

L'A. dimostra che una funzione $f(x)$, reale di variabile reale, è continua quasi dappertutto, cioè è una CAE, allora e solo che, se O^* è aperto, $f^{-1}(O^*)$ sia l'unione $O \cup A$ di un insieme aperto O e di un insieme A di misura nulla secondo Lebesgue. Da qui si deduce il Corollario: Se $f(x)$ è CAE e F^* è chiuso $f^{-1}(F^*)$ può scriversi come $F - A$, in cui F è chiuso e $m(A) = 0$. È noto, e l'A. dà un esempio in proposito, che una funzione CAE di una CAE può non essere CAE. Da alcune osservazioni si deducono poi i due seguenti Teoremi: I. Se f e g sono CAE e $m(A) > 0$, $m[g(A)] > 0$, la fg è CAE. II. Se f è continua e g è CAE, anche fg è CAE.

L. Giuliano.

Arnol'd, V. I.: Über die Möglichkeit der Darstellung von Funktionen zweier Veränderlichen in der Form $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$. Uspechi mat. Nauk **12**, Nr. 2 (74), 119—121 (1957) [Russisch].

Verf. zeigt, daß sich eine auf dem Quadrat E_2 ($|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$) definierte stetige reellwertige Funktion $f(x, y)$, die genau in den Punkten der Ellipse $(x + y)^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2 \leq 1$ den Wert 0 annimmt, nicht durch Funktionen der Gestalt $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ mit stetigen reellen Funktionen $\chi(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleichmäßig approximieren läßt. Der von Kolmogorov bewiesene Satz, nach dem die Funktionen, die sich mittels Addition und Ineinanderschachtelung aus stetigen reellen Funktionen einer Veränderlichen zusammensetzen lassen, in dem Raume aller auf E^2 definierten stetigen reellwertigen Funktionen dicht liegen (dies. Zbl. 70, 283), läßt sich also nicht dahingehend verschärfen, daß man sich bei der Approximation auf Funktionen der Gestalt $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ beschränkt. Im zweiten Teil der Arbeit wird bewiesen, daß die Funktion xy auf dem Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ nicht in der Form $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ dargestellt werden kann, obgleich sie im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz Limes von derartigen Funktionen ist.

H. G. Bothe.

Arnol'd, V. I.: On functions of three variables. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 679—681 (1957) [Russisch].

Arnol'd, V. I.: Über die Darstellung stetiger Funktionen dreier Veränderlichen durch Superpositionen stetiger Funktionen zweier Veränderlichen. Mat. Sbornik, n. Ser. 48 (90), 3—74 (1959) [Russisch].

Die erste der beiden oben genannten Arbeiten ist eine Vorankündigung der zweiten, so daß sich dieses Referat ausschließlich auf die zweite Arbeit bezieht. Verf. zeigt, daß sich jede stetige auf dem Einheitswürfel E^3 definierte reellwertige Funktion f durch Ineinanderschachtelung von stetigen reellen Funktionen von zwei Veränderlichen darstellen läßt. Mit diesem Satz ist das 13. Hilbertsche Problem gelöst und zwar in einer Allgemeinheit, die weit über seine ursprüngliche Formulierung hinausgeht. Von Kolmogorov (dies. Zbl. 70, 283) wurde bewiesen, daß sich jede Funktion f der oben angegebenen Art in der Form

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3]$$

schreiben läßt, wobei die φ_i stetige Abbildungen des Einheitsquadrates E^2 in eine Baumkurve \mathcal{E} sind, während die Abbildungen h_i dementsprechend das topologische Produkt $\mathcal{E} \times [0, 1]$ stetig in die Menge der reellen Zahlen überführen. Der Verf. zeigt nun, daß man den Baum \mathcal{E} so wählen kann, daß seine Verzweigungspunkte höchstens die Verzweigungsordnung 3 haben. Das Ergebnis der Arbeit ergibt sich dann sehr einfach aus dem folgenden Satz, dessen Beweis den Hauptteil des Artikels ausmacht: Es sei \mathcal{E} eine Baumkurve, deren Verzweigungspunkte höchstens die Ordnung 3 besitzen und F eine Menge von gleichmäßig stetigen reellwertigen auf \mathcal{E} definierten Funktionen. Dann kann man \mathcal{E} so in den Einheitswürfel E^3 einbetten,

daß sich jede Funktion $f(\xi)$ aus F in der Form $f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k)$ darstellen läßt,

wobei die f_k stetige Funktionen der Koordinaten x_k des Punktes ξ nach der Einbettung sind und die f_k stetig von f abhängen. Es sei darauf hingewiesen, daß § 4 einen Fehler enthält, denn die Behauptung, daß der dort angegebene Fall $i = 0$, $j = 0$, $l_0 = 1$ nicht eintreten kann, widerspricht dem bekannten Satz von Pappos aus der projektiven Geometrie. Auf die Berichtigung dieses Fehlers wird in einer geplanten deutschen Übersetzung der Arbeit ausführlich eingegangen werden.

H. G. Bothe.

Kolmogorov, A. N.: On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 953—956 (1957) [Russisch].

In der Arbeit wird der folgende Satz bewiesen: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so gibt es stetige auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte reellwertige Funktionen $\psi^{pq}(x)$, so daß sich jede auf dem Einheitswürfel E^n definierte stetige reellwertige Funktion

$f(x_1, \dots, x_n)$ in der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right]$$

mit stetigen Funktionen χ_q schreiben läßt (die Funktionen ψ^{pq} hängen nicht von f ab). Hieraus folgt insbesondere, daß sich jede stetige Funktion in mehreren Veränderlichen durch Ineinanderschachtelung von stetigen Funktionen zweier Veränderlicher darstellen läßt, ein Resultat, das zuerst von V. I. Arnol'd (vgl. das vorstehende Referat) bewiesen wurde und die Lösung des 13. Hilbertschen Problems beinhaltet. Die zum Beweis herangezogenen Methoden ähneln denen, die vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 70, 283) und in der soeben zitierten Arbeit von V. I. Arnol'd entwickelt wurden, enthalten gegenüber diesen jedoch wesentliche Vereinfachungen.

H. G. Bothe.

Arnol'd, V. I.: Über die Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher als Superposition von Funktionen einer geringen Anzahl Veränderlicher. Mat. Prosveščenie 3, 41—61 (1958) [Russisch].

Verf. gibt einen Überblick über die Ergebnisse, die im Zusammenhang mit dem 13. Hilbertschen Problem erzielt wurden, wobei er speziell auf die in letzter Zeit erschienenen Arbeiten über die Darstellbarkeit von stetigen Funktionen in mehreren Variablen durch Ineinanderschachtelung von stetigen Funktionen in weniger Variablen eingeht. In einigen Fällen werden die entsprechenden Beweise noch einmal skizziert. Insbesondere wird der der vorstehend besprochenen Arbeit von Kolmogorov zugrundeliegende Beweisgedanke an Hand eines Spezialfalles veranschaulicht.

H. G. Bothe.

Kahane, Jean-Pierre: Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée. Enseignement math., II. Sér. 5, 53—57 (1959).

L'A. fa alcune osservazioni sulla funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x)$ [$\varphi(x) = |x|$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$, $\varphi(x+1) = \varphi(x)$] portata da DeRham quale esempio di funzione continua e mai derivabile (cfr. questo Zbl. 77, 61). Egli dimostra che: 1. l'insieme dei punti x in ognuno dei quali la f ha un minimo relativo è costituito dai punti $x = p \cdot 2^{-n}$ (con p intero ed n numero naturale); 2. il massimo assoluto di f è $3/4$ e l'insieme dei punti nei quali è $f = 3/4$ è costituito dai numeri x che, in rappresentazione binaria $(1) x = \dots, x_1 x_2 x_3, \dots$ godono della proprietà: $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$, $k = 0, 1, \dots$ 3. l'insieme dei punti in ognuno dei quali la f ha un massimo relativo è formato dai numeri che, posti nella forma (1) , soddisfano la condizione: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = k$ per $k \geq n$ (ove n è un intero opportuno). Nel secondo paragrafo l'A. mostra che, assegnata una funzione $\chi(h)$, tale che $(2) \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) = \infty$, è possibile costruire una successione di numeri naturali $\{k_v\}$ in guisa tale che la funzione $g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x)$ abbia modulo di continuità $\omega(h)$ verificante la: (3) $\omega(h) < \chi(h)$. La $g(x)$, per il regionamento di DeRham, non è mai derivabile, laddove, se non fosse soddisfatta la (2), ogni funzione avente modulo di continuità verificante la (3) sarebbe lipschitziana e quindi quasi ovunque derivabile. Infine, l'A. mostra la possibilità di determinare due successioni di numeri naturali $\{p_v\}$, $\{k_v\}$ in modo tale che la funzione $\sum_{v=1}^{\infty} p_v 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x)$ abbia, in ogni punto x , modulo di continuità $\omega_x(h)$ maggiore di una fissata funzione $\psi(h)$ (infinitesima per h infinitesimo).

L. De Vito.

Bagley, R. W. and J. D. McKnight: Differentiation of infinite series of functions. Amer. math. Monthly 66, 890—892 (1959).

Una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni reali della variabile reale x si dice che converge uniformemente in un punto x_0 verso $f(x)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ e un

intero N tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $n \geq N$. L'A. dimostra che, assegnata la successione $\{f_n(x)\}$, se a) ogni $f_n(x)$ ha derivata continua nell'intervallo (1) $a \leq x \leq b$, b) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ in ogni punto di tale intervallo e c) $f'_n(x) \rightarrow g(x)$ uniformemente in x_0 , allora esiste $f'(x_0)$ ed è eguale a $g(x_0)$. Se poi $f'_n(x) \rightarrow g(x)$ in ogni punto di (1), allora se (2) $c \leq x \leq d$ è un sottointervallo di (1), in (2) è un punto x_0 tale che esiste $f'(x_0)$ ed è eguale a $g(x_0)$. Dalle ipotesi poste segue che i punti di (1) in cui la $f(x)$ non è derivabile, oppure la derivata non è eguale a $g(x)$, formano un insieme di prima categoria.

L. Giuliano.

Marcus, S.: Sur un théorème de M. S. Stoilow, concernant les fonctions continues d'une variable réelle. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 409—412 (1957).

L'A. mostra alcune conseguenze del teorema di Stoilow che afferma: Sia $f(x)$ una funzione reale e continua della variabile reale x ; per quasi tutti i valori ξ si ha: in ogni punto d'accumulazione unilaterale per l'insieme di livello relativo al valore ξ , uno dei numeri derivati è eguale al suo opposto (cioè $D^+ = D_-$ o $D^- = D_+$) ed in ogni punto isolato del medesimo insieme esiste la derivata bilaterale; se i numeri derivati (destri o sinistri) sono limitati, l'insieme è finito e se questi numeri derivati sono finiti, l'insieme è numerabile [Stoilow, Bull. Soc. math. France 53, 135—148 (1925)]. Fondandosi su questo teorema, l'A. dà una semplice dimostrazione del seguente teorema di Saks: Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x)$, continua, soddisfi la condizione di Banach T_1 (cioè i valori assunti da f infinite volte formino un insieme di misura nulla) è che i valori assunti da f nei punti nei quali non esiste la derivata (finita o no) costituiscano un insieme di misura nulla (S. Saks, questo Zbl. 3, 109). Inoltre, basandosi sul citato teorema di Stoilow, l'A. dimostra i seguenti teoremi: 1. Se $f(x)$ è continua e soddisfa la condizione T_2 di Banach (cioè l'insieme dei valori assunti da f un'infinità numerabile di volte ha misura nulla) e se D è l'insieme dei punti nei quali la f ha derivata (finita o no), l'insieme D è un „épaisseur pleine“ sull'intervallo dei valori di f [S. Saks, in „Theory of the integral“, (questo Zbl. 17, 300), pp. 280—281, aveva provato che, se $N(P)$ è l'insieme dei punti nei quali f ha derivata non negativa (non positiva), allora uno almeno dei due insiemi $f(N)$ e $f(P)$ ha misura positiva]. 2. Se f è continua e soddisfa la condizione (N) di Lusin (se cioè f muta insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla), i valori che f assume nei punti nei quali ha derivata (finita) formano un „épaisseur pleine“ sul codominio di f [S. Banach (questo Zbl. 3, 28), aveva provato che i sudetti punti formano un insieme di misura positiva]. 3. Se i valori che una funzione continua assume nei punti nei quali la sua derivata esiste (finita o no) formano un insieme di misura nulla, allora, per quasi tutti i punti ξ del codominio di f , l'insieme di livello di f relativo a ξ è perfetto, non denso e non vuoto [S. Minakshisundaram (questo Zbl. 23, 20) aveva dimostrato la tesi di questo teorema nell'ipotesi che la f fosse sprovvista di derivata in tutti i punti dell'intervallo di definizione].

L. de Vito.

Mitjagin (Mitiagin), B. S.: On second mixed derivative. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 606—609 (1958) [Russisch].

Sei E ein Banachraum von Funktionen $f(s, t)$ auf dem zweidimensionalen Torus, so daß der Raum D_∞ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen dicht in E liegt, und sei von der stetigen Funktion f bekannt, daß die Ableitungen f_{ss} und f_{tt} in E liegen. Verf. wirft die Frage nach den Bedingungen dafür auf, daß dann auch die gemischte Ableitung f_{st} in E liegt. Nach S. N. Bernstein [Gesammelte Werke, Band 1 (dies. Zbl. 47, 73), S. 97] lautet die Antwort für $E = L^2$ und $E = W$ (Raum aller Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe) positiv. Verf. zeigt nun durch Angabe eines Beispiels, daß die Antwort für $E = C$ negativ ausfällt; es gibt also stetige doppeltperiodische Funktionen $f(s, t)$ mit stetigen f_{ss}, f_{tt} , aber unstetiger gemischter Ableitung f_{st} .

D. Laugwitz.

Nolte, Sidney D.: An application of generalized means. Proc. Iowa Acad. Sci. 66, 357—361 (1959).

A. F. Timan (this Zbl. 42, 61) has proved that $\sup_{f \in F} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{4}{3}$, where F is the class of functions continuous in $[-1, 1]$ and satisfying $f(-1) = f(1) = 0$ and

(1) $|\frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h) - f(x)| \leq h$ ($h > 0, x \in [-1+h, 1-h]$) (quasi-smooth functions). The present author generalizes this result to

$$\sup_{f \in F_p} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{4}{3}(1 + |p - \frac{1}{2}|), \quad (0 < p < 1),$$

where we get F_p by replacing in the definition of F inequality (1) by

$$|pf(x+h) + (1-p)f(x-h) - f(x)| \leq h \quad (h > 0, x \in [-1+h, 1-h])$$

(generalized quasi-smooth functions). The author proves further, that continuity and

(2) $pf(x+h) + (1-p)f(x-h) - f(x) \geq 0$ ($h > 0, x \in [a+h, b-h]$)

for any fixed $p \neq \frac{1}{2}$ imply the monotonicity of f in $[a, b]$ (NB: increasing resp. decreasing as $p \leq \frac{1}{2}$). Finally the author quotes the reviewers paper (this Zbl. 30, 27) on generalized (quasilinear) means $M_p(x, y) = g^{-1}(pg(x) + (1-p)g(y))$ [$g(x)$ continuous and strictly monotonic in $[a, b]$] in order to mention that the latter result remains valid if (2) is replaced by

$$M_p(f(x+h), f(x-h)) - f(x) \geq 0 \quad (h > 0, x \in [a+h, b-h], p \neq \frac{1}{2}).$$

In course of the paper the author gives a proof, that the functional equation $pf(x) + (1-p)f(y) = f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ has nonconstant solutions only if $p = \frac{1}{2}$ (see also S. Marcus, this Zbl. 85, 277). Now this is evident:

$$\begin{aligned} pf(x) + (1-p)f(y) &= f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x) \\ &= pf(y) + (1-p)f(x), \quad (2p-1)(f(x) - f(y)) = 0, \quad p = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

For a complete investigation of the functional equations $pf(x) + qf(y) = f(ax + by)$ see a paper of Z. Daróczy in Acta Sci. math. 22, 31—41 (1961). In the present paper there is an immense number of printing errors. E. g. p. 358 l. 13 and p. 359 l. 11 the first — signs must be replaced by +, p. 358 l. 33 $\wedge (-1, 1)$ should be replaced by $\wedge (-1, 1)$ (maybe the whole should be throughout in brackets), in p. 359 l. 25 read $h = \frac{1}{2}$, p. 360 l. 1 replace (15) by (9), l. 6 replace $f(x_1 + x_2)/2$ by $f((x_1 + x_2)/2)$, l. 20 omit $= 0$, in p. 359 ll. 12, 19, 20 a number of absolute value signs are missing, p. 359 l. 20 also the subscript under max must be corrected, X stands several times in place of x , P in place of p etc. J. Aczél.

Turán, Paul: Remark on the theory of quasianalytic function-classes. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1, 481—487 (1957).

In previous works (this Zbl. 29, 291 and Part II, § 5 of his book „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen“, Budapest 1953; this Zbl. 52, 46) the author has proved the following theorem. If $\alpha > 0$ is fixed, $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{it_j x}$ (t_j real), where (*) $\limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{(2/\alpha)\omega \log \omega} \sum_{j > \omega} |a_j| < \infty$ and if for some real x_0 we have $\liminf_{h \rightarrow +0} e^{h^{-\alpha}} \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0} |f(x)| < \infty$ then $f(x) \equiv 0$. — In the present note the author shows on an example that (*) can not be replaced by the weaker condition $\limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\omega^{1-\varepsilon}} \sum_{j > \omega} |a_j| < \infty$, however small we choose $\varepsilon > 0$. The example in question is $f(x) = \exp(-1/\sin^\beta x)$, where $\beta = 2[1/\varepsilon] > \max(2, \alpha)$.

J. Horváth.

Turowicz, A. B.: Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse. Colloquium math. 7, 83—87 (1959).

The explicit formula for the n th derivative of the inverse function of $y = f(x)$ is given. — The result has also been given by A. Ostrowski (this Zbl. 77, 74.)

B. Kjellberg.

● Hancock, Harris: Theory of maxima and minima. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1917. New York: Dover Publications, Inc. 1960. XIV, 193 p. \$ 1,50.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. des Werkes in J.-buch Fortschr. Math. 46 (1917), 1456.

Stein, P.: A note on extreme values of a function of several variables. Amer. math. Monthly 66, 895—896 (1959).

By means of vector and matrix notations the author gives a very short and concise treatment of the subject.

B. Kjellberg.

Allgemeine Reihenlehre:

Borofsky, S.: Convergence in ordered integral domains. Amer. math. Monthly 67, 221—227 (1960).

The author observes that „All terms in defining convergence of a sequence of real numbers have meaning in any ordered integral domain“. Accordingly, he makes a study of this generalization. Special attention is devoted to the product sequences.

D. Vaida.

Jurimjaé (Jürimäe), É. I. (E.): Einige Fragen über verallgemeinerte Matrixverfahren, co-reguläre und Co-Null-Verfahren. Izvestija Akad. Nauk Ėstonsk. SSR, Ser. techn. fiz.-mat. Nauk 8, 115—121, deutsche Zusammenfassung 121 (1959) [Russisch].

Verf. untersucht Limitierungsverfahren für Folgen aus Banach-Räumen: $y_n = \sum_k A_{nk} x_k$, wobei die A_{nk} lineare stetige Operationen (aus einem B -Raum X in einen B -Raum Y) sind. Er überträgt auf diese Verfahren eine Reihe allgemeiner Sätze, die für den Fall gewöhnlicher Zahlenfolgen schon bekannt sind. Eine wesentliche Rolle spielt der Unterschied zwischen Matrizen, die ko-null bzw. ko-regulär sind (siehe A. Wilansky, dies. Zbl. 35, 353). Die acht Sätze des Verf. behandeln folgende Fragen: 1° Bedingungen für Konvergenztreue; 2° Wirkfeld als FK -Raum; 3° und 4° Kein ko-reguläres Verfahren limitiert alle Folgen, die von einem beliebigen ko-null Verfahren limitiert werden; 5° und 6° Verträglichkeit bzw. Unverträglichkeit mit stärkeren Verfahren je nach Approximationseigenschaften im Wirkfeld; 7° und 8° Auftreten unbeschränkter Folgen im Wirkfeld.

K. Zeller.

Kangro (Cangro), G.: On the generalization of a theorem due to Moore. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 967—969 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet numerische normale Matrizen A mit Inverser A' , bei denen die Ungleichung (3) $\sum_{\nu} \nu \sup_{\mu} |a_{\mu\mu} a_{\mu,\mu-\nu}| < \infty$ besteht. (Letztere Bedingung ist Matrizen mit Diagonalaufbau ähnlich den Nörlundschen angepaßt). Mit diesen Matrizen (Reihe-Folge-Transformation) summiert er Reihen $\sum x_k$ mit Elementen aus einem B -Raum. Als Konvergenzfaktoren ε_k verwendet er entsprechend lineare stetige Operationen. Die ε_k heißen Konvergenzfaktoren zweiter Art für A , wenn jede A -summierbare Reihe $\sum x_k$ eine konvergente Reihe $\sum \varepsilon_k x_k$ ergibt. Nach Satz 1 ist dafür notwendig und hinreichend: 1. $\sum a'_k \varepsilon_k x$ konvergiert für jedes x ; 2. $||\varepsilon_k|| = O(a_{kk})$; 3. $\sum_{k=0}^p A_k x_k = O(1)$ (wo $||x_k|| \leq 1$); dabei sei $a'_k = \sum_{\nu=0}^k a'_{k\nu}$ und $A_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} a'_{\nu k} \varepsilon_{\nu}$. — Diese Forderungen sind nämlich unter der Nebenbedingung (3) äquivalent mit der Konvergenztreue der zu untersuchenden

Vermittlungstransformation. — Zwei weitere Sätze behandeln Faktoren für A -beschränkte bzw. absolut A -summierbare Reihen. Die Ergebnisse lassen sich leicht auf Faktoren erster Art (für die Folge der Teilsummen) übertragen. *K. Zeller.*

Mayer-Kalkschmidt, J.: On conditional inclusion of matrix methods. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 193—198 (1959).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Umfassung von Matrixverfahren, wenn die zu limitierenden Folgen Beschränkungen unterworfen sind. Die zwei Hauptsätze seien zitiert: Es sei $C = (c_{nv})$ eine Dreiecksmatrix. Wir sagen, C genügt der Bedingung (\mathfrak{M}) , wenn es zu jedem Zahlenpaar n, m ($n \leq m$) eine Zahl n' gibt derart,

daß $\left| \sum_{v=0}^n c_{nv} s_v \right| \leq K \left| \sum_{v=0}^{n'} c_{n'v} s_v \right|$ gilt, wobei K nur von der Matrix C abhängt.

Ist $\Omega(n)$ eine monoton zunehmende Funktion, so bezeichnet $[C, O(\Omega(n))]$ die Gesamtheit sämtlicher Folgen $\{s_n\}$, deren C -Transformierte $O(\Omega(n))$ sind, d. h. für die

$\sum_{v=0}^n c_{nv} s_v = O(\Omega(n))$ ist. Dann gilt Satz 1. Es seien A und B zwei durch

Dreiecksmatrizen definierten Verfahren; A soll der Bedingung (\mathfrak{M}) genügen. Gilt

dann $\sum_{v=0}^n \Omega(v) \left| \Delta_v \frac{b_{nv}}{a_{nv}} \right| = O(1)$, so gilt $[A, O(\Omega)] \subset [B, O(1)]$. (Der Beweis wird

durch partielle Summation geführt). Satz 2. Es sei B ein reguläres Verfahren, A ein Verfahren mit $a_{\mu v} \rightarrow 0$ für $\mu \rightarrow \infty$. Dann ist für das Bestehen der Relation

$[A, O(\Omega)] \subset [B, O(1)]$ notwendig und hinreichend, daß $\sum_{v=0}^n \left| \Omega(v) \sum_{\mu=v}^n b_{n\mu} a_{\mu n} \right| = o(1)$

besteht. Als Korollare ergeben sich manche bekannten Sätze, z. B. die Tatsache,

daß aus der $(C, 1)$ Summierbarkeit einer Folge und aus $\left| \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} - s \right| = o(n^{-1/2})$

die Euler-Summierbarkeit derselben Folge folgt.

P. Szűsz.

Parameswaran, M. R.: Note on a theorem of Mazur and Orlicz in summability. J. Indian math. Soc., n. Ser. **22**, 65—75 (1959).

Verf. untersucht die Limitierbarkeit beschränkter Folgen durch Matrizen, die Eigenschaften wie Konvergenztreue besitzen. Satz 1. Die Matrix A führe jede Nullfolge in eine konvergente Folge über. Dann ist die Menge der beschränkten Folgen $\{x_n\}$, die zum Wert $\sum_n x_n \lim_i a_{in}$ limitiert werden, genau dann separabel in (m) ($= B$ -Raum der beschränkten Folgen), wenn sie nur aus den Nullfolgen besteht.

— Verf. gibt auch eine Variante für konvergenztreue Matrizen und betrachtet den Sonderfall $\chi(A) = 0$. Satz 4. Ein konvergenztreues A limitiert genau dann keine beschränkt-divergente Folge, wenn $\|Ax\| \geq k\|x\|$ für jedes $x \in (m)$ mit $x_1 = \dots = x_p = 0$ gilt (wo k und p geeignete feste Zahlen sind und $\|x\|$ die übliche Supremumsnorm bedeutet). — Daraus ergibt sich: Besitzt ein konvergenztreues A eine Inverse B mit beschränkten Zeilennormen, so ist B auch konvergenztreu, und A limitiert keine beschränkt-divergente Folge (Satz 5 und 6 geben eine noch etwas schärfere Fassung). Satz 7 und 8 besagen, daß Verfahren mit Perfektheitseigenschaften beschränkt-divergente Folgen limitieren, wenn sie überhaupt divergente Folgen limitieren.

K. Zeller.

Parameswaran, M. R.: Some Tauberian theorems for Nörlund summability. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 392—398 (1958).

Verf. vergleicht Nörlund- und Hölderverfahren für reelle Folgen $s = \{s_n\}$ und reelle Parameter p_n bzw. α . — Satz 1. Das reguläre Nörlund-Verfahren (N, p_n) limitiere die Folge s . Für geeignete reelle α, K, c, λ, L gelte $(H^\alpha - c + 1 H^{\alpha+1}) s \leq K$ sowie $H^\lambda s \geq L$. Dann wird s auch von $H^{\alpha+1}$ limitiert, und zwar zum selben Wert wie von (N, p_n) . — In gewissen Fällen kann auf die Voraussetzung über H^λ verzichtet werden, nämlich wenn $p_n \geq 0$, $\alpha = 0$ sowie entweder $c > 0$ oder aber $c \geq 0$ und $K = 0$ gilt (Satz 2 und 3). — Bei zweiseitigen Abschätzungen in der

Voraussetzung läßt sich mehr aussagen, nämlich Satz 4: Das reguläre Nörlund-Verfahren (N, p_n) limitiere die Folge s . Für geeignete reelle α , c gelte $(H^\alpha - c + 1 H^{\alpha+1}) s = O(1)$. Dann wird s auch von $H^{\alpha+\varepsilon}$ (wo $\varepsilon > 0$ beliebig) limitiert, und zwar zum selben Wert wie von (N, p_n) . — Die Beweise dürften sich vereinfachen lassen, wenn man bekannte Ergebnisse über Einfolgen- und Mehrfolgenverfahren heranzieht [vgl. Ref., Theorie der Limitierungsverfahren (dies. Zbl. 85, 46), S. 48—49]: Das Wirkfeld eines üblichen Nörlundverfahrens kann nur wenige Folgen enthalten, die nicht Abel-limitierbar sind; das Verfahren $(I - c + 1 H)$ ist für $c > 0$ ein Einfolgenverfahren.

K. Zeller.

Parameswaran, M. R.: On a comparison between the Cesàro and Borel methods of summability. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 85—92 (1959).

Die Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen erfülle $n_{k+1} - n_k > \lambda \sqrt{n_k}$ für $k > k_0$ und ein festes $\lambda > 0$; es gebe aber kein $\theta > 0$, so daß $n_{k+1} - n_k > \theta n_k$ für $k > k_1$ gilt. Die Folge sei also vom Euler-Borel-Lückentyp, aber nicht vom Cesàro-Abel-Lückentyp. Dann gibt es eine divergente Reihe $\sum d_n$ mit $d_n = 0$ für $n \neq n_k$, die für jedes $r > 0$ von Cesàro-Verfahren C^r summiert wird, aber nicht vom Borel-Verfahren B summiert wird. Und zwar kann man dabei sowohl Beschränktheit, als auch Unbeschränktheit der Teilsummen von $\sum d_n$ erreichen. — Zum Beweis geht Verf. von einer divergenten C_1 -summierbaren Reihe mit diesen Lücken aus. Dann benutzt er allgemeine Aussagen über Limitierbarkeit beschränkt-divergenter und unbeschränkter Folgen in perfekten (insbesondere lücken-perfekten) Wirkfeldern sowie die Äquivalenz der C^r für beschränkte Folgen.

K. Zeller.

Clunie, J. and P. Vermes: Regular Sonnenschein type summability methods. Acad. roy. Beligiques, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 930—954 (1959).

Ausgehend von einem Funktionselement $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und seinen Potenzen $[f(z)]^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$ ($n = 0, 1, \dots$) betrachtet Sonnenschein (dies. Zbl. 33, 257) das zu der Matrix $(a_{n,k})$ in der Folge-Folge-Form gehörige Limitierungsverfahren. Die Sonnenscheinschen hinreichenden Bedingungen für Permanenz von $(a_{n,k})$ werden anhangsweise leicht umformuliert ($a_k \geq 0$ für $k = 0, 1, \dots$, $a_0 < 1$; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$) und es wird nochmals gezeigt, daß diese Bedingungen Permanenz zur Folge haben. Im Hauptteil der Arbeit knüpfen die Verff. weiterhin an Bajšanski (dies. Zbl. 72, 56) an, der allgemeinere hinreichende Permanenzbedingungen angab. Indem die Verff. zeigen, daß unter der Voraussetzung der Regularität von $f(z)$ in $|z| \leq 1$ eine gewisse der Bajšanskischen Bedingungen auch notwendig ist, erhalten sie ein System von zugleich notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Im einzelnen gelten die Theoreme II und III. Theorem II: Ist (a) $f(z)$ regulär für $|z| < R$ (wobei $R > 1$), (b) $|f(z)| < 1$ für $|z| \leq 1$ ausgenommen eine endliche Anzahl von Punkten $z = \zeta$ mit $|f(\zeta)| = 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = O(1)$ für $n \rightarrow \infty$ genau dann wenn gilt: (c) $\operatorname{Re} A_\zeta \neq 0$ für jedes ζ aus (b), wo $A_\zeta [i(z-1)]^{p(\zeta)}$ das führende Glied in der Taylor-Entwicklung von $h_\zeta(z) = z^{p(\zeta)}$ in der Umgebung von $z = 1$ und $h_\zeta(z) = \frac{f(\zeta z)}{f(\zeta)}$, $\lambda(\zeta) = h'_\zeta(1)$ ist. Theorem III: Gilt (a), so ist die Matrix $(a_{n,k})$ permanent genau dann, wenn entweder $f(z) = z^\nu$ ist für eine natürliche Zahl ν , oder wenn (b) und (c) gelten zusammen mit (d) $f(1) = 1$. Für reelles $t \geq 0$ werde $[f(z)]^t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) z^k$ gesetzt: dabei sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, $a_0 \neq 0$ und $[f(z)]^t$ durch die Forderung $[f(1)]^t = 1$ festgelegt. Theorem IV: Gilt (a), so sind die folgenden Bedingungen notwendig für

die Permanenz des auf $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) s_k$ beruhenden Limitierungsverfahrens: (b), (c), (d) und (e) $f(z) \neq 0$ für $|z| < 1$; hinreichend sind die Bedingungen (b), (c), (d) und (e') $f(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Beispiele, mit Anwendung der betreffenden Verfahren auf die geometrische Reihe, wobei sich interessante Summationsgebiete (z. B. Lemniskaten, Hyperbeln, unzusammenhängende Gebiete) ergeben. In einem der Beispiele wird der Permanenzbeweis direkt geführt, d. h. ohne den (nicht ganz einfach zu beweisenden) Permanenzsatz von Bajšanski zu benutzen. Ungelöst sind einige Fragen, die die möglichen Werte von p bei permanenten Verfahren betreffen.

W. Meyer-König.

Sonnenschein, J.: Sur une classe de procédés de sommation issus de la transformation de Laplace. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 923—929 (1959).

Vorausgehende Literatur: Verf., dies. Zbl. 50, 286. Das dort betrachtete Limitierungsverfahren wird neu dargestellt und weiter untersucht. $f(s)$ sei eine komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen $s = x + iy$, regulär in der Halbebene $x > -\lambda$ ($\lambda > 0$). Dabei sei $f(x) = e^{q(x)}$ positiv und $-q'(x)$ vollständig monoton für reelles $x > -\lambda$; $f(s) = O(|s|^{-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) für $|s| \rightarrow \infty$ in der Halbebene $x > -\lambda$; $f(0) = 1$. Der Kern $H(t, \alpha)$ wird nun definiert durch

$$H(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [f(s)]^{\alpha} e^{st} ds \quad \text{oder} \quad [f(s)]^{\alpha} = \int_0^{\infty} H(t, \alpha) e^{-st} dt.$$

Es ist dann $H(t, \alpha) \geq 0$ für jedes $\alpha > 0$ und fast überall auf der Halbgeraden $t \geq 0$. Das zu $H(t, \alpha)$ gehörige Limitierungsverfahren in der Folge-Folge-Form

ersetzt $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t)$ durch $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi(\alpha)$, wobei $\psi(\alpha) = \int_0^{\infty} H(t, \alpha) \chi(t) dt$. Es wird gezeigt, daß dieses Verfahren permanent ist. Beispiel: $f(s) = \lambda(\lambda + s)^{-1}$; das zugehörige

Verfahren summiert $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$ zum Wert $\frac{1}{s}$ im Durchschnitt der Halbebene $x > -\lambda$ mit dem Kreisäußeren $|s + \lambda| > \lambda$.

W. Meyer-König.

Ogieveckij, I. I.: Die Summierung von Doppelreihen mit den Methoden von Cesàro und Abel im engeren Sinne. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 6 (84), 119—125 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht die Summierung von Doppelreihen $\sum a_{ij}$. Er betrachtet das Cesàro-Verfahren (C, α, β) (wo $\alpha, \beta > -1$), das Abel-Verfahren A , sowie die restringierten Formen $(C_{\lambda}, \alpha, \beta)$ bzw. A_{λ} dieser Verfahren (wobei der Grenzübergang in der Transformierten unter einer λ -Einschränkung für die beiden Parameter vorgenommen wird). — Satz 1 und 2: Aus (C, α, β) -Beschränktheit und $(C_{\lambda}, \alpha, \beta)$ -Summierbarkeit folgt $(C_{\lambda}, \alpha + \eta, \beta + \delta)$ -Summierbarkeit (wo $\eta, \delta > 0$ beliebig) und A_{λ} -Summierbarkeit. — In der Variante Satz 3 treten in der Voraussetzung zwei verschiedene C -Verfahren auf. In Satz 4 wird aus $(C_{\lambda}, \alpha, \beta)$ -Summierbarkeit auf A_{λ} -Summierbarkeit geschlossen, wenn die C -Mittel folgenden Bedingungen genügen: $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(n^{\delta})$, $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(m^{\gamma})$, $|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| \leq C$ für $m > M$, $n > M$; dabei wird $\delta < \alpha + 1$ gefordert, im Falle $\delta = \alpha + 1$ bzw. $\gamma = \beta + 1$ ist in der ersten bzw. zweiten Bedingung O durch o zu ersetzen.

K. Zeller.

Bellman, Richard: The expansions of some infinite products. Duke math. J. 24, 353—356 (1957).

The author gives a formal derivation of the identity

$$\prod_{h,l=1}^{\infty} \{(1 - x^h y^l) (1 - x^h y^l z)^{-1}\} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{b_{kl}}{(1 - x^k y^l z)},$$

where $|x|$ and $|y| < 1$ and $\log x / \log y$ has no rational value and

$$b_{KL} = \prod_{k,l=1}^{K-1, L-1} (1 - x^{-k} y^{-l}) \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=0}^{L-1} (1 - x^{-k} y^{-l})^{-1} \prod_{k=0}^{K-1} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - x^{-k} y^l)^{-1}.$$

die Lagrangesche und die Darboux'sche Reihenentwicklung erhalten sowie die Formel der Partialbruchentwicklung einer gebrochenen rationalen Funktion beweisen.

B. Svenson.

Strodt, Walter: Remarks on the Euler-Maclaurin and Boole summation formulas. Amer. math. Monthly 67, 452—454 (1960).

"In brief, the essential step in passing from Taylor's formula to the Euler-Maclaurin formula, or to the Boole formula, is the replacement of each derivative at a by the integral average of the derivative over $[a, a+1]$, or by the arithmetic average of the values of the derivative at the points a and $a+1$."

B. Kjellberg.

Buchwalter, Henri: Saturation dans un espace normé. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 651—653 (1960).

Es sei E ein normierter Raum, E' sein dualer Raum. In E und E' seien Elemente $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ gegeben, welche ein Biorthogonalsystem bilden. Außerdem seien die Linearkombinationen der e_i dicht in E und aus $f_i(x) = 0$ für $i = 1, 2, \dots$ folge $x = \theta$. Mit der starken Topologie in E' werde die abgeschlossene Hülle $\bar{Q} = F$ der linearen Hülle Q der f_i gebildet. F' sei der duale Raum zu F . Schließlich gebe es ein $a > 0$, so daß für alle $x \in E$ gilt $\|x\|_E \leq a \|x\|_{F'}$. Zu jedem $x \in E$ gibt es eine Fourierreihe $x \sim \sum \langle x, f_i \rangle e_i$ und ein Summationsverfahren Γ sei gegeben durch Zahlen γ_ω^i mit $\sum \gamma_\omega^i \langle x, f_i \rangle e_i \sim \Gamma_\omega(x) \in E$ für jedes $x \in E$. Es werden nur Verfahren betrachtet, zu denen es eine Funktion $\varrho(\omega) > 0$ $\varrho(\omega) \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow \infty$) und Zahlen $\lambda_i \neq 0$ gibt mit $(1 - \gamma_\omega^i)/\varrho(\omega) \rightarrow \lambda_i$ ($\omega \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots$). Nun gilt: Aus $\|x - \Gamma_\omega(x)\| = o(\varrho(\omega))$ folgt $x = \theta$. Die Menge der $x \in E$ mit $\|x - \Gamma_\omega(x)\| = O(\varrho(\omega))$ heißt Klasse der Saturation $\Sigma(\Gamma)$ von Γ . Für jedes $x \in \Sigma(\Gamma)$ ist $X_\omega = \varrho(\omega)^{-1}(x - \Gamma_\omega(x))$ in F' schwach konvergent gegen ein Element $X \in F'$, definiert durch $\langle X, f_i \rangle = \lambda_i \langle x, f_i \rangle$. Unter gewissen Einschränkungen über Γ ist $\Sigma(\Gamma)$ die lineare Menge der $x \in E$ mit $\sum \lambda_i \langle x, f_i \rangle e_i \sim X \in F'$. Die Klasse $\Sigma(\Gamma)$ wird bei einigen Verfahren (Riemann, Riesz, Nörlund) und gewissen Räumen E und Folgen $e_i = f_i = \begin{cases} \sin i x \\ \cos i x \end{cases}$ bestimmt.

A. Peyerimhoff.

Olevskij (Olevskii), A. M.: Unconditional summability of function series. Doklady Akad. Nauk SSSR 125, 269—272 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet Toeplitzsche Limitierungsverfahren T und Reihen $\sum a_n(x)$, deren Glieder meßbare und fast überall endliche Funktionen sind. Eine solche Reihe heißt unbedingt T -summierbar f. ü. auf E , wenn jede Umordnung der Reihe von T für fast alle $x \in E$ summiert wird (die Ausnahmемenge darf von der Umordnung abhängen). Man fragt, wann der Schluß von unbedingt T -Summierbarkeit f. ü. auf unbedingte Konvergenz f. ü. (jeweils auf der Menge E) zulässig ist. Es zeigt sich, daß dabei die Ausnahmestellung der Reihe $1 + 1 + 1 + \dots$ eine entscheidende Rolle spielt. — Satz 1. Ist $\sum a_n(x)$ unbedingt T -summierbar f. ü. auf E , so gilt eine Zerlegung $a_n(x) = f(x) + \alpha_n(x)$, wobei $\sum \alpha_n(x)$ unbedingt konvergiert f. ü. auf E . Limitiert T die Reihe $1 + 1 + 1 + \dots$, so kann f eine beliebige Funktion sein, andernfalls muß f fast überall auf E verschwinden. — Das charakterisiert die Verfahren T , für die der obengenannte Schluß zulässig ist (Satz 2). Im Sonderfall einer Orthonormalreihe $\sum c_n \varphi_n(x)$ (orthonormal in $[0, 1]$) ist der Schluß jedoch bei beliebigem T zulässig, wenn $\sum c_n^{-2} = \infty$ gilt; letztere Bedingung ist genau (Satz 3 und 4). Vier weitere Sätze betreffen Orthonormalsysteme mit $|\varphi_n(x)| < M$ und den Sonderfall $E = [0, 1]$, ferner vollständige Orthonormalsysteme sowie unbedingte Summierbarkeit auf einer Menge positiven Maßes.

K. Zeller.

Talaljan, A. A.: Über die Konvergenz fast überall von Teilfolgen der Partialsummen allgemeiner Orthogonalreihen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 3, 17—34 (1957) [Russisch].

Alle im folgenden vorkommenden Funktionen seien in $[0,1]$ erklärt und meßbar. Ein System $\{f_n\}$ fast überall endlicher Funktionen heißt vollständig im Sinne der fast überall Konvergenz (kurz: v. f. ü.), wenn es zu jedem f eine Folge L_k von Linearkombinationen der f_n mit $L_k(x) \rightarrow f(x)$ f. ü. gibt. Nach Satz 2 ist ein System genau dann v. f. ü., wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $E \subset [0,1]$ mit $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ gibt, so daß $\{f_n\}$ vollständig in $L_2(E)$ ist. Satz 3 besagt: Ist ein System v. f. ü., so kann man daraus beliebige endlich viele und geeignete abzählbar viele Funktionen entfernen, ohne die Eigenschaft v. f. ü. zu zerstören. Das wichtigste Ergebnis ist in Satz 4 enthalten: Zu jedem v. f. ü. System $\{f_n\}$ gibt es reelle Zahlen a_n , so daß die Reihe $\sum a_n f_n(x)$ universell ist. Letzteres bedeutet: Zu jedem f gibt es eine Teilfolge der Teilsummen der Reihe, die f. ü. gegen f konvergiert. Es ist nicht immer möglich (selbst bei orthonormierten f_n), die a_n als Nullfolge zu wählen. Jedoch geht das, wenn die f_n ein vollständiges Orthonormalsystem bilden (Satz 1). Das verschärft ein Ergebnis von Marcinkiewicz (dies. Zbl. 19, 14), der nur Zahlen a_n (nicht alle gleich Null) erhält, so daß eine Teilfolge der Teilsummen von $\sum a_n f_n(x)$ f. ü. gegen Null strebt.

K. Zeller.

Ciesielski, Z. and J. Musielak: On absolute convergence of Haar series. Colloquium math. 7, 61—65 (1959).

Für Orthogonalentwicklungen nach dem Haarschen System $\{\chi_n(t)\}$, $a_n = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt$ untersuchen die Verff. die Konvergenz von (1) $\sum |a_n \chi_n(t)|$ und (2) $\sum |a_n|$ als Folge von Bedingungen über den Stetigkeitsmodul (auch in integrierter Form) von $f(t)$. Die Konvergenz von (1) bzw. (2) folgt z. B., wenn $f(t)$ eine Lipschitzbedingung einer Ordnung > 0 bzw. $> \frac{1}{2}$ erfüllt. Anschließend wird noch eine Voraussetzung über die beschränkte Variation von $f(t)$ hinzugenommen. Schließlich werden noch zwei entsprechende Sätze für Rademacherfunktionen ausgesprochen.

A. Peyerimhoff.

Weston, J. D.: An inequality for the Fourier coefficients of a nonnegative function. Amer. math. Monthly 66, 223—224 (1959).

Verf. zeigt: Ist

$$g(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}, \quad g(\theta) \geq 0, \quad \text{so ist} \quad c_0^2 + c_0 |c_{2n}| \geq 2 |c_n|^2.$$

Zum Beweis wird durch direktes Ausrechnen gezeigt, daß $c_0^2 + c_0 \Re(e^{2in\alpha} c_{2n}) - 2 |c_n|^2 \geq 0$ ist für α reell, $e^{in\alpha} c_n$ reell.

A. Peyerimhoff.

Szegő, G.: Concerning the Fourier coefficients of a nonnegative function. Amer. math. Monthly 67, 365—366 (1960).

Verf. gibt einen neuen Beweis für eine Ungleichung von J. D. Weston (vgl. das vorangehende Referat). Ist $g_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} g\left(\theta + \frac{2\pi\nu}{n}\right)$, so ist $g_n(\theta) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{imn\theta}$, so daß es genügt $c_0^2 + c_0 |c_2| \geq 2 |c_1|^2$ nachzuweisen. Dies läßt sich aus der Positivität der Fejérform $\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) |u_0 + u_1 e^{i\theta} + u_2 e^{2i\theta}|^2 d\theta$ (bei u_2 muß $e^{2i\theta}$ stehen) ablesen.

A. Peyerimhoff.

González-Fernández, J. M.: Integrability of trigonometric series. Proc. Amer. math. Soc. 9, 315—319 (1958).

$$\text{Ist } \lambda_n \geq 0, \quad n \geq n_0, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n = \sum_1^\infty n^2 \lambda_n = \dots = \sum_1^\infty n^{2j} \lambda_n = 0 \quad \text{für ein ganzes}$$

$j > 0$, $f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx$, so ist für $2j+1 - \gamma < 2(j+1) + 1$ bzw. $\gamma = 2j+1$ genau dann $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, 2\pi)$, wenn $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ bzw. $\sum n^{\gamma+1} \lambda_n \log n$

konvergiert. Ein entsprechender Satz gilt für Reihen $\sum \lambda_n \sin nx$. Boas und der Verf. haben früher ein analoges Ergebnis für Potenzreihen bewiesen (dies. Zbl. 77, 60).

A. Peyerimhoff.

Gosselin, Richard P.: On the divergence of Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 9, 278—282 (1958).

Verf. zeigt, daß für jede Folge ganzer Zahlen $p_n \nearrow \infty$ ein $f \in L(0, 2\pi)$ konstruiert werden kann, so daß die Teilsummen $s_{p_n}(x)$ der Fourierreihe von f fast überall divergieren. Der Beweis beruht auf einer Modifikation des Beispiels von Kolmogorov.

A. Peyerimhoff.

Tandori, Károly: Bemerkung zur Divergenz der trigonometrischen Reihen. Acta Sci. math. 20, 25—32 (1959).

Verf. gibt einen neuen und einfacheren Beweis für den Satz von Kolmogorov-Steckin (Steckin, dies. Zbl. 79, 293): Ist $0 < \varrho_n \searrow$, $\sum \varrho_n^2 = \infty$, so gibt es eine Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, so daß die trigonometrischen Reihen $\sum \varrho_n \cos n(x - \lambda_n)$, $\sum \varrho_n \sin n(x - \lambda_n)$ überall divergieren.

A. Peyerimhoff.

Pati, T.: On the absolute Cesàro summability of Fourier series of functions of Lebesgue class L^p and some related problems in the theory of Fourier constants. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 47, 181—195 (1959).

The author proves that $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} |c_n| < \infty$ where $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, provided that $f(e^{i\theta}) \theta^{\delta-1/p} (\log(k/\theta))^{\alpha} \in L^p$ where $\alpha > 1/q$, $k > \pi$, $\delta > 1/p$, $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$. The method of proof is inspired from the paper of Tsuchikura on the absolute Cesàro summability (this Zbl. 51, 302, 57, 301). G. Sunouchi.

Pati, T.: On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J. London math. Soc. 34, 153—160 (1959).

Analog zu einem Satz von E. Hille und J. D. Tamarkin (dies. Zbl. 5, 291) wird gezeigt, daß jedes Nörlundverfahren mit $0 < p_n \searrow$, $P_n = p_0 + \dots + p_n \rightarrow \infty$.

$$\left\{ \frac{(n+1)p_n}{P_n} \right\} \in BV, \quad \left\{ \sum_{\nu=0}^n \frac{(\nu+1)^{-1} p_{\nu}}{P_n} \right\} \in BV$$

„Fouriereffektiv“ ist (d. h. für Funktionen von beschränkter Schwankung ergibt sich absolute Nörlund-Summierbarkeit). Es wäre zu erklären, ob die Überlegungen von J. Karamata (dies. Zbl. 65, 55) auch in diesem Fall angewandt werden können.

A. Peyerimhoff.

Izumi, Shin-ichi and Masako Satô: Fourier series. VIII: Absolute Riesz summability. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I 13, 130—144 (1957).

$\sum a_n$ heißt $|R, \lambda(n), \delta|$ -summierbar, wenn

$$\sum_{\omega=2}^{\infty} \frac{\lambda(\omega)}{(\lambda(\omega))^{\delta+1}} \left| \sum_{n=2}^{\omega-1} \lambda(n) (\lambda(\omega) - \lambda(n))^{\delta-1} a_n \right| < \infty.$$

Sei $S(f)$ die Fourierreihe von f . Mit elementaren Hilfsmitteln wird bewiesen: 1. Ist $0 < \delta = 1 - \alpha < 1$, $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^{\pi/n} (f(\xi + t) - f(\xi - t)) dt = O(1/n^{1+\alpha} (\log n)^{1+\alpha+\varepsilon})$$

gleichmäßig in ξ und $\int_0^{\pi/n} (f(x) - f(x+t)) dt = O(1/n^{1+\alpha} (\log n)^{\alpha+\varepsilon})$ für festes x ,

dann ist $S(f) |R, \log n, \delta|$ -summierbar in x . 2. Ist $\lambda(n) = e^{\mu(n)}$ monoton wachsend und differenzierbar, $A\mu(n) \leq \mu(2n) \leq B\mu(n)$, $n(\mu(n))^{\delta} \uparrow$ ($0 < \delta < 1$), $\mu'(n) \downarrow$,

$$M(n) = \max_{-\pi \leq \xi \leq \pi} \left| \int_0^{\pi/n} (f(\xi + t) - f(\xi - t)) dt \right|, \quad \varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(t)|}{t^2} \left(\mu' \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{\delta} dt < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n \log n (\mu'(n))^{\delta} M(n) < \infty, \quad \text{dann ist } S(f)$$

$R, \lambda(n), \delta$ -summierbar in x . 3. Ist $\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt < \infty$ und $\sum_{n=1}^\infty n^{1-\delta} M(n) < \infty$

($0 < \delta < 1$), dann ist $S(f) |C, \delta|$ -summierbar in x .

G. Goes.

Ishiguro, Kazuo: Fourier series. XV: Gibbs' phenomenon. Proc. Japan Acad. **33**, 119—123 (1957).

Let $f(x) = a\psi(x - \xi) + g(x)$ be L -integrable on $\langle 0, 2\pi \rangle$ and of period 2π , where $a > 0$ and $\psi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ on $(0, 2\pi)$. Suppose further that

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \xi + 0} g(x) \geq -a\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \xi + 0} g(x) = 0, \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow \xi - 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \xi - 0} g(x) \leq a\pi.$$

$$(iii) \quad \int_0^x g(\xi + u) du = o(|x|), \quad \int_0^x (g(t + u) - f(t - u)) du = o(|x|)$$

uniformly for small $|t - \xi|$. Then the (C, r) -means of the Fourier series of f at ξ show a Gibbs' Phenomenon for $0 < r < r_0$, but not for $r \geq r_0$, where r_0 is the familar constant of Cramér. (Cf. same author, this Zbl. **73**, 55.)

W. W. Rogosinski.

Izumi, Shin-ichi and Masako Satô: Fourier series. XVI: The Gibbs phenomenon of partial sums and Cesàro means of Fourier series. 1. Proc. Japan. Acad. **33**, 284—288 (1957).

I. Wenn die Bedingung $\int_0^h [f(x + u) - f(x - u)] du = o(h/\log 1/h)$ gleichmäßig in x erfüllt ist, weisen die Teilsummen der Fourierschen Reihe von $f(t)$ die Gibbssche Erscheinung (G. E.) in keinem Punkte auf. Die Verff. beweisen diesen Satz und damit zugleich ihren früheren Satz (dies. Zbl. **73**, 54) über die Existenz einer Funktion, welche bei $t = \xi$ die G. E. nicht aufweist und bei $t = \xi$ eine Unstetigkeit 2. Art besitzt, sowie einen Satz von R. Salem (dies. Zbl. **57**, 52) und von Satô (dies. Zbl. **72**, 61). II. Wenn die Bedingung $\int_0^h [f(x + u) - f(x - u)] du = o(h)$ gleichmäßig in x erfüllt ist, so weisen

die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe von $f(t)$ von positiver Ordnung die G. E. bei $t = 0$ nicht auf. Mit Hilfe dieses Satzes gewinnen die Verff. einen neuen Zugang zu einem früheren Ergebnis von K. Ishiguro (Referat vorstehend). Danach gibt es Funktionen $f(t)$ derart, daß ihre Teilsummen $s_n(x, f)$ zwar die G. E. aufweisen, daß es aber ihre Cesàroschen Mittel $\sigma_n^r(x, f)$ für keine positive Ordnung r tun. Andererseits zeigte Kuttner (dies. Zbl. **60**, 183), daß es zu jeder Ordnung r mit $0 < r < 1$ eine Funktion $f(t)$ gibt, deren Cesàrosche Mittel $\sigma_n^r(x, f)$ die G. E. aufweisen. Die Kuttnersche Beispielfunktion war unbeschränkt. In Ergänzung hierzu zeigen die Verff. die Existenz einer beschränkten Funktion $f(t)$, deren Cesàrosche Mittel $\sigma_n^r(x, f)$ für jedes r mit $0 \leq r < 1$ bei $x = 0$ die G. E. aufweisen.

V. Garten.

Izumi, Shin-ichi and Masako Satô: Fourier series. XVI: The Gibbs phenomenon of partial sums and Cesàro means of Fourier series. 2. Proc. Japan Acad. **33**, 289—292 (1957).

Diese Note bildet das Schlußstück der vorstehend referierten Arbeit und bringt noch den Beweis zweier darin dargestellten Sätze.

V. Garten.

Korovkin, P. P.: Über eine asymptotische Eigenschaft der positiven Summationsmethoden für Fourierreihen und über die beste Approximation der Funktionen der Klasse Z_2 durch lineare positive polynomische Operatoren. Uspechi mat. Nauk **13**, Nr. 6 (84), 99—103 (1958) [Russisch].

Sei

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \varrho_k^{(n)} \cos kt \geq 0 \quad \text{und} \quad L_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_n(t) dt.$$

Verf. zeigte früher (dies. Zbl. **50**, 340): Gilt $\varrho_1^{(n)} \rightarrow 1$, so konvergiert $L_n(f, x)$ für jedes $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Jetzt untersucht er, wann die Konvergenzgeschwin-

digkeit nur von der verallgemeinerten zweiten Ableitung in x abhängt, d. h. wann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(f, x) - f(x)}{L_n(\varphi, x) - \varphi(x)} = \frac{D_2 f(x)}{D_2 \varphi(x)}$$

gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \varrho_2^{(n)}}{1 - \varrho_1^{(n)}} = 4$ gilt (Satz 1). — Sei Z_2 die Menge der periodischen Funktionen f mit $|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq t^2$. Er setzt

$$a_n = \sup_{f \in Z_2} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |L_n(f, x) - f(x)| \text{ und } b_n = \inf a_n,$$

letzteres genommen über alle zulässigen u_n . Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n = \frac{1}{2} \pi^2$ (Satz 2).
K. Zeller.

Matthies, K. and D. Mazkewitsch: Developments of $\sin^a x$ into Fourier series. Amer. math. Monthly 67, 52—54 (1960).

Entwicklung der genannten Funktion für $a > -1$ in Fourierreihen, die nur Sinus- bzw. nur Kosinustglieder enthalten.
E. Kreyszig.

Funktionentheorie:

Vostrecov, B. A. und A. V. Ignat'eva: Zur Frage der Geschwindigkeit der Approximation analytischer Funktionen auf beliebigen Kontinuen. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenje Zapiski 57, Trudy Kafedr Mat. 4, 45—50 (1957) [Russisch].

Let E be a bounded continuum of capacity 1 whose complementary domain $CE = D$ is simply connected. Let $z = \varphi(w)$ be the conformal mapping of $|w| > 1$ onto CE and L_h the map of the circle $|w| = 1 + h$, $h > 0$. If $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_h} \frac{F(t)}{t-z} dt$ and r, ϱ arbitrary numbers such that $0 < r < \varrho < h$ then

$$\varrho_n(f, D_r) < C_1 \int_{L_h} |F(t)| |dt| \frac{1}{\varrho h (\varrho - r)^2 (h - \varrho)} \cdot \left(\frac{1 + \varrho}{1 + h} \right)^n$$

and in particular

$$\varrho_n(f, E) < C_2 \int_{L_h} |F(t)| |dt| \frac{n^5}{(1+h)^n} \text{ where } \varrho_n(f, E) = \inf_{z \in E} \max_{P \in \mathcal{P}_n} |f(z) - P(z)|$$

for all polynomials $P(z)$ of degree n .

J. Górski.

Fichera, Gaetano: Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 27, 193—201 (1959).

Sia $\alpha(I)$ una misura complessa definita sul semi-anello $\{I\}$ degli intervalli superiormente aperti contenuti nell'intervallo $0 \leq s \leq L$; $V_\alpha(I)$ la variazione totale di $\alpha(I)$; $\sigma(I)$ la misura lebesguiana di I ; $\varphi(s)$ la derivata di $\alpha(I)$ rispetto a $\sigma(I)$. L'A. dimostra che data al arbitrio una costante complessa c , esiste insieme N in $(0, L)$, di misura nulla tale che $\lim_{I \rightarrow s} \left[\frac{V_{\alpha - c\sigma}(I)}{\sigma(I)} \right] = |\varphi(s) - c|$, per ogni s non appartenente ad N , e questo insieme può essere scelto indipendente da c . I punti di $(0, L) - N$, sono chiamati dall'A. i punti di Lebesgue per α . D'altra parte, sia Σ una curva di Jordan chiusa provvista di tangente variabile con continuità uniformemente hölderiana di esponente q ; $K(z, \zeta)$ una funzione complessa definita su $\Sigma \times \Sigma$, continua per $z = \zeta$ e tale che $K(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{-k})$ ($0 \leq k \leq 1$), una misura definita sugli archi I di Σ . Si dimostra che se z è un punto di Lebesgue per α , allora $K(z, \zeta)$ è una funzione di ζ , α -sommabile su Σ . Questi due proposizioni servono per stabilire notevole relazione di limite (uniforme) di alcune integrale che permettono generalizzare la teoria puntuale e integrale del potenziale logaritmico sulla quale, alla sua volta, si fonda la possibilità di approssimare le funzioni, olomorfe con

funzioni razionale nel caso più generale in cui le singolarità assegnate possono trovarsi sulla frontiera del campo di olomorfia.

J. M^a. Orts.

Falgas, Maurice: Sur la définition des séries de base de polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 43—45 (1960).

Come prosecuzione dei risultati esposti in un precedente lavoro (questo Zbl. **89**, 48) si fa osservare che la definizione di serie di base di polinomi dovuta a Whittaker, si può dedurre considerando lo spazio vettoriale \mathcal{O} delle funzioni olomorfe f e il filtro elementare associato sul spazio vettoriale dei polinomi \mathcal{P} alla successione (s_n) delle somme parziali dello sviluppo di f . Altresì, considerando lo spazio vettoriale \mathcal{O}_{Δ_i} delle funzioni olomorfe in un dominio Δ_i e nulle su $\mathbb{C}\Delta_i$ e la somma \mathcal{O}_{Δ} degli \mathcal{O}_{Δ_i} , provvista della topologia compatta; e d'altra parte lo spazio vettoriale \mathcal{O}_D delle funzioni olomorfe in un dominio D , l'A. enuncia alcune notevoli proposizioni che permettono caratterizzare le applicazioni lineari continue di \mathcal{O}_{Δ} in \mathcal{O}_D , attraverso le applicazioni di \mathcal{P} in \mathcal{P} definite dalle serie doppia $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm} T^n z^m$. Questi risultati sono tanto più importanti, quanto conducono a ritrovare le condizioni ammesse a priori da R. C. Buck e R. P. Boas.

J. M^a. Orts.

Macintyre, Sheila Scott: μ -transforms and interpolation series: Abel's series. Proc. London math. Soc., III. Ser. **8**, 481—492 (1958).

Eine ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus kann durch ein Integral von der Gestalt (*) $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} e^{z\zeta} f(\zeta) d\zeta$ dargestellt werden. Verf. bemerkte beim Studium der Newtonschen Reihen (dies. Zbl. **58**, 298), daß man schärfere Resultate erreichen kann, wenn man in (*) den Kern $e^{z\zeta}$ durch diejenigen Funktionen von z und ζ ersetzt, welche man aus ihm durch Riemann-Liouvillesche Differentiation gebrochener Ordnung in bezug auf $e^{\zeta} - 1$ erhält. In der vorliegenden Arbeit wird derselbe Gedanke auf die Abelsche Reihe

$$F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z-n)^{n-1}}{n!} \right] F^{(n)}(n)$$

angewendet, wobei als Kern Funktionen von z und ζ dienen, welche sich aus $e^{z\zeta}$ durch Differentiation gebrochener Ordnung in bezug auf ζe^{ζ} ergeben.

E. Lammell.

Touchard, Jacques: Sur quelques séries de Lambert et de Dirichlet. Canadian J. Math. **12**, 1—19 (1960).

Sia $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) x^n$ una serie convergente, ove $\chi(n)$ è una funzione aritmetica completamente moltiplicativa, cioè $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$; considerando una serie dalla forma: $G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A(x^k) A(y^k)$, si dimostra che:

$$G(x, y) = a_1 \gamma(x, y) + \dots + \left[\sum_{d|n} a_d \chi^2 \left(\frac{n}{d} \right) \right] \gamma(x^n, y^n) + \dots$$

essendo $\gamma(x, y) = \sum_{(l, m)=1}^{\infty} \chi(lm) x^l y^m$, ($l, m = 1, 2, 3, \dots$ e primi fra di loro). La formola si stende al caso di più variabili. Valendosi dalla corrispondenza $x^n \rightarrow n^{-s}$, $y^n \rightarrow n^{-s'}$, che permette il passaggio delle serie di potenze alle serie Dirichlet; facendo:

$$X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^s}, \quad X_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^a(n)}{n^s} \dots$$

ed osservando che le serie di Dirichlet corrispondenti a $G(x, y)$ e $\gamma(x, y)$ sono rispettivamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{X(s) X(s')}{k^s k^{s'}} = X(s) X(s') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{s+s'}}, \quad \text{e} \quad \xi(s, s') = \sum_{(l, m)=1}^{\infty} \frac{\chi(lm)}{l^s m^{s'}}$$

si dimostra la relazione: $\xi(s, s') = X(s) X(s') / X_2(s + s')$ che si stende anche al caso di tre o più argomenti. In particolare, se si prende come funzione $\chi(n)$ un carattere di Dirichlet reale di periodo 2ω , dato che $\chi(n)$ si riduce allora al simbolo di Jacobi $\left(\frac{D}{n}\right)$ i polinomi $g(x) = \sum_{(\mu, 2\omega)=1} \chi(\mu) x^\mu$, ($\mu < 2\omega$) sono tali che per $\varrho = \exp(\pi i/\omega)$

si ha: $g(\varrho^a) = \chi(a) g(\varrho)$ da cui segue questo risultato: Se il periodo è multiplo di 4, $g(x)$ ammette tutte le radici non primitive di $x^{2\omega} - 1 = 0$; ma si $2\omega = 2(2p + 1)$, $g(x)$ ammette tutte le radici non primitive di $x^{2\omega} - 1 = 0$, eccezione fatta di quelle che sono primitive di $x^\omega - 1 = 0$. Questo notevole conclusione serve di base al A. per stabilire nuove proprietà delle somme di Ramanujan $c_q(m) = \sum_{(\mu, q)=1} \exp\left(\frac{2\pi i \mu m}{q}\right)$.

D'altra parte, l'applicazione dei risultati ottenuti nella prima parte di questo lavoro alle serie di Lambert dal tipo:

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{g(x^k)}{1 - x^{2\omega k}} \frac{g(y^k)}{1 - y^{2\omega k}}$$

permette determinare la somma di alcune serie analogue alle di Ramanujan ed calcolare certe integrali definite generalizzando la trasformazione della integrale di Abel dovuta a Schlömilch.

J. M. Orts.

Mitrović, Dragiša: Une application de certaines inégalités de Turán. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 14, 241—245 (1959).

Den Wertevorrat aller Ableitungen einer Dirichletreihe $h(s)$ auf einer Geraden $\sigma > \sigma_1$ (abs. Konv.-Abszisse) zu erforschen, ist das Ziel dieser Arbeit. Wichtiges methodisches Hilfsmittel ist ein Satz von Turán, der bei geeigneten t eine Abschätzung der Dirichletreihe nach unten erlaubt. Ein Ergebnis:

$$\limsup |h^{(k)}(\sigma + it)| = \sum |b_n| (\mu_n)^k e^{-\mu_n \sigma} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Dabei ist $h(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s}$ und $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots \rightarrow \infty$, sowie jede endliche Menge der μ linear unabhängig im rationalen Zahlkörper.

G. Hoheisel.

Ul'janov (Uljanov), P. L.: On A -integrals of Cauchy for contours. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 383—385 (1957) [Russisch].

The author extends the notion of A -integrability from the real line to line integrals (cf. this Zbl. 57, 302; 65, 298). Let $C: \zeta = \tau(s) = \tau_1 + i \tau_2$, $\zeta_0 = \tau(0)$, $0 \leq s \leq l_0$, where s is the arc length. A function $f(\zeta) = f_1(s) + i f_2(s)$ defined on C is called A -integrable on C if the functions

$$\varphi_1(s) = f_1(s) \tau'_1(s) - f_2(s) \tau'_2(s) \quad \varphi_2(s) = f_2(s) \tau'_1(s) + f_1(s) \tau'_2(s)$$

are A -integrable on $0 \leq s \leq l_0$. The complex number

$$I = (A) \int_0^{l_0} \varphi_1(s) ds + i (A) \int_0^{l_0} \varphi_2(s) ds$$

is called the A -integral of $f(\zeta)$ and is written $I = (A) \int_C f(\zeta) d\zeta$. The main result

announced is that if an analytic function $F(z)$ is representable as an L -integral of Cauchy type, then it is a Cauchy A -integral; a weaker form of this result was given earlier by the author (this Zbl. 72, 70). The author announces the further result that if the analytic function $F(z)$ is an L -integral of Cauchy type in G , and if $\beta(z)$ is bounded and analytic in G , then $(A) \int_C F_i(\zeta) \beta(\zeta) d\zeta = 0$, where $F_i(\zeta)$ denote the

boundary values of $F(z)$ from the interior. In particular, if $\beta(z) = z^n$, then the moments $(A) \int_C F_i(\zeta) \zeta^n d\zeta = 0$ for $n = 0, 1, 2, \dots$

A. J. Lohwater.

Carleson, Lennart: A representation formula for the Dirichlet integral. Math. Z. 73, 190—196 (1960).

Es sei $f(z)$ in $|z| < 1$ analytisch und das über dieses Gebiet erstreckte Dirichlet-integral $D(f) = \iint |f'(z)|^2 dx dy$ endlich. Ferner habe man für f die Darstellung

$$f(z) = a z^m \prod_1^{\infty} \frac{z_\nu - z}{1 - \bar{z}_\nu z} \frac{\bar{z}_\nu}{|z_\nu|} \exp \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \left[\frac{\log |f(e^{i\varphi})|}{2\pi} d\varphi - ds(\varphi) \right] \right\},$$

wobei s singular und nichtabnehmend ist. Verf. leitet eine Formel ab, durch welche sich $D(f)$ aus lauter Integrationen über den Gebietsrand ergibt. Im Integranden tritt hierbei die gegebene Funktion lediglich als durch $|f(e^{i\varphi})|$, $s(\varphi)$, m und die Zahlen z_ν vertreten auf.
G. af Hällström.

Sharma, A.: Remark on a theorem of Cinquini. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **11**, 93—96 (1960).

The author gives a mean value theorem (involving the third derivative) for complex functions, analytic in a circle.
B. Kjellberg.

Singh, S. K.: Sur quelques applications des ordres approchés. Bull. Sci. math., II. Sér. **84**, 11—16 (1960).

Some relations between $n(r)$, $N(r)$, $M(r)$ and $T(r)$ are given for entire functions.
B. Kjellberg.

Kas'janjuk, S. A.: Über Funktionen der Klassen A und \mathcal{H}_δ im Kreisring. Mat. Sbornik, n. Ser. **42** (84), 301—326 (1957) [Russisch].

The author's purpose is to carry over to the case of functions analytic (or meromorphic) in an annulus various results which follow directly from the Poisson-Jensen formula in the case of the circle. To do this, one must naturally have an analogue for the annulus of the Poisson-Jensen formula; such an analogue has been furnished by V. Zmorovič [Izvestija Kievsk. polytechn. Inst. **15**, 126—148 (1954)]. The author constructs the analogue of the Blaschke product, called here a Blaschke primitive, and defines the classes A and \mathcal{H}_δ as follows: A function $f(z)$, regular in $r < |z| < R$ is of class A if

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(\varrho e^{i\vartheta})| d\vartheta < K_A(f) < \infty, \quad r < \varrho < R,$$

and of class \mathcal{H}_δ if

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varrho e^{i\vartheta})|^\delta d\vartheta < K_H(f) < \infty, \quad r < \varrho < R.$$

It is shown that the zeros of a function of one of these classes may be factored out by means of the Blaschke primitive; the rate of growth of the moduli of such functions is also discussed. It must be pointed out that, in a recent communication (reviewed below), the author has indicated that Theorems 1, 2, and 3 of this paper cannot be based on (1. 5) and (1. 6). Theorem 4 must be reformulated.
A. J. Lohwater.

Kas'janjuk, S.: Ein Brief an die Redaktion. Mat. Sbornik, n. Ser. **47** (89), 141—142 (1959) [Russisch].

The author points out that the first three theorems of an earlier paper (reviewed above) cannot be based on the inequalities (1. 5) and (1.6) of that paper and gives modifications of the proofs. Theorem 4 must then be reformulated in the terminology of the earlier paper as follows: For arbitrary sequences $\{a_k\}$ and $\{b_j\}$ of the ring $K_z(r; R)$ satisfying $\sqrt{r}R \leq |a_k| \leq |a_{k+1}|$; $|b_{j+1}| \leq |b_j| \leq \sqrt{r}R$; $\sum (R - |a_k|) < \infty$; $\sum (|b_j| - r) < \infty$, there exists a Blaschke function $b(z)$, $|b(z)| \leq 1$, with zeros precisely at $\{a_k\}$ and $\{b_j\}$, such that the modulus of $b(z)$ approaches $\prod r/|b_j|$ and $\prod |a_k|/R$ almost everywhere on the circles $|z| = r$ and $|z| = R$, respectively, as z approaches these circles along non-tangential paths. An explicit formula is given for $b(z)$.
A. J. Lohwater.

● Noshiro, Kiyoshi: Cluster sets. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 28. Reihe: Moderne Funktionentheorie.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1960. VII, 135 p. DM 36,—.

Obwohl sehr alt, so ist doch das Problem des Verhaltens der meromorphen Funktionen einer komplexen Veränderungen in der Umgebung ihrer Singularitäten bei weitem nicht erschöpft. Die zahlreichen ihm gewidmeten Arbeiten, die in letzter Zeit erschienen sind, und die große Zahl der Mathematiker, die sich mit diesem Problem beschäftigen, ist ein Hinweis auf das weite Interesse, welches es hervorruft. Die Monographie des Verf. bildet eine systematische Darlegung der in dieser Richtung erlangten Ergebnisse. Da diese Ergebnisse in einer durchaus großen Anzahl von Arbeiten verstreut sind (das Literaturverzeichnis des Buches enthält ungefähr 350 Arbeiten) und da nur ein kleiner Teil davon in den erschienenen Traktaten zusammengefaßt worden ist, so erweist diese Monographie den Fachleuten einen großen Dienst und füllt eine seit langem verspürte Lücke aus. Obwohl die Thematik sich sehr der Thematik des Buches von Privalov nähert (Randeigenschaften analytischer Funktionen, dies. Zbl. 73, 65), sind doch die Standpunkte dieser beiden Monographien ganz verschieden; mit wenigen Ausnahmen (z. B. des Satzes von Lusín-Privalov) ist auch der Inhalt beider Bücher verschieden. Das Buch enthält vier Kapitel und einen Anhang. Im ersten Kapitel werden diejenigen Mengen eingeführt, die das Verhalten einer meromorphen Funktion in einem schlichten Gebiet D in der Umgebung eines Randpunktes charakterisieren (cluster set, boundary cluster set, range of values, asymptotic set), und man erinnert an die klassischen Sätze in bezug auf diese Mengen (die Sätze von Weierstraß, Picard, Iversen, Groß, Fatou, F. und M. Riesz, Lindelöf-Iversen-Groß, Koebe-Groß), die in den folgenden Kapiteln ausführlicher studiert und verallgemeinert werden. Die Kapitel II und III bilden den Hauptteil der Darlegung. Im zweiten Kapitel wird der allgemeine Fall eines beliebigen Gebietes D untersucht, wogegen das dritte Kapitel dem Fall $D = \{|z| < 1\}$ gewidmet ist. Das zweite Kapitel enthält folgende drei Hauptthematika: 1. Das Verhalten einer meromorphen Funktion in der Umgebung einer Menge von singulären Stellen der Kapazität Null. 2. Verallgemeinerungen der Sätze von Iversen-Groß-Seidel-Beurling und Beurling-Kunugui. 3. Die Sätze von Hervé. Das dritte Kapitel enthält: 1. Das Studium der Funktionen aus der Klasse U (Seidelsche Funktionen). 2. Die qualitativen Sätze von Collingwood und Cartwright. 3. Die Kategorie im Sinne von Baire und Mengen von Grenzpunkten. 4. Die Sätze von Lusín-Privalov, Plessner und Maier. 5. Beschränktartige Funktionen und normale Funktionen (im Sinne von Lehto-Virtanen). Das vierte Kapitel nimmt eine besondere Stellung in der Arbeit ein, da es den Riemannschen Flächen gewidmet ist. Man führt erst verschiedene Klassen von Riemannschen Flächen vom „ O -Typus“ ein. Es wird bewiesen, daß die Riemannschen Flächen aus der Klasse O_G (bzw. O_{AB}^0) die Eigenschaft von Gross (bzw. Iversen) besitzen. Man beweist dann die Inklusion $O_{HB\infty} \subset O_{AB}^0 \cap O_L$, und es werden verschiedene Eigenschaften der Riemannschen Flächen aus der Klasse O_{HD_n} wie auch einige Sätze über die Abbildungen vom Typus B_l angegeben. Der Anhang ist dem Problem des Verhaltens der pseudoanalytischen Funktionen in der Umgebung des Randes des Definitionsgebietes gewidmet; besondere Aufmerksamkeit wird dem Falle geschenkt, in welchem die pseudoanalytische Funktion eine quasikonforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf den Kreis $|w| < 1$ ist. Ebenso findet man hier den Beweis der quasikonformen Invarianz der Klasse O_G . C. Constantinescu.

Edrei, Albert et Wolfgang H. J. Fuchs: Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes. Commentarii math. Helvet. 33, 258—295 (1959).

Für die in $|z| < \infty$ meromorphe Funktion $f(z)$ mit den Nullstellen a_j und den Polstellen b_j sei $N(r) = N(r, 0) + N(r, \infty)$, $K(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{T(r, f)} \leq 2 - \delta(0) - \delta(\infty)$.

Neben der Ordnung $\lambda = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$ wird die untere Ordnung $\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$ betrachtet und für endliches λ $p = [\lambda + \frac{1}{2}]$ gesetzt. Verf. untersuchen meromorphe Funktionen endlicher Ordnung, für welche $K(f)$ wenig von Null abweicht. Aus $K(f) < \varepsilon (A_0(p+1))^{-1}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ und $A_0 > 10e$, folgt $T(kr) = k^p T(r) (1+h)$, $p \geq 1$. Dabei ist $1 < k \leq 36$ und $|h| = |h(r, k)| < \varepsilon$. Weiter gilt mit $c(r) = a_0 + p^{-1} \left(\sum_{|a_j| \leq r} a_j^{-p} - \sum_{|b_j| \leq r} b_j^{-p} \right)$ $T(r) = \pi^{-1} |c(r)| r^p (1+h_1)$, $|h_1| < \varepsilon$. a_0 ist eine durch die kanonische Produktdarstellung von $f(z)$ bestimmte Konstante. Diese Beziehungen verallgemeinern Aussagen über das Anwachsen ganzer Funktionen mit einem Borelschen Ausnahmewert. Ist $K(f) < (K_0(p+1) \log(p+1))^{-1}$, $K_0 \geq A_0$, dann existieren $2p$ Zielwege $C_0, C_1, \dots, C_{2p-1}$, wobei C_j aus C_0 durch Drehung um $z=0$ mit dem Drehwinkel $\pi j/p$ entsteht. Auf C_0, C_2, \dots bzw. C_1, C_3, \dots gilt $|f(z)| \rightarrow \exp(\pi T(r)/16)$ bzw. $|f(z)| < \exp(-\pi T(r)/16)$. Ist für hinreichend kleines γ $\delta(\infty) > 1-\gamma$ und $\sum_{c \neq \infty} \delta(c) > 1-\gamma$, dann läßt sich dieses

Resultat auf $f'(z)$ anwenden und liefert in Verbindung mit Abschätzungen aus dem Bereiche des zweiten Hauptsatzes die Existenz von $m \geq 1$ Zielwegen der Funktion $f(z)$ mit den Zielwerten c_1, c_2, \dots, c_m , die defekte Werte sind: $\delta(c_j) > 1/p - C\varepsilon > 0$. Diese Aussagen stehen in enger Beziehung zu einem Resultat von A. Pfluger. Ist für eine ganze Funktion $f(z)$ von endlicher Ordnung die Defektsumme $\sum_c \delta(c)$ größer als $2 - \varepsilon (K_0(p+1) (1 + \log(p+1)))^{-1}$, $0 < \varepsilon < 1/30$, dann folgt neben $p \geq 1, \lambda < p + \frac{1}{2}$ die Existenz einer natürlichen Zahl s , $1 \leq s \leq p$, mit der Eigenschaft $s(1 - 30\varepsilon)/p \leq D \leq \bar{D} \leq s/p$. Dabei ist D bzw. \bar{D} die untere bzw. obere Dichte der Folge a_1, a_2, \dots der Koeffizienten in der Entwicklung $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$,

erklärt durch $\underline{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{n(t)}{t} \right)$, $\bar{D} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{n(t)}{t} \right)$. $n(t)$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten a_j für $j \leq t$. H. Wittich.

Gol'dberg, A. A.: On a set of defective values of meromorphic functions of finite order. Ukrain. mat. Žurn. 11, 438—443 (1959) [Russisch].

Verf. hat 1954 das erste Beispiel einer meromorphen Funktion erster Ordnung mit unendlich vielen defekten Werten gebildet [Doklady Akad. Nauk SSSR, 98, 893—895 (1954)]. In dieser Arbeit gibt er eine vollständige Lösung des wichtigen Problems der Struktur der Menge von Ausnahmewerten für meromorphe Funktionen von endlicher Ordnung: die Menge dieser defekten Werte kann eine willkürliche, endliche oder abzählbare Menge von isolierten Punkten M sein. Er stellt eine nicht negative ganze Zahl m fest und wählt eine Folge $\{a_k\}$, $k = m+1, \dots$ so daß $|a_k| = O(k)$ ist und die Werte a_k die Menge M ausschöpfen ($1 \in M$, $\infty \notin M$). Für die erste Ordnung hat die Funktion $F(z) = [q_0(z) + \sum a_k 2^{-k} q_k(z)] / [q_0(z) + \sum 2^{-k} q_k(z)]$, wobei q_0 und q_k mit Hilfe der Exponentialfunktion gebildet sind, die defekten Werte M . Dieselbe Eigenschaft haben die Funktionen $F_\omega(z) = F(z^\omega) F(z^{\omega^2}) \dots F(z^{\omega^{2^m-1}})$ und $f(z) = F_{2^{-m}}(z^\mu)$ von der Ordnung $\rho = 2^{-m}$ bzw. $\mu 2^{-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $\mu = 1, 2, \dots$, $\omega = e^{i2\pi/\omega}$. In ähnlicher Weise wird der Fall ρ rational behandelt.

Mit Hilfe der Funktion $\Gamma_\lambda(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + z \cdot n^{-1/j})$ statt der Exponentialfunktion bildet der Verf. eine Funktion $F(z)$ von der Ordnung $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$, und dann erhält er wie oben Funktionen von verschiedener positiver Ordnung $\rho = \lambda \mu 2^{-m}$.

C. Andreian-Cazacu.

Oğuztöreli, M. Namik: Sur une classe des fonctions algébroides. Publ. Atatürk. Univ., Res. Ser.-Math. Nr. 2, 1—51 (1960) [Türkisch und Französisch].

Verf. betrachtet algebroidale Lösungen $w(z)$ (die einer in w irreduziblen Beziehung $\sum_{k=0}^n s_k(z) w^k = 0$ mit ganzen Koeffizienten $s_k(z)$, von denen mindestens einer ganz

transzendent ist, genügen) der Differentialgleichung (1) $(\log w')'' - \frac{1}{2}((\log w'))^2 = A(z)$, wobei zusätzlich nur endlich viele Verzweigungspunkte (algebraischer und logarithmischer Natur) der Lösungen zugelassen werden. Unter diesen Voraussetzungen werden dann notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktion $A(z)$ in (1) entwickelt. Auch läßt sich $A(z)$ so angeben, daß die Lösungen von (1) algebraische Funktionen sind. Verf. kann dann Definitionen und Ergebnisse von R. Nevanlinna, G. Elfving, H. Wagner, H. Schmidt, H. Selberg, G. Valiron und E. Ullrich (das Literaturverzeichnis enthält die genauen bibliographischen Angaben) über die Wertverteilung algebraischer und algebroider Funktionen auf die von ihm betrachteten Lösungen anwenden. So läßt sich u. a. die Wachstumsordnung der Lösungen von (1) bestimmen, außerdem können diese Lösungen nur endliche viele asymptotische Werte besitzen. Die Summe ihrer Defekte ist durch 2 beschränkt, einer Schranke, die auch angenommen wird. Den Abschluß bildet ein explizites Beispiel für $A(z)$, mit dessen Hilfe Ergebnisse von R. Nevanlinna, G. Elfving und H. Wagner verallgemeinert werden. H. Schubart.

Oğuztörel, M. Namik: Sur une classe des fonctions méromorphes définies par une équation différentielle. Publ. Atatürk. Univ., Res. Ser.-Math. Nr. 1, 1—90 (1960) [Türkisch und Französisch].

Verf. betrachtet die Differentialgleichung (1) $(\log w')'' - \frac{1}{2}((\log w'))^2 = -2(k(k+1)\wp(z) + B)$ (k eine natürliche Zahl, B ein Parameter), deren Lösungen sich als Quotient zweier linearunabhängiger Integrale der aus (1) durch die Transformation $u^2 w' = 1$ entstehenden Laméschen Differentialgleichung

$$u'' = (k(k+1)\wp(z) + B)u$$

darstellen lassen und die für bestimmte Werte des Parameters B eindeutige analytische Funktionen sind. B -Werte, die multiplikativ-doppeltperiodische Lösungen zulassen, werden „nichtcharakteristisch“ genannt, während additiv-doppeltperiodische Lösungen zu „charakteristischen“ B -Werten gehören. Außerdem werden auch die eindeutigen und analytischen Lösungen von (1) betrachtet, wenn $\wp(z)$ ausartet, also eine oder beide Perioden gleich ∞ sind. Zur Wertverteilung dieser Lösungen kann dann u. a. gezeigt werden: 1. Für nicht entartetes $\wp(z)$ und „nicht charakteristisches“ B : Die Lösungen von (1) besitzen die beiden asymptotischen Werte 0 und ∞ , gegen die sich auch (von Ausnahmen abgesehen) die Grundpunkte ihrer Riemannschen Fläche häufen. Die Wachstumsordnung der Lösungen ist 2, verzweigte Werte gibt es nicht, defekt können höchstens die Werte 0 und ∞ sein. Es gilt $\Phi + \delta(0) + \delta(\infty) = 2$, sämtliche Pole sind einfach. 2. Für nicht entartetes $\wp(z)$ und „charakteristisches“ B : Die Lösungen besitzen ∞ als asymptotischen Wert, gegen den sich auch die Grundpunkte häufen. Die Wachstumsordnung der Lösungen ist 2, defekte Werte treten nicht auf. Ebenso gibt es keine verzweigten Werte, obwohl der Gesamtindex Φ der algebraischen Verzweigtheit gleich 2 ist. Sämtliche Pole der Lösungen sind einfach. 3. Entartet in (1) die Weierstrasssche \wp -Funktion, so ist die Wachstumsordnung der Lösungen höchstens gleich 1. Außerdem können verzweigte Werte und defekte Werte auftreten, die Pole bleiben einfach. H. Schubart.

Kennedy, P. B.: On a theorem of Hayman concerning quasi-bounded functions. Canadian J. Math. 11, 593—600 (1959).

W. K. Hayman hat durch Beispiele gezeigt, daß die Ableitung einer beschränktartigen Funktion $f(z)$ — d. i. einer in $|z| < 1$ holomorphen Funktion mit beschränkter Charakteristik $T(r, f)$ — nicht beschränktartig zu sein braucht. Durch zusätzliche Bedingungen kann die Ableitungsfestigkeit der Eigenschaft „beschränktartig“ erzwungen werden. In einer solchen Bedingung von W. K. Hayman wird die Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty p_n \log p_n^{-1}$, $p_n > 0$ und $\sum_1^\infty p_n = 2\pi$, gefordert. Verf.

konstruiert unter der Annahme $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} p_n \right) \log p_m^{-1} = \infty$ ein zu $|z| < 1$ kreisnahes Gebiet G , das $|z| < 1$ enthält, und eine in G holomorphe und beschränkte Funktion $f(z)$, für die $T(r, f') \rightarrow \infty$ bei $|z| = r \rightarrow 1$ gilt. Für die Konstruktion von $f(z)$ und die Abschätzung von $T(r, f') = m(r \cdot f')$ wird ein Satz von E. J. Specht über die konforme Abbildung kreisnaher Gebiete herangezogen.

H. Wittich.

Dundučenko (Dunduchenko), L. E. and S. A. Kas'janjuk (Kasyanyuk): On analytical functions bounded in n -connected circular regions. *Dopovidi Akad. Nauk ukraïn. RSR* 1959, 111—114, russ. und engl. Zusammenfassung 114—115 (1959) [Ukrainisch].

Balk, M. B.: Über einen Satz über ganze Funktionen. *Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenye Zapiski* 57, *Trudy Kafedr Mat.* 4, 51—53 (1957) [Russisch].

The author gives an elementary proof of the theorem that if $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ is an entire function with real coefficients such that $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ for $\operatorname{Im} z > 0$, then $f(z)$ is a linear function, $f(z) = c_0 + c_1 z$, with $c_1 \geq 0$. A. J. Lohwater.

Merkes, E. P.: On typically-real functions on a cut plane. *Proc. Amer. math. Soc.* 10, 863—868 (1959).

Der Begriff der typisch reellen Funktionen im Bereiche $|z| < 1$ ist seit langer Zeit bekannt. $F(\zeta)$ sei eine in der entlang des Intervalles $(-\infty, -1]$ aufgeschlitzten Ebene reguläre Funktion, welche reelle Werte annimmt, falls ζ reell und für die $\operatorname{Im} F(\zeta) \neq 0$, falls $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ist. Die Funktion $F(\zeta)$ sei ferner so normiert, daß $F(0) = 0$ und $F'(0) = 1$ sei. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften wird typisch reell in der geschlitzten Ebene genannt, und die Klasse solcher Funktionen sei durch $T[-\infty, -1]$ bezeichnet. Verf. gibt eine Charakterisierung der in der geschlitzten Ebene typisch reellen Funktionen, und diese Charakterisierung ist analog der von Rogosinski (dies. Zbl. 3, 393) stammenden Charakterisierung der im Einheitskreis typisch reellen Funktionen. Die $T[-\infty, -1]$ -Funktionen werden auch mit Hilfe einer Stieltjes-Transformation und mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung charakterisiert. Aus den Betrachtungen des Verf. folgt auch eine neue Charakterisierung der im Einheitskreise typisch reellen Funktionen mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung. Auch manche schönen funktionentheoretischen Eigenschaften der $T[-\infty, -1]$ -Funktionen werden festgestellt.

St. Fenyő.

Siewierski, Lucjan: Sur les fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Cl. III Sci. math. natur.* 7, Nr. 4, 17 p. (1956).

Verf. betrachtet folgende Funktionenklassen: 1. Die Klasse E der in der oberen Halbebene P schlichten Funktionen $e(z)$ mit der Eigenschaft $e(P) \subset P$ und mit einer in $1 < |z| < \infty$ gültigen Laurentreihe $e(z) = z + f_1/z + f_2/z^2 + \dots$. 2. Die Klasse $D \subset E$ der Funktionen $d(z)$ mit der Eigenschaft $\lambda(d(z)) = \mu(z)$, wobei $\lambda(w) = \sum_{s=0}^L a_s w^s$, $\mu(z) = \sum_{s=0}^L b_s z^s$, $a_L = b_L = 1$, $L \geq 1$, a_s und b_s reell. 3. Die Klasse $D_M \subset D$ (M eine natürliche Zahl), wo L nicht M überschreitet. Es werden drei Sätze bewiesen. Erstens wird bewiesen, daß jede normalisierte Funktion $e(z) \in E$ durch eine Funktion $d(z) \in D$ beliebig genau approximiert werden kann. Zweitens wird die Kompaktheit der Klasse D_M bewiesen. Schließlich werden notwendige Bedingungen für die Existenz einer Funktion $d^*(z) \in D$ mit $\lambda^*(d^*(z)) = \mu^*(z)$ hergeleitet.

H. Waadeland.

Siewierski, Lucjan: Sur la variation locale des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Cl. III Sci. math. natur.* 8, Nr. 3, 16 p. (1957).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (Referat vorstehend) schlichte und in einer Halbebene algebraische Funktionen untersucht, und dabei, in Form arithmetischer Rela-

tionen, gewisse notwendige Bedingungen bestimmt, für Parameter, die eine schlichte Funktion definieren. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß diese Bedingungen lokal hinreichend sind, um eine schlichte, algebraische Funktion zu definieren. Dieses Ergebnis wird durch einen Variationssatz ausgedrückt. Für jede schlichte, algebraische Funktion $d^*(z)$, die der Identität $\lambda^*(d^*(z)) = \mu^*(z)$ genügt, stellt dieser Satz die Existenz einer in einem gewissen Sinne benachbarten Funktion $\dot{d}(z)$ fest, die der Identität $\dot{\lambda}(\dot{d}(z)) = \dot{\mu}(z)$ genügt. Hierbei bedeuten die λ 's und die μ 's Polynome mit reellen Koeffizienten.

H. Waadeland.

Siewierski, Luejan: Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan. Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Cl. III Sci. math. natur. 8, Nr. 9, 30 p. (1957).

In dieser Arbeit setzt Verf. seine Untersuchungen über schlichte und in einer Halbebene algebraische Funktionen fort. In der Funktionenklasse D_M (vgl. das vorletzte Referat) wird das Funktional $K_d = K(c_1, c_2, \dots, c_N)$ betrachtet, wobei die c 's die Koeffizienten der Reihenentwicklung $d(z) = z + c_1/z + c_2/z^2 + \dots$, $1 < |z| < \infty$, bedeuten. Es wird die Existenz einer Extremalfunktion $d^*(z)$, für welche K_d einen maximalen Wert annimmt, bewiesen. Weiter werden Gleichungen zwischen $d^*(z)$ und der zugehörigen λ^* und μ^* ($\lambda^*(d^*(z)) = \mu^*(z)$) hergeleitet.

H. Waadeland.

Nakai, Mitsuru: A function algebra on Riemann surfaces. Nagoya math. J. 15, 1—7 (1959).

Die stetig differenzierbaren Funktionen f auf einer kompakten Riemannschen Fläche R bilden in bezug auf die Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \sqrt{D(f)}$ einen normierten Ring $M(R)$, der von H. L. Royden zur Untersuchung Riemannscher Flächen eingeführt wurde. Verf. zeigt, daß die konforme Struktur einer kompakten Fläche durch ihren Roydenschen Ring bis auf die Orientierung eindeutig bestimmt ist; m. a. W. besteht zwischen den Ringen $M(R_1)$ und $M(R_2)$ zweier kompakter Flächen R_1 und R_2 eine isometrische Isomorphie, so sind R_1 und R_2 direkt oder indirekt konform äquivalent. Mit Hilfe der Charaktere von $M(R_j)$ zeigt man zunächst, daß es eine topologische Abbildung T von R_1 auf R_2 gibt, welche die normtreue Isomorphie zwischen den $M(R_j)$ induziert; T läßt auch das Dirichlet-Integral $D(f)$ invariant. Somit läßt T auch den Modul jedes Ringgebietes invariant. Verf. zeigt nun, daß jeder Homöomorphismus mit der letzteren Eigenschaft eine direkte oder indirekte konforme Abbildung ist.

A. Pfluger.

Huber, Heinz: Riemannsche Flächen von hyperbolischem Typus im euklidischen Raum. Math. Ann. 139, 140—146 (1959).

Man weiß (R. Ossermann, dies. Zbl. 71, 75), daß es eine Fläche F gibt, dargestellt durch eine in der ganzen (x, y) -Ebene definierte Funktion $z = f(x, y)$ der Klasse C^∞ , welche in bezug auf die durch den euklidischen (x, y, z) -Raum definierte konforme Struktur vom hyperbolischen Typus ist. Verf. gibt ein explizites und einfaches Beispiel einer solchen Funktion an: Man wählt eine Funktion ω der Klasse $C^\infty(-\infty, \infty)$ mit $\omega(t) = 0$ für $t \notin (0, 1)$ und $\omega(t) > 0$ für $t \in (0, 1)$, man wählt eine Folge natürlicher Zahlen n_k und setzt

$$f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(\varrho - k) \sin n_k \varphi.$$

Die hierdurch dargestellte Fläche $\mathfrak{F}(\omega, \{n_k\})$ ist vom hyperbolischen Typus, wenn die Reihe $\sum_k k^{-1} I(k^{-1} n_k, \omega)$ konvergiert, wobei $I(p, \omega) = \int_0^1 \frac{\log(1 + p \omega(t))}{p \omega(t)} dt$ ist. Setzt man $\omega(t) = \omega_0(t) = e^{-1/t} \cdot e^{1/(t-1)}$ für $t \in (0, 1)$, ist $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} n_k = 0$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(n_k/k)}$ konvergent, so ist die Fläche $\mathfrak{F}(\omega_0, \{n_k\})$ vom hyperbolischen Typus.

A. Pfluger.

Simonenko, I. B.: Riemann's boundary value problem with a continuous coefficient. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 278—281 (1959) [Russisch].

Let C denote the total boundary of a domain D^+ , bounded by $m+1$ simple closed curves C_0, \dots, C_m . The complement of the closure of D^+ consists of the union of m bounded simply-connected domains D_k^- ($k=1, \dots, m$) together with one unbounded component D_0^- , the union of which is denoted by D^- . The problem is to find functions Φ^\pm , analytic in D^\pm , having almost everywhere on C angular limit values $\Phi^\pm(t)$ of class L_p ($p > 1$) on C , such that $\Phi^-(\infty) = 0$ and such that $\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + g(t)$, where $g(t) \in L_p$ on C , and where $G(t)$ is continuous and non-vanishing on C . The index κ of the problem is defined as the integer $\kappa = \sum_0^m \kappa_k$,

where $\kappa_k = \frac{1}{2}\pi^{-1} \Delta_{C_k} \arg G(t)$. A solution of the problem in a closed form was given by F. Gachov (Randwertprobleme, Moskau 1958) in the case that $G(t)$ and $g(t)$ satisfy Hölder conditions; the present author shows that the problem can be solved under the conditions stated above and discusses the nature of the solution for the cases $\kappa = 0$, $\kappa > 0$, and $\kappa < 0$.

A. J. Lohwater.

Koppelman, Walter: The Riemann-Hilbert problem for finite Riemann surfaces. Commun. pure appl. Math. 12, 13—35 (1959).

The problem in the title is as follows in the case of a plane domain D with analytic boundary curves L : find $w(z) = u + iv$, regular analytic in D and continuous in $D + L$, satisfying $au + bv = c$ on L , where a, b, c are real, continuous functions given on L such that $a^2 + b^2 \not\equiv 0$. This problem is easily reduced to the problem of finding an analytic function w satisfying $\operatorname{Re}(\lambda w) = \gamma$, $|\lambda| = 1$, on L , where γ is a real-valued function and λ is a complex-valued function. Generalizing this, the author discusses the case of a finite Riemann surface M with h handles and $m+l$ holes. Let A be a complex-valued Hölder continuous differential of dimension ν on the boundary ∂M , and δ be a divisor of order n_δ on M . It is then proved that the problem (1) $\operatorname{Re}(A dZ^\nu/dz^\nu) = d\gamma^\nu/dz^\nu$ on ∂M , $(dZ^\nu) - \delta \geq 0$, has a solution if and only if $\int_{\partial M} \bar{A} d\gamma^\nu dZ^{-\nu+1} = 0$ for every solution $dZ^{\nu+1}$ of the adjoint problem

$$(2) \quad \operatorname{Re}(\bar{A} dZ^{-\nu+1}/dz^{-\nu+1}) = 0 \quad \text{on } \partial M, \quad (dZ^{-\nu+1}) + \delta \geq 0.$$

For the dimension A (B resp.) of the linear space of solutions of (1) with $d\gamma^\nu = 0$ (of (2) resp.), he derives also

$$A = B + 2(n - n_\delta) + (2\nu - 1)(2h + m - 1),$$

where n is equal to the change of $\arg \bar{A}$ along ∂M , and regards it as a Riemann-Roch theorem. In the proof the author first solves the case $\nu = 0$, $A = 1$; this may be called a Dirichlet problem. Solutions of an inhomogeneous Cauchy-Riemann equation $w_{\bar{z}} = f$ are next considered instead of analytic functions, and finally domains with non-analytic boundaries are treated.

M. Ohtsuka.

Ivanilov, Ju. P. (Yu. P.), N. N. Moiseev and A. M. Ter-Krikorov: On the asymptotic character of Lavrent'ev's formulas. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 231—234 (1958) [Russisch].

In connection with results of Lavrent'ev concerning the conformal mapping of strip regions (cf. e. g., Lavrent'ev and Šabat, Methoden der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, this Zbl. 64, 66), the authors pose various problems and offer possible solutions, the following being typical: If $w = w(z) = q + i\psi$, $z = x + iy$, maps the strip $T_z: 0 \leq y \leq f(x)$ onto the strip $T_w: 0 \leq \psi \leq 1$ with $w(\infty) = \infty$, to find a function harmonic in T_z and satisfying the boundary

conditions $\psi = 0$ for $y = 0$ and $\psi = 1$ for $y = f(x)$. A necessary and sufficient condition (too lengthy to be cited here) is given for a certain series to be an asymptotic solution of the problem; it is difficult, however, to see how the condition can be other than tautological. A. J. Lohwater.

Chazałija, G. Ja.: Über eine Näherungsformel der Theorie der konformen Abbildungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 45 (87), 31—50 (1958) [Russisch].

The author generalizes the known formula of Lavrent'ev which gives an estimation of the derivation $|f'(z)|$, where $w = f(z)$ maps conformally the given strip $D(G, G_0)$, $G: y = y(x)$, $G_0: y = y_0(x)$, $-\infty < x < \infty$ onto the strip $0 < \operatorname{Im} w < h$, $-\infty < \operatorname{Re} w < \infty$. The case is considered when the curve G is of discontinuous curvature at some point z_0 . The author proves that the value of $|f'(z)|$ can be expressed

by means of the integral $\lambda(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(\tau - \alpha)^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \pi \tau} d\tau$. J. Górski.

Nitsche, Johannes C. C.: On harmonic mappings. Proc. Amer. math. Soc. 9, 268—271 (1958).

Es sei S die Klasse aller eindeutigen harmonischen Abbildungen $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ der Einheitskreisscheibe auf sich mit $x(0, 0) = y(0, 0) = 0$. Man setze $\mu = \min_{\alpha, \beta \in S} \inf (x_{\alpha}^2 + x_{\beta}^2 + y_{\alpha}^2 + y_{\beta}^2)_{\alpha=\beta} = 0$. Wie der Ref. früher bewiesen hat (dies.

Zbl. 48, 154) gilt dann die Abschätzung $\mu \geq 0,358$. In der vorliegenden Note wird die schärfere Abschätzung $\mu \geq \frac{1}{2}$ bewiesen. Der Beweis beruht auf der funktionentheoretischen Ausnutzung des Zusammenhanges zwischen harmonischen Abbildungen und den Lösungen der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Der Verf. bemerkt, daß ihm H. Hopf einen anderen einfachen Beweis für die Ungleichung $\mu \geq \frac{1}{2}$ mitgeteilt habe und daß eine Verfeinerung seiner Beweismethode die schärfere Abschätzung $\mu \geq 0,64$ liefere. (Anm. d. Ref.: Der angekündigte Beweis für $\mu \geq 0,64$ ist inzwischen erschienen, vgl. dies. Zbl. 90, 54. Kürzlich hat H. L. de Vries gezeigt, daß sogar $\mu > 0,869$ gilt). E. Heinz.

Suvorov, G. D.: Boundary correspondence under topological mappings of plane regions with variable boundaries. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 772—774 (1959) [Russisch].

The author announces the extension, to a general class of mappings, of the theory of prime ends of a sequence of plane domains converging to a non-degenerate kernel. A mapping $w = T(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$, $z = x + i y$, of a domain D is said to belong to class C_k in D if f_1 and f_2 belong to class BL in D (in the sense of the

author's definition, cf. this Zbl. 74, 59) and if $\iint_D \left(\sum_1^2 \operatorname{grad}^2 f_i \right) dx dy \leq k$. The first

theorem announced in the paper is an analogue of Carathéodory's theorem: Let $w = T_n(z)$, $T_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, map the circle $Q_0: |z| < 1$ onto the domain B_n , where $\{B_n\}$ has a non-degenerate kernel with respect to 0. If $T_n \in C_k$ in Q_0 and $\tau_n = T_n^{-1} \in C_k$ in B_n , then there exists a sequence of integers $\{n'\}$ such that (1) $\{B_{n'}\}$ converges to a non-degenerate kernel B_0 relative to 0; (2) $\{T_{n'}\}$ converges to a homeomorphism T , $T(Q_0) = B_0$; (3) $\{\tau_{n'}\}$ converges in B_0 to the homeomorphism $\tau = T^{-1}$. A second theorem is stated concerning the correspondence of frontiers under the mappings $\{T_n\}$. A. J. Lohwater.

Schechter, Martin: A free boundary problem for pseudo-analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. 10, 881—887 (1959).

In this note the author considers free boundary problems for equations (1) $\Delta \Phi = g(x, y, \Phi_x, \Phi_y)$ and (2) $\partial w / \partial z = \varrho(z, w)$, $z = x + i y$, where w and ϱ are complex. He shows, by means of a method due to Bers ("Theory of pseudo-analytic functions", this Zbl. 51, 316), that such problems can be reduced to similar

problems for harmonic and /or analytic functions which can be handled by conformal mapping techniques. A simple application is given here; more involved applications of the method will be considered in future publications. *M. O. Reade.*

Vekua, I. N.: Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen und einige ihrer Anwendungen in Geometrie und Mechanik. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń-Ijul' 1956 3, 42—65 (1958) [Russisch].

In diesem Bericht werden dargestellt Untersuchungen der letzten Jahre über Lösungen elliptischer Systeme:

$$(S) \quad \begin{aligned} \partial u / \partial x - \partial v / \partial y + a(x, y) u + b(x, y) v &= 0 \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + c(x, y) u + d(x, y) v &= 0. \end{aligned}$$

Es erweist sich, daß fast alle wesentlichen Züge der Theorie analytischer Funktionen für die Theorie der Systeme (S) erhalten bleiben. Der verallgemeinerte Satz von Liouville hat die folgende interessante geometrische Interpretation: Steifheit der Ovaloiden (Liebmann-Blaschke). Der klassische Liouvillesche Satz bedeutet Steifheit der Sphäre. Es werden auch wichtige Anwendungen aus der Theorie der Schalen angeführt. [Bem. des Ref.: Der Vortrag ist sehr klar, es wird gewissenhaft auf parallele Untersuchungen anderer Autoren eingegangen. Inzwischen ist eine große Monographie des Verf. erschienen: „Verallgemeinerte analytische Funktionen“. Moskau 1959, 628 S., wo alle im obigen Autoreferat dargestellte Ergebnisse ausführlichst behandelt werden.] *K. Maurin.*

Hitotumatu, Sin: Some remarks on a quasi-pseudo-conformal mapping of Reinhardt circular domains. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 8, 1—21 (1960).

Gegeben seien zwei komplexe Mannigfaltigkeiten M und M' mit B bzw. B' als den zugehörigen Vektorraumbündeln der kontravarianten Vektoren. Tragen M und M' je eine hermitesche Metrik E bzw. E' , so ist jedem $\zeta \in B$ bzw. $\zeta' \in B'$ eine Länge $E(\zeta)$ bzw. $E'(\zeta')$ zugeordnet. Eine eindeutige C^∞ -Abbildung $f: M \rightarrow M'$ induziert eine Abbildung $\tilde{f}: B \rightarrow B'$ und eine Zuordnung: $\zeta \in B \rightarrow Q(\zeta) = E'(\tilde{f}(\zeta))/E(\zeta) \geq 0$. Bleiben $Q(\zeta)$ und $Q^{-1}(\zeta)$ für $\zeta \in B$ beschränkt, so heiße f bezüglich (E, E') von endlicher Distortion. Der Autor behandelt folgenden Fall: Man setze $M = \{|z^1|^2 + |z^2|^2 < 1\}$, $M' = \{|Z^1|^2/a^2 + |Z^2|^2/b^2 < 1; a, b > 0\}$ und wähle für E und E' die je zugehörige invariante Bergman-Metrik. f sei eine von Bergman eingeführte sog. quasi-pseudo-conforme Abbildung von M auf M' (s. Bergman, dies. Zbl. 85, 67). In längeren Rechnungen untersucht Verf. das Verhalten von $Q(\zeta)$ auf gewissen Untermannigfaltigkeiten von B und erhält als ein Hauptresultat, daß weder $Q(\zeta)$ noch $Q^{-1}(\zeta)$ auf B beschränkt ist. D. h.: Die von Bergman eingeführten quasi-pseudo-conformen Abbildungen von Reinhardtschen Körpern sind bezüglich der invarianten Bergman-Metrik i. a. nicht von endlicher Distortion. *K. H. Spallek.*

Hua, L. K. and K. H. Look: Theory of harmonic functions in classical domains. Sci. Sinica 8, 1031—1094 (1959).

The authors continue their study of the four classical types of bounded symmetric domains in several complex variables. The main results in this paper are the determination of the boundary structure of these domains and the description of the boundary behaviour of the solutions of the Dirichlet problem. The methods consist in explicit computations in each of the four cases; the exceptional domains are not considered at all. In somewhat more abstract terms the main results could be summarized as follows. Let $D = G/K$ an irreducible classical domain, imbedded in C^m in the natural way (cf. Harish-Chandra, this Zbl. 72, 17). The boundary of D decomposes into r orbits of G (r the rank of the symmetric space G/K): B_1, \dots, B_r , with $B_{j-1} \subset \bar{B}_j$ ($j = 1, \dots, r-1$); each B_j ($j = 1, \dots, r-1$) is a direct product

space $D_j \times L_j$ where $D_j = G_j/K_j$ is a classical symmetric domain with $G_j \subset G$ and L_j is a homogeneous space of K . B_r is a homogeneous space of K , and is the Šilov boundary of D . All these homogeneous spaces are determined explicitly for all the 4 classical types as spaces of matrices. Now let there be given a real-valued continuous function φ on the Šilov boundary B_r of D . It is known from the work of J. Mitchell, K. Morita, D. Lowdenslager that the Dirichlet problem for B_r can be solved in the sense that there exists a unique function f in D satisfying the Laplace-Beltrami equation for the invariant metric of D and having the continuous boundary values φ on B_r . Explicit Poisson formulas are known in each of the four classical cases. The authors here study the behaviour of f on the entire boundary. It turns out that it always has continuous boundary values everywhere, and on each $B_j = D_j \times L_j$ ($j = 1, \dots, r-1$) its restriction to any cross-section above D_j projects into a harmonic function on D_j . The proof is based on a study of the Poisson formulas. In the last sections the authors indicate some applications and extensions of the above ideas. Using the fact that the group U_n of $n \times n$ unitary matrices appears as the Šilov boundary of one of the classical domains, they define the Abel-summation of Fourier series on U_n , and prove that every continuous function on U_n is represented in this sense by its Fourier series. They also give an example of a domain in real Euclidean space, the domain consisting of $m \times n$ real matrices X such that $I - XX' > 0$, which is a symmetric space without a complex structure, and for which they can prove results very similar to the preceding ones [cf. also F. I. Karpelevič, Doklady Akad. Nauk SSSR **124**, 1199—1202 (1959)]. *A. Korányi.*

Bruijn, Nicolaas Govert de: Verallgemeinerte Riemannsche Sphären. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. math.-phys. Kl. **1959**, Nr. 11, 279—292 (1959).

Beim Aufbau einer Funktionentheorie in einer Banach-Algebra stellt sich die Aufgabe, die Algebra durch Adjunktion idealer Elemente so zu einer Mannigfaltigkeit zu vervollständigen, daß rationale Funktionen zu stetigen Abbildungen der Mannigfaltigkeit in sich fortgesetzt werden können. Ohne vollen Anspruch auf Originalität zu erheben, wird hier die zur Algebra $\mathfrak{M}^{(n,n)}$ aller n -reihigen komplexen Matrizen gehörige Mannigfaltigkeit, die sog. $\mathfrak{M}^{(n,n)}$ -Sphäre \mathfrak{R}_n konstruiert. Im Falle $n = 1$ erhält man die Erweiterung der komplexen Zahlenebene zur Riemannschen Zahlenkugel. Im einzelnen wird etwa folgendes gezeigt: Es sei $\mathfrak{S}_{n,n}$ die Menge aller idempotenten, hermiteschen, $2n$ -reihigen Matrizen vom Rang n . Deutet man den Raum \mathfrak{H}_{2n} aller hermiteschen $2n$ -reihigen Matrizen als reell-euklidischen Raum der Dimension $4n^2$, so erhält man für $\mathfrak{S}_{n,n}$ eine induzierte metrische Topologie, bezüglich welcher sich $\mathfrak{S}_{n,n}$ als kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n^2$ erweist. ($\mathfrak{S}_{n,n}$ liegt sogar in einer Hyperebene von \mathfrak{H}_{2n} .) Im Raum $\mathfrak{S}_{n,n}$ läßt sich eine offene Teilmenge auszeichnen, welche zu $\mathfrak{M}^{(n,n)}$ homöomorph ist. Die $\mathfrak{M}^{(n,n)}$ -Sphäre \mathfrak{R}_n ist der Quotient der Menge aller geordneten Paare (τ, Z) von nicht-singulären quadratischen Matrizen τ und Matrizen $Z \in \mathfrak{M}^{(n,n)}$ nach folgender Äquivalenzrelation: (τ_1, Z_1) und (τ_2, Z_2) werden äquivalent genannt, wenn $\tau_2^{-1} \tau_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ so beschaffen ist, daß $Z_2 = (\alpha Z_1 + \beta Z_1)(\gamma Z_1 + \delta Z_1)^{-1}$ ist. Sodann wird \mathfrak{R}_n in naheliegender Weise topologisiert und gezeigt, daß \mathfrak{R}_n so homöomorph in $\mathfrak{S}_{n,n}$ eingebettet werden kann, daß das Komplement von \mathfrak{R}_n bezüglich $\mathfrak{S}_{n,n}$ eine abgeschlossene, rare (= nirgendsdichte) Menge ist. $\mathfrak{S}_{n,n}$ kann dann als Kompaktifizierung von $\mathfrak{M}^{(n,n)}$ und von \mathfrak{R}_n aufgefaßt werden. Weiter wird die Riemannsche Metrik auf $\mathfrak{S}_{n,n}$ studiert, welche sich durch die Einbettung in den metrischen Raum \mathfrak{H}_{2n} ergibt. Dem Ausgangspunkt der Betrachtungen entsprechend wird die Fortsetzung rationaler Funktionen zu stetigen Abbildungen des Raumes \mathfrak{R}_n in sich untersucht. Auf die analytische Struktur von $\mathfrak{S}_{n,n}$ wird nicht eingegangen. Dagegen werden die Räume $\mathfrak{S}_{p,n}$ auch für $p \neq n$ eingeführt und studiert; für $p \neq n$ existiert aber kein Analogon zum Raum \mathfrak{R}_n .

H. Bauer.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● Boole, George: A treatise on the calculus of finite differences. 2nd ed. (last revised ed). Edited by J. F. Moulton. Unabridged and unaltered republ. of the second ed. 1872. New York: Dover Publications Inc. 1960, XII, 336 p. \$ 1,85.

Vgl. dies. Zbl. 84, 77.

Eliáš, Jozef: Über eine Operatorenmethode zur Lösung von Differenzengleichungen. Mat.-fys. časopis slovensk. Akad. Vied 8, 203—226, russ. und deutsche Zusammenfassung 226—227 (1958) [Slowakisch].

In this paper a method for the solution of difference equations is constructed in a similar way to Mikusiński's method (see e.g. J. Mikusiński: Operatorenrechnung, this Zbl. 53, 85). K is the set of all complex functions $\{a(n)\}$ defined on the set of all nonnegative integers. $\{a(n)\} + \{b(n)\}$ is defined as $\{a(n) + b(n)\}$, $\{a(n)\} \cdot \{b(n)\}$ as $\left\{ \sum_{i=1}^n a(n-i) \cdot b(i-1) \right\}$. K together with the operations $+$ and \cdot is an integral domain. The main part of the paper is devoted to the study of the quotient field of this integral domain. The element $1/\{1\}$ ($=s$) is said to be the difference operator (it is $s \cdot \{a_1(n)\} = \{\Delta a(n)\} + \{a(0)\}/\{1\}$). The statements that $\frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^r} \in K$, $\frac{s}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^r} \in K$, where α, β are real numbers $\neq 0$, $r = 1, 2, \dots$ enable to apply this theory to the solution of the linear difference equations with constant coefficients.

M. Sekanina.

Naftalevič, A. G.: Über ein System von Differenzengleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 51 (93), 383—400 (1960) [Russisch].

Es seien α und β zwei komplexe Zahlen, für die $\text{Im}(\alpha/\beta) \neq 0$, und $\{P_\vartheta(u, v)\}$ ein endliches oder unendliches System von Polynomen in u, v über der Menge der komplexen Zahlen. Mit den Bezeichnungen $A^k f(z) = f(z + k\alpha)$, $B^l f(z) = f(z + l\beta)$ ($k, l \geq 0$ ganzzahlig) betrachtet Verf. das System der Differenzengleichungen $P_\vartheta(A, B) f(z) = 0$. Das Polynomsystem $\{P_\vartheta(u, v)\}$ nennt er charakteristisch (für das Gleichungssystem) und das geordnete Zahlenpaar (λ, μ) charakteristische Wurzel, wenn $P_\vartheta(\lambda, \mu) = 0$ für alle ϑ . Die Menge aller meromorphen Lösungen der Differenzengleichungen bildet einen linearen Raum $M\{P_\vartheta\}$. Für $f_n(z) \in M\{P_\vartheta\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = g(z)$, wobei $g(z)$ eine meromorphe Funktion ist,

gilt auch $g(z) \in M\{P_\vartheta\}$, so daß $M\{P_\vartheta\}$ bei entsprechender Konvergenzdefinition abgeschlossen ist. Um die Erzeugenden von $M\{P_\vartheta\}$ zu beschreiben, führt Verf. gewisse Fundamentallösungen und Grundfunktionen ein. Er bezeichnet mit $E_{\lambda\mu}(z)$ eine elliptische Funktion zweiter Art mit den Perioden α, β und den Multiplikatoren λ, μ [d. h. $A E_{\lambda\mu}(z) = \lambda E_{\lambda\mu}(z)$, $B E_{\lambda\mu}(z) = \mu E_{\lambda\mu}(z)$] und mit $p(z, \zeta(z))$ ein Polynom in z und der Weierstraßschen Zetafunktion $\zeta(z)$ [die dem Periodenpaar (α, β) entspricht], wobei die Koeffizienten elliptische Funktionen mit den Perioden (α, β) sein können. Eine Funktion der Form $e(z) = E_{\lambda\mu}(z) p(z, \zeta(z))$ nennt Verf. Grundfunktion und, wenn sie den Differenzengleichungen genügt, Fundamentallösung; bei dieser muß (λ, μ) eine charakteristische Wurzel sein. Im Mittelpunkt der Arbeit des Verf. steht der Satz: Sei $E\{P_\vartheta\}$ die Menge aller Fundamentallösungen und $N\{P_\vartheta\}$ die abgeschlossene lineare Hülle dieser Menge. Dann ist $M\{P_\vartheta\} = N\{P_\vartheta\}$. Dabei sind die ganzen Fundamentallösungen die Erzeugenden für die ganzen Lösungsfunktionen. Den Beweis beginnt Verf. mit einem ausführlichen Studium der Fundamentallösungen und zeigt danach erst einmal im Sonderfall einer Differenzengleichung $P(A, B) f(z) = 0$, daß alle ganzen Lösungen dem Raum $N(P)$ angehören. Viel schwieriger ist der Beweis, daß dies auch für die meromorphen Lösungen gilt, und Verf. schlägt dabei folgenden Weg ein: Er zeigt, daß sich zu einer solchen Lösung $f(z)$ eine Funktion $\Phi(z) \in N\{P\}$ finden läßt, deren Pole und Hauptteile die gleichen wie bei $f(z)$ sind. Dann ist $q(z) = f(z) - \Phi(z)$ eine ganze Lösung, so daß

$\varphi(z) \in N\{P\}$ und daher auch $f(z) = \varphi(z) + \Phi(z) \in N\{P\}$. Verf. geht anschließend zum Fall zweier Gleichungen über, auf den er den Fall endlich vieler Gleichungen zurückführen kann. Bei unendlich vielen Gleichungen bemerkt Verf., daß die Menge \mathfrak{P} , die Gesamtheit der Polynome mit $P(A, B) f(z) = 0$ [für jede meromorphe Lösung $f(z)$ des vorgelegten Systems von Differenzengleichungen], ein Ideal im Ring der Polynome von u und v bildet. Also gibt es eine endliche Zahl von Polynomen $p_1(u, v), \dots, p_k(u, v) \in \mathfrak{P}$, so daß für ein beliebiges Polynom $P(u, v) \in \mathfrak{P}$ die Darstellung gilt: $P = \sum_{i=1}^k a_i^{(P)}(u, v) p_i(u, v)$, wo die $a_i^{(P)}(u, v)$ Polynome sind. Damit ist die Aufgabe auf den schon behandelten Fall des Systems von endlich vielen Gleichungen $p_i(A, B) f(z) = 0$ zurückgeführt. R. Reißig.

Él'sgol'e, L. E.: Gewisse Eigenschaften der periodischen Lösungen linearer und quasilinearer Differentialgleichungen mit retardierten Argumenten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 14, Nr. 5, 229—234 (1960) [Russisch].

On prouve que l'équation

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} [a_k x^{(k)}(t) + b_k x^{(k)}(t-\tau)] = 0$$

admet au plus n solutions indépendantes de la forme $e^{i\lambda x}$; pour l'équation de type neutre

$$\sum_{k=0}^n [a_k x^{(k)}(t) + b_k x^{(k)}(t-\tau)] = 0$$

$a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ ce fait est aussi valable „en général“, mais le cas exceptionnel de l'existence d'une infinité de telles solutions est possible. On remarque que l'on peut prouver l'existence de solutions périodiques des systèmes à argument retardé ou de type neutre à l'aide du principe de Schauder et on établit un tel théorème d'existence. A la fin on montre par des exemples que en général, dans le problème des solutions périodiques il n'est pas permis de négliger le retardement. A. Halanay.

Bellman, Richard and Kenneth L. Cooke: Stability theory and adjoint operators for linear differential-difference equations. Trans. Amer. math. Soc. 92, 470—500 (1959).

A typical result of this very interesting paper is as follows. Let $B_n(t)$ and $D_n(t)$ be given continuous matrix functions of the real variable t for $t > t_0$ and $n = 0, 1, \dots, m$. Let $Y(s, t)$ denote the unique matrix function, defined for $t > t_0$, $t_0 \leq s \leq t + h_m$, which is continuous for $t_0 \leq s \leq t$ and which satisfies the initial condition $Y(s, t) = 0$ ($t < s \leq t + h_m$) and $Y(s, t) = I$ ($s = t$) and the adjoint equation

$$-\frac{\partial}{\partial s} Y(s, t) + \sum_{n=0}^m Y(s + h_m - h_n, t) B_n(s + h_m - h_n) = 0$$

($t > t_0$; $t_0 < s < t - h_m$ and $t - h_m < s < t$).

Then a sufficient condition for all continuous column vector solutions of

$$z'(t + h_m) + \sum_{n=0}^m (B_n(t) + D_n(t)) z(t + h_n) = 0$$

to be bounded as $t \rightarrow +\infty$ is that (i) all continuous column vector solutions of the unperturbed equation

$$y'(t + h_m) + \sum_{n=0}^m B_n(t) y(t + h_n) = 0$$

be bounded as $t \rightarrow +\infty$; (ii) $\int_{t_0}^{\infty} \|D_n(t)\| dt < \infty$ ($0 \leq n \leq m$) and (iii) $\|Y(s, t)\| < a$ constant c , for $t \geq t_0$, $t_0 \leq s \leq t$. Similar results for equations of "neutral type" (i. e. containing $z'(t + h_n)$ for $n < m$ as well as for $n = m$) and more special results when B_n is constant are also proved. The important innovation in method is the use of the solution $Y(s, t)$ of the adjoint equation. E. M. Wright.

Él'sgol'c, L. É.: Zur Theorie der Stabilität von Differentialgleichungen mit retardierten Argumenten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 14, Nr. 5, 65—71 (1960) [Russisch].

L'A. souligne quelques questions de la théorie générale de la stabilité pour les équations à argument retardé ou de type „neutre“. Il propose une définition générale de la stabilité dans laquelle interviennent des métriques déterminées dans l'espace des fonctions initiales et dans l'espace des solutions. On remarque que pour les équations du type neutre la métrique C^s est plus naturelle que C^0 ; on remarque aussi que dans quelques problèmes de mécanique il est naturel de considérer la stabilité par rapport à une famille déterminée de fonctions initiales. On établit des conditions pour l'équivalence entre la stabilité de la solution banale d'une équation d'ordre supérieur et celle de la solution banale du système correspondant. On introduit la notion de superstabilité qui est la stabilité d'une solution déterminée de façon unique par sa valeur dans le moment initial et on montre un exemple de stabilité de ce type. A la fin, on remarque que les résultats de Krasovskij [Priklad. Mat. Mech. 20, 316—327, 513—518 (1956)] sur la stabilité des solutions des systèmes à argument retardé restent valables dans le cas des systèmes de type neutre et on donne un exemple dans lequel on obtient la condition de stabilité à l'aide d'une fonctionnelle de Liapounoff convenablement choisie.

A. Halanay.

Hayashi, Kyuzo: On quasi-equicontinuous sets. Sets of solutions of a differential equation. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 32, 295 (1959).

Vgl. die in diesem Zbl. 81, 78 besprochene Arbeit.

Olech, C. et Z. Opial: Sur une inégalité différentielle. Ann. Polon. math. 7, 247—254 (1960).

Assegnata l'equazione differenziale (1) $y' = f(x, y)$, supposto che $f(x, y)$ in $B: 0 \leq x \leq h$, $-\infty < y < +\infty$ soddisfi alle condizioni di Carathéodory, cioè: a) per ogni y , $f(x, y)$ è misurabile rispetto a x ; b) per ogni x di $\langle 0, h \rangle$, $f(x, y)$ è continua rispetto a y ; c) esiste una funzione misurabile $M(x)$ tale che per ogni punto $(x, y) \in B: |f(x, y)| \leq M(x)$, $\int_0^h M(x) dx < +\infty$, è noto che (Cafiero, questo

Zbl. 32, 411) se $\varphi(x)$ è una funzione definita e assolutamente continua in $\langle 0, h \rangle$ soddisfacente quasi dappertutto in esso alla disuguaglianza $\underline{D}_+ \varphi(x) \leq f(x, \varphi(x))$, se $\psi(x, a, b)$ è l'integrale superiore a destra di (1) tale che $\psi(a) = b$, per cui $\varphi(0) \leq \psi(0)$, allora è $\varphi(x) \leq \psi(x, \xi, \varphi(\xi))$ ($\xi \leq x \leq h$). L'A. dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perchè sussista la tesi del teorema ora enunciato è che la $\varphi(x)$ sia a variazione limitata con parte singolare non decrescente.

L. Giuliano.

Lasota, A.: Sur l'effet épidermique extérieur et intérieur pour les inégalités différentielles ordinaires. Ann. Polon. math. 6, 259—264 (1959).

L'A. considera il sistema differenziale (1) $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e suppone: a) le f_i continue nell'insieme aperto Ω dello spazio (x, y_1, \dots, y_n) ; b) per ogni i ($i = 1, \dots, n$) e ogni coppia di punti $A_i(x, a_1, \dots, a_{i-1}, C, a_{i+1}, \dots, a_n)$ e $B_i(x, b_1, \dots, b_{i-1}, C, b_{i+1}, \dots, b_n)$ di Ω per cui $a_\nu \leq b_\nu$ ($\nu = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) si abbia $f_i(A_i) \leq f_i(B_i)$; c) per ogni coppia di punti $A(x, a_1, \dots, a_n)$ e $B(x, b_1, \dots, b_n)$ appartenenti al prodotto degli insiemi $\sum_{k=m+1}^n J_k$ e Ω e tali che $a_\nu \leq b_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) si abbia $f(A) - f(B) \leq \omega(x, a_i - b_i)$, in cui, se $y_i = \tau_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) indica l'integrale superiore a destra di (1) in: (2) $a \leq x < a + \alpha$, $\alpha > 0$ e $\varepsilon_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) sono funzioni definite in (2) ivi continue e positive, J_k ($k = m+1, \dots, n$) è l'insieme definito dalle disuguaglianze $a \leq x < a + \alpha$, $\tau_k(x) - \varepsilon_k(x) < y_k < \tau_k(x)$, $y_\nu \leq \tau_\nu(x)$ ($\nu = 1, \dots, m$), $y_\mu < \tau_\mu(x)$ ($\mu = m+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$); d) la funzione $\omega(x, z)$ è definita e continua nella striscia $a \leq x <$

$a + \alpha$, $-\infty < z \leq 0$ e tale che la funzione $\zeta(x) \equiv 0$ sia l'integrale inferiore a sinistra dell'equazione $z' = \omega(x, z)$ rispetto a ogni punto dell'intervallo (2). L'A. dimostra che se $y_i = \varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) è una curva continua in (2) giacente in Ω e tale che sia $\varphi_j(a) \leq \tau_j(a)$ ($j = 1, \dots, m \leq n$) e $\varphi_k(a) < \tau_k(a)$ ($k = m+1, \dots, n$) e, per ogni x di (2) per il quale $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in E_i$, [E_i ($i = 1, \dots, m$) essendo l'insieme definito dalle disuguaglianze $a \leq x < a + \alpha$, $\tau_j(x) < \tau_j < \tau_j(x) + \varepsilon_j(x)$, $y_v < \tau_v(x) + \varepsilon_v(x)$ ($v = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$), $y_\mu < \tau_\mu(x)$ ($\mu = m+1, \dots, n$)] oppure a τ_i se $i \geq m+1$, si ha la disuguaglianza $D\varphi_i(x) \leq f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ ($i = 1, \dots, n$), allora è in (2) $\varphi_j(x) \leq \tau_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$), $\varphi_k(x) < \tau_k(x)$ ($k = m+1, \dots, n$). La dimostrazione di questo teorema si basa su un teorema di W. Mlak (questo Zbl. 70, 310) il quale ha studiato a fondo il cosiddetto effetto epidermico nelle disuguaglianze differenziali ordinarie, scoperto nel 1951 da T. Ważewski (questi Zbl. 46, 313) e poi sfruttato in alcune applicazioni da J. Szarski (questo Zbl. 70, 93). Il teorema che l'A. dimostra nell'attuale Nota contiene, in particolare, un teorema di J. Mikusiński (questo Zbl. 32, 18).

L. Giuliano.

Kurzweil (Kurevejl'), Jaroslav and Zdeněk Vorel: Continuous dependence of solutions of differential equations on a parameter. Czechosl. math. J. 7 (82), 568—580, engl. Zusammenfassung 581—583 (1957) [Russisch].

In dieser Arbeit verallgemeinern die Verff. ein Ergebnis von M. A. Krasnosel'skij und I. G. Krejn. Es sei (*) $dx/dt = X(t, x, \lambda)$ eine Vektordifferentialgleichung, wo $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Von den rechten Seiten von (*) setzt man voraus: A. Die Vektorfunktion $X(t, x, \lambda)$ ist definiert für $x \in D$ (D ist eine offene Untermenge von E_m), $0 \leq t \leq T$, $\lambda \in A$ (A ist eine Zahlenmenge, welche den Häufungspunkt λ_0 enthält). Für $x \in D$, $\lambda \in A$ ist $X(t, x, \lambda)$ meßbar in t , und daneben gibt es eine L -integrierbare Funktion $m(t, \lambda)$ so, daß $\|X(t, x, \lambda)\| \leq m(t, \lambda)$ für $(t, x, \lambda) \in \langle 0, T \rangle \times D \times A$. Für $t \in \langle 0, T \rangle$, $\lambda \in A$ ist $X(t, x, \lambda)$ stetig in x . B. Es gilt

$$\|X(t, x_1, \lambda) - X(t, x_2, \lambda)\| \leq \psi(\|x_2 - x_1\|) \chi(t) \quad \text{für } x_1, x_2 \in D,$$

$\|x_2 - x_1\| \leq d$, $t \in \langle 0, T \rangle$, $\lambda \in A$, wo d eine bestimmte positive Zahl ist, $\psi(\delta)$ eine nicht fallende Funktion, definiert für $0 < \delta \leq d$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi(\delta) = 0$ und $\chi(t)$ ist eine

L -integrierbare Funktion, $\chi(t) \geq 1$, $\int_0^T \chi(t) dt < \infty$. C. Es existiert eine Lösung $x(t, \lambda_0)$ der Gleichung (*) für $\lambda = \lambda_0$, definiert auf dem Intervalle $\langle 0, \tau \rangle$, die durch die Anfangsbedingung eindeutig bestimmt ist. Unter den Voraussetzungen A., B., C. gilt folgender Satz über die stetige Abhängigkeit vom Parameter:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x, \lambda) d\tau = \int_0^t X(\tau, x, \lambda_0) d\tau$$

existiere gleichmäßig bezüglich x und t . Dann existiert für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Wenn $z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (*) für festes λ , $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x(0, \lambda_0) - z(0)\| < \delta$ ist, definiert für $t \in \langle 0, T_1 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$, dann existiert eine Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung (*) für dasselbe λ , definiert für $t \in \langle 0, \tau \rangle$, und sie erfüllt $u(t) = v(t)$ für $t \in \langle 0, \tau_1 \rangle$. $\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ für $t \in \langle 0, \tau \rangle$. Verff. behandeln auch die Differentialgleichung $d^n x/dt^n = X(t, x, \lambda)$. Unter analogen Voraussetzungen beweisen sie auch für diese Differentialgleichung einen ähnlichen Satz.

I. Vrkoč.

Kurzweil, Jaroslav: Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Czechosl. math. J. 7 (82), 418—449 (1957).

Verf. führt den Begriff der verallgemeinerten Differentialgleichungen ein, als ein sehr nützliches Mittel zur Untersuchung der stetigen Abhängigkeit der Lösungen vom Parameter. Verf. definiert vor allem das verallgemeinerte Perronsche Integral. Die Funktion $U(\tau, t)$ sei definiert im Gebiete $\tau_* \leq \tau \leq \tau^*$, $\tau - \delta(\tau) \leq t \leq \tau + \delta(\tau)$, wo $\delta(t)$ eine positive Funktion ist. Die Funktion $M(t)$ nennt man eine obere Funktion,

wenn $(\tau - \tau_0) [U(\tau, \tau_0) - U(\tau_0, \tau_0)] \leq (\tau - \tau_0) [M(\tau) - M(\tau_0)]$. Ähnlich definiert man eine untere Funktion $m(\tau)$. Wenn

$$\inf [M(\tau^*) - M(\tau_*)] = \sup [m(\tau^*) - m(\tau_*)]$$

gilt, wo $M(\tau)$ alle oberen Funktionen und $m(\tau)$ alle unteren Funktionen durchläuft, dann nennt man diese Zahl das verallgemeinerte Perronsche Integral, und man bezeichnet es mit $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$. (Dieses Integral kann auch mit Hilfe von Summen, die den

Riemannschen Summen ähnlich sind, definieren.) Verf. beweist eine Reihe von Grundsätzen, die in der Theorie des Integrals üblich sind. Der Zusammenhang mit dem Perronschen Integral fließt aus der folgenden Behauptung: Wenn $U(\tau, t) = f(\tau) \varphi(t)$ ist, wo $\varphi(t)$ eine endliche Variation hat, dann ist zur Existenz des Integrals

$\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ notwendig und hinreichend, daß das Perronsche Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau) d\varphi(\tau)$ existiert und diese Integrale einander gleich sind. Es sei eine Vektorfunktion $F(x, \tau, t)$ $[x = (x_1, x_2, \dots, x_n), F = (F_1, F_2, \dots, F_n)]$ gegeben. Man nennt eine Vektorfunktion eine Lösung der Differentialgleichung (*) $dx/d\tau = DF(x, \tau, t)$, wenn für beliebige τ_1, τ_2 die Beziehung $x(\tau_2) - x(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} DU$ gilt, wo $U(\tau, t) = F(x(\tau), \tau, t)$.

[Wenn $F(x, \tau, t) = f(x, \tau) t$ oder $F(x, \tau, t) = \int_{\tau}^t f(x \sigma) d\sigma$, ist (*) äquivalent mit $dx/d\tau = f(x, \tau)$.] Bemerken wir, daß die Gleichung (*) autonom ist (das heißt mit $x(t)$ auch $x(t + \delta)$ eine Lösung ist), wenn die Differenz $F(x, \tau + \zeta, t + \zeta + \sigma) - F(x, \tau + \zeta, t + \zeta)$ nicht von ζ abhängt. Verf. entwickelt die Theorie der verallgemeinerten Differentialgleichungen unter folgenden Voraussetzungen: $G \subset E_{n+1}$ ist eine offene Menge, $\omega_i(\eta)$, $i = 1, 2$, sind stetig und nicht fallend für $0 \leq \eta \leq \sigma$ ($\sigma > 0$), $\omega_i(\eta) \geq c \eta$ ($c > 0$), $\omega_i(0) = 0$, $F = F(G, \omega_1, \omega_2, \sigma)$ sei eine Menge von in G definierten und stetigen Funktionen $F(x, t)$, die die Ungleichungen

$\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leq \omega_1(|t_2 - t_1|)$ für $(x, t_1), (x, t_2) \in G$, $|t_2 - t_1| \leq \sigma$,
 $\|F(x_2, t_2) - F(x_2, t_1) - F(x_1, t_2) + F(x_1, t_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \omega_2(|t_2 - t_1|)$ für $(x_i, t_j) \in G$ ($i, j = 1, 2$), $\|x_2 - x_1\| \leq 2\omega_1(\sigma)$, $|t_2 - t_1| \leq \sigma$ erfüllen. Man setzt voraus, daß

$\eta^{-1} \psi(\eta)$ nicht fallend ist, wo $\psi(\eta) = \omega_1(\eta) \omega_2(\eta)$ und daß $\sum_{1}^{\infty} 2^k \psi(2^{-k} \sigma) < \infty$.

Eine Lösung $x(\tau)$, definiert auf dem Intervalle $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, nennt man regulär, wenn zu einem beliebigen $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ eine Zahl $\lambda > 0$ existiert so, daß $\|x(\tau_4) - x(\tau_3)\| \leq 2\omega_1(|\tau_4 - \tau_3|)$ für $\tau_3, \tau_4 \in \langle \tau - \lambda, \tau + \lambda \rangle \cap \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Existenzsatz. Es sei $F \in F$ und K eine kompakte Untermenge von G . Dann existiert eine Zahl $\sigma^* > 0$ so, daß zum beliebigen Punkt $(t_0, x_0) \in K$ eine reguläre Lösung $x(t)$ von (*) mit $x(t_0) = x_0$ existiert, die auf dem Intervall $\langle t_0 - \sigma^*, t_0 + \sigma^* \rangle$ definiert ist. Der zweite Satz behandelt die stetige Abhängigkeit vom Parameter. Es sei $x_0(\tau)$ eine reguläre Lösung von (*) auf $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, und es sei eindeutig von rechts in der Klasse der regulären Lösungen von (*). Zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ kann man eine Zahl $\delta > 0$ so finden, daß für eine beliebige $F_1(x, t) \in F$, für welche $\|F_1 - F\| < \delta$ für $(x, t) \in G$ gilt und wenn $y(\tau)$ eine reguläre Lösung von (**) $dx/d\tau = DF_1(x, \tau)$, definiert auf

$\tau_1, \tau_2 \subset \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ — wobei $\|y(\tau_1) - x(\tau_1)\| \geq \delta$ — ist, dann existiert eine reguläre Lösung $x(\tau)$ von (**), definiert auf $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ so, daß $x_1(\tau) = y(\tau)$ auf $\langle \tau_1, \tau_3 \rangle$ und $\|x_1(\tau) - x_0(\tau)\| < \varepsilon$ auf $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Verf. beschäftigt sich weiter mit verallgemeinerten linearen Differentialgleichungen. Mit deren Hilfe kann man jedes dynamische System, welches im Euklidischen Raum definiert ist, ausdrücken. Die verallgemeinerten Differentialgleichungen mögen auch zur Lösung von Differentialgleichungen dienen, deren rechte Seiten und deren gesuchte Lösungen nicht differenzierbare Funktionen sind.

Kimura, Tosihusa: Sur la propriété d'Iversen et l'équation différentielle ordinaire du second ordre. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 8, 63—70 (1960).

Verf. behandelt gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$w'' = P(z, w, w')/Q(z, w, w') \quad \text{mit} \quad P = \sum_{l=0}^n a_l(z, w) w'^l, \quad Q = \sum_{l=0}^m b_l(z, w) w'^l.$$

Die $a_l(z, w)$ bzw. $b_l(z, w)$ sind Polynome in w , deren Koeffizienten holomorphe Funktionen in einem Gebiet D der z -Ebene sein sollen. Unter der Voraussetzung $m + 2 < n$ wird dann der folgende Satz bewiesen: Sind p_1 und p_2 zwei Punkte von D , die durch ein in D verlaufendes Kurvenstück L verbunden werden, so besitzt jede analytische Lösung der Differentialgleichung ein Funktionselement mit dem Entwicklungszentrum p_1 , welches längs L bis zu einem beliebig nahe bei p_2 gelegenen Punkt analytisch fortgesetzt werden kann. L darf dabei — einschließlich seiner Endpunkte — eine Menge von isolierten und abzählbar vielen Punkten nicht passieren. die Verf. „feste Singularitäten der Differentialgleichung“ nennt (hierzu gehören z. B. die Punkte x der z -Ebene mit $Q(x, w, w') \equiv 0$). H. Schubart.

• **Poole, E. G. C.:** Introduction to the theory of linear differential equations. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1936. New York: Dover Publications, Inc. 1960. VIII, 202 p. \$ 1,65.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in diesem Zbl. 14, 58.

Veyrunes, Jean: Décomposition d'un opérateur linéaire en produit. Application à la résolution de problèmes aux limites. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 1787—1788 (1960).

Das lineare Randwertproblem $\sum_{i=0}^n \gamma_i(x) y^{(n-i)}(x) + \mu(x) = 0$,

$$A_k(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-m,$$

$$B_j(y(l), y'(l), \dots, y^{(n-1)}(l)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

wird in zwei Anfangswertprobleme zerlegt (Faktorenzerlegung des linearen Differentialoperators). Setzt man $\sum_{i=0}^m \beta_i(x) y^{(m-i)}(x) + \beta(x) = 0$ ($\beta_0 \equiv -1$), dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem für $\beta_i(x)$ und $\beta(x)$ der Ordnung $n-m$. Die Funktionen $\beta_i(x)$ und $\beta(x)$ sind durch Anfangsbedingungen für $x=0$ eindeutig festgelegt, die restlichen Bedingungen für $x=l$ bestimmen dann das Anfangswertproblem für $y(x)$. Ein Beispiel erörtert die Schwierigkeiten, die beim Auflösen nach den $\beta_i(0)$ auftreten können. F. Selig.

Krzywicka, E.: On the solutions of the differential equation $x^{(n)} + A(t)x = 0$ satisfying the conditions at several points. Prace mat. 2, 337—349, russ. und engl. Zusammenfassung 350—351 (1958) [Polnisch].

Dans le présent travail l'A. s'occupe du problème d'interpolation suivant: Étant donnés r nombres $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, puis r suites de nombres naturels $\leq n$, $j_{\mu 1} j_{\mu 2} \dots j_{\mu q_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, r$), telles que $q_1 + \dots + q_r = n$, et, finalement, n valeurs arbitraires $c_{11}, \dots, c_{1q_1}; c_{21}, \dots, c_{2q_2}; \dots; c_{r1}, \dots, c_{rq_r}$, on se demande, s'il existe une intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle (1) $x^{(n)} + A(t)x = 0$, qui vérifie les conditions (2) $x^{(j_{\mu\nu}-1)}(a_\mu) = c_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, r; \nu = 1, 2, \dots, q_\mu$). Par la méthode des déterminants combinés de J. G. Mikusiński (dies. Zbl. 61. 176) on démontre que la question d'existence d'une intégrale unique de l'équation (1), satisfaisant aux conditions (2), résulte indépendante des nombres $c_{\mu\nu}$ et des suites $\{j_{\mu\nu}\}$. Le problème d'interpolation en question admet une seule solution, lorsque $A(t) > 0$ et les nombres q_2, \dots, q_r sont pairs ou bien lorsque $A(t) < 0$, les nombres $q_2, \dots, q_{r-1}, q_r + 1$ étant encore pairs. Dans le cas $n \leq 6$ on démontre

ceci: Si pour toute fonction $A(t) > 0$ ($A(t) < 0$) et tous les nombres $a_1 < a_2 < \dots < a_r$; q_1, q_2, \dots, q_r , le problème considéré admet une seule solution, les nombres q_2, \dots, q_r ($q_2, \dots, q_{r-1}, q_r + 1$) sont nécessairement pairs. M. Ráb.

Anghel, C. et C. Virsan: Sur le comportement asymptotique des solutions des équations linéaires. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 11 (64), 532—534, russ. und französ. Zusammenfassung 534 (1959) [Rumänisch].

Soient les équations (1) $y^{(n)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_0y = 0$, (2) $y^{(n)} + b_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + b_0y = 0$ et u_i , $i = 1, \dots, n$, des solutions indépendantes de (1) dont le wronskien est égal à 1. Soient U_i les mineurs de la dernière ligne du wronskien. Si

$$\int \left[\sum_{k=0}^{n-2} |a_k(x) - b_k(x)| \sum_{j=1}^n |u_j^{(k)}(x)| \right] \sum_{k=1}^n |U_k(x)| dx < \infty$$

alors la solution générale de (2) est de la forme

$$y = \sum_{k=1}^n [c_k + \varepsilon_k(x)] u_k, \quad y^{(j)} = \sum_{k=1}^n [c_k + \varepsilon_k(x)] u_k^{(j)}, \\ j = 1, \dots, n-1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_k(x) = 0.$$

C'est une généralisation d'un résultat de A. Wintner (ce Zbl. 80, 69).

A. Halanay.

Tondl, Aleš: Méthode pour la détermination des zones labiles dans les systèmes quasi-harmoniques. Českosl. Akad. Věd, apl. Mat. 4, 278—288, russ. und französ. Zusammenfassung 288—289 (1959) [Tschechisch].

Verf. untersucht das System

$$(1) \quad \ddot{y}_s + \sum_{k=1}^n a_{sk} y_k + \varepsilon \sum_{k=1}^n (q_{sk}(t) \dot{y}_k + p_{sk}(t) y_k) = 0,$$

wo a_{sk} Konstanten und $p_{sk}(t)$ sowie $q_{sk}(t)$ periodische Funktionen mit der Periode $2\pi/\omega$ sind. Er fragt, für welche Werte von ω die Lösungen von (1) instabil sind. Man setzt voraus, daß die charakteristische Gleichung $\det(a_{sk} - \lambda^2 \delta_{sk}) = 0$, die dem verkürzten System $\ddot{y}_{sk} + \sum a_{sk} y_k = 0$ entspricht, einfache Wurzeln $\pm i\Omega_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, Ω_j reell, die keine Relation der Form $\Omega_j - \Omega_k = 2N\pi$, N ganze Zahl, befriedigen, hat. Für einige spezielle Systeme (z. B. kanonische) ist bekannt, daß die Instabilitätsbereiche nur für ω in der Nähe der Werte $(\Omega_j + \Omega_k)/N$, N ganze Zahl, vorkommen können. Darum sucht Verf. auch im gegebenen Falle die Instabilitätsbereiche nur in der Umgebung der eben genannten Werte. Er benutzt dazu die Šimanovsche Methode zur Bestimmung periodischer Lösungen und die Malkinsche Methode zur angenäherten Bestimmung des charakteristischen Exponenten einer periodischen Lösung. Die Prozedur wird an einem Beispiel erläutert. Es gibt in der Arbeit einige Druckfehler.

O. Vejvoda.

Filimonov, Ju. M. (Ju. M.): On the stability of solutions of differential equations of second order. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 846—849 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 596—598 (1959).

The author assumes that n functions $V_j(x, y)$, $(x, y) \in G_j$ are defined and that each V_j is continuous, single-valued in G_j . He supposes that any two consecutive regions G_1, \dots, G_n, G_1 contain a certain unique simple continuous curve passing through the origin (these curves are called L -curves). He assumes that each V_j is positive in G_j , except at the origin where it vanishes, and varies strictly monotonically along the boundary curves. Under these assumptions, there is a neighborhood U of the origin such that starting from an arbitrary point A on one of L -curves within U , it is possible to construct, selecting one sense for going around the origin, a continuous curve consisting of pieces along which the corresponding V_j is constant. This curve will intersect the initial L -curve at a point B . If we assume that A never coincide with B , then we always have $V(A) < V(B)$ or $V(A) > V(B)$ for any

of V_j defined on the initial L -curve. Choosing a definite direction, the author says that the set of n functions V_j have positive or negative rotation depending on whether $V(A) < V(B)$ or $V(A) > V(B)$. Using these functions, the author discusses the stability of $x' = X(x, y)$, $y' = Y(x, y)$, where X, Y are continuous in a neighborhood of the origin and vanish when $x = y = 0$, and he proves some theorems analogous to those of Ljapunov. For example, he proves the following theorem: If it is possible to find two sets of functions having opposite rotations such that the time derivative of each of these functions by virtue of the system is negative or vanishes in the region of its definition, then the zero solution is stable. *T. Yoshizawa.*

Klokov, Ju. A.: Eine Randwertaufgabe auf der Halbgeraden für die Gleichung $\ddot{x} + \dot{x}f(x, \dot{x}) + \varphi(x) = 0$. Izvestija vysš. učebn. Zaved., Mat. 6 (13), 72—80 (1959) [Russisch].

Supposons que $f, \varphi \in C^1$, $x \cdot \varphi(x) < 0$ pour $x \neq 0$ et qu'il existe deux fonctions $a = a(x)$ et $b = b(x)$ telles que $|f(x, y)| \leq a(x)|x| + b(x)$ pour tous les x et y . Alors pour chaque x_0 il existe une et une seule solution $x = x(t)$ de l'équation (1) $\ddot{x} + \dot{x}f(x, \dot{x}) + \varphi(x) = 0$ telle que $x(0) = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. L'A. donne quelques autres résultats concernant l'équation (1). *K. Tatarkiewicz.*

Colombo, Giuseppe: Sulle orbite stabili in un sincrotrone con tratti rettilinei. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 46, 249—263 (1958).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung $y'' + \varphi(y, t)y = p(t)$, auf die das Studium der Bahnen in einem Synchrotron führt. Dabei sind die stückweise stetigen Funktionen φ, p wie folgt definiert. Für $t_k = k(\frac{1}{2}\pi + c) \leq t \leq \frac{1}{2}(k+1)\pi + kc = t'_k$: $\varphi(y, t) = \omega^2$, $-a \leq y \leq a$; $= m(y - a)$, $y \geq a$; $= m(y + a)$, $y \leq -a$ und für $t'_k \leq t \leq t_{k+1}$ $\varphi(y, t) = 0$, y beliebig. Für $t_k \leq t \leq t'_k$

$$p(t) = \sum_{r=1}^6 [a_r \cos r(t - kc) + b_r \sin r(t - kc)],$$

wobei $a_r^2 + b_r^2 \leq \alpha_r^2$, und für $t'_k \leq t \leq t_{k+1}$: $p(t) = 0$. Es wird verlangt, die Lösungen (bzw. die Anfangsbedingungen dieser Lösungen) zu bestimmen, die über $[0, +\infty)$ definiert und stetig sind, und deren Betrag außerdem bei beliebigen Fourierkoeffizienten mit der angegebenen Einschränkung eine vorgeschriebene Schranke $\alpha + \delta$ zuläßt. Ähnliche Probleme sind schon früher bearbeitet worden (Sansone, dies. Zbl. 78, 274 und Olech, dies. Zbl. 82, 84). Verf. beschränkt sich auf den linearen Fall und fragt nach einer stabilen Lösungsschar (die die erwähnte Eigenschaft hat). Er erhält notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und analytische Darstellbarkeit solcher Lösungen. Diese Bedingungen sind sehr kompliziert; daneben werden einfachere angegeben, die nur hinreichend sind. Solange man sich für den Bereich $|y| \leq a$ interessiert, ist die lineare Gleichung vom Hillschen Typ $y'' + \omega^2(t)y = 0$ [ω^2 konstant und $\neq 0$ für $t_k \leq t \leq t'_k$, aber $= 0$ für $t'_k \leq t \leq t_{k+1}$] maßgebend; ihre Stabilitätsbedingung, die von nun an vorausgesetzt wird, lautet $2|I| = |2\cos(\frac{1}{2}\pi\omega) - c\omega \sin(\frac{1}{2}\pi\omega)| < 2$. Somit hat die allgemeine Lösung die Gestalt $y = c_1 \varphi_1(t) \cos \sigma t + c_2 \varphi_2(t) \sin \sigma t$ (c_i willkürliche Konstante, $\varphi_i(t)$ periodisch mit der Periode $\frac{1}{2}\pi + c$, $\sigma = \pm (\log \lambda)/(\frac{1}{2}\pi + c)$ mit $\lambda^2 - 2\lambda I + 1 = 0$). Bei der inhomogenen Gleichung, deren rechte Seite $p(t)$ periodisch mit der Periode $2\pi + 4c$ ist, bezeichnet Verf. mit $p^*(t)$ das periodische partikuläre Integral; die allgemeine Lösung ist demnach $y(t) = p^*(t) + c_1 \varphi_1(t) \cos \sigma t + c_2 \varphi_2(t) \sin \sigma t$. Für $p^*(t)$ wird bei unbestimmten, nur hinsichtlich des Moduls beschränkten Fourierkoeffizienten a_r, b_r eine obere Schranke gesucht. Zu dem Zweck setzt man $p^*(t) = p_1^*(t) + \dots + p_6^*(t)$, wobei $p_r^*(t)$ die partikuläre Lösung für die rechte Seite $a_r \cos r(t - kc) + b_r \sin r(t - kc)$ ist, und berechnet die Funktionen $p_r^*(t)$. Dann schreibt man $a_r = \varrho_r \cos \varphi_r$, $b_r = \varrho_r \sin \varphi_r$, $|p^*(t)| = g(t, \varrho_r, \varphi_r)$ und fragt nach dem Maximum von g im Bereich $0 \leq t \leq 2\pi + 4c$, $0 \leq \varphi_r \leq 2\pi$, $0 \leq \varrho_r \leq \alpha_r$.

Das Problem wird einfacher, wenn man Schranken π_r für die Beträge $|p_r^*(t)| = g_r(t, q_r, \varphi_r)$ berechnet und $|p^*(t)| \leq \pi_1 + \dots + \pi_r = \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_6) \leq a$ verlangt. Wie sich die stabile Lösungsschar bestimmen läßt, erörtert Verf. am Schluß seiner Arbeit. Die aufgestellten Formeln wendet er auf ein Zahlenbeispiel an.

R. Reißig.

Lillo, James C.: Perturbations of nonlinear systems. Acta math. 103, 123—138 (1960).

On considère les systèmes (1) $\dot{x} = A(t)x$, (2) $\dot{z} = [A(t) + B(t)]z$, A, B matrices bornées. Si pour tout $\mu > 0$ il y a un ensemble de n solutions $x^j(t)$ et une matrice fondamentale de solutions $\Phi(t)$ telles que $\|x^j(t)\| \leq h(\mu)e^{(\lambda_j + \mu)t}$, $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq h(\mu)e^{\lambda_j(t-s) + \mu|t-s|}$ ($[A]_j$ est la ligne j de la matrice A), alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|B\| < \delta$ le système (2) admet n solutions indépendantes $z^j(t)$ telles que $\|z^j(t)\| \leq k(\varepsilon)e^{(\lambda_j + \varepsilon)t}$. Un théorème analogue est établi pour le système adjoint et l'on en déduit un théorème sur la continuité des exposants caractéristiques. L'A. ne fait pas référence aux résultats de D. M. Grobman (ce Zbl. 46, 317). On prouve aussi l'existence d'une solution bornée pour un système de la forme $\dot{z} = [D + \sigma(\mu, t)]z + c(z, \mu, t)z + f(\mu, t)$, D étant une matrice diagonale constante à éléments différents de zéro et on applique ce résultat au cas presque-périodique. Ces faits peuvent être obtenus comme une conséquence immédiate des résultats généraux de J. L. Massera et J. J. Schäffer [Ann. of Math. II. Ser. 67, 517—573 (1958), spéc. 553—567].

A. Halanay.

Shen, Chi-neng: Stability of forced oscillations with nonlinear second-order terms. J. appl. Mech. 26, 499—502 (1959).

Verf. leitet aus einem Beispiel der Regelungstechnik die Differentialgleichung

$$d^2(Y + \beta Y^3)/dt^2 + M d(Y + \mu Y^3)/dt + Y = G_1 \cos pt + G_2 \sin pt$$

her und stellt sich die Aufgabe, periodische Lösungen zu berechnen und ihre Stabilität zu untersuchen. Er beginnt mit dem Sonderfall $M = G_2 = 0$ und wendet das Iterationsverfahren an, indem er die k -te Approximationsstufe durch die Gleichung

$$d^2 Y_k / dt^2 + p^2 Y_k = -d^2(\beta Y_{k-1}^3) / dt^2 + (p^2 - 1) Y_{k-1} + G_1 \cos pt$$

bestimmt und den Prozeß mit der Funktion $Y_0 = A \cos pt$ beginnt. Auch bei den folgenden Näherungen wird die Grundharmonische mit $A \cos pt$ identifiziert. Da auf der rechten Seite der Gleichung die Grundharmonischen verschwinden müssen, um eine periodische Lösung zu erhalten, ergibt sich eine Beziehung zwischen A und p , die schrittweise verbessert wird. Verf. diskutiert das Resonanzdiagramm, in dem die Größe A für verschiedene Werte G_1 als Funktion von p dargestellt ist. Danach führt er Stabilitätsuntersuchungen auf Grund der 1. Näherung durch. Nach der Störungsmethode wird die Grenze des Stabilitätsbereichs in der Ebene zweier geeignet ausgewählter Parameter abgeschätzt. Schließlich wird der allgemeine Fall in entsprechender Weise behandelt. Überlegungen hinsichtlich der Konvergenz des Verfahrens werden nicht angestellt.

R. Reißig.

● Popov, E. P.: Automatische Regelung. Grundbegriffe. [Avtomaticheskoe regulirovanie. Osnovnye ponjatija.] 3. stereotype Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 296 S. R. 5,90 [Russisch].

Die vorgelegte Arbeit ist als Einleitung in die Technik der automatischen Regelung bestimmt, und zwar für Leser ohne tiefere Kenntnisse der Mathematik. Im ersten Abschnitt erläutert der Verf. an Hand einfacher, der technischen Praxis entnommener Beispiele eingehend den Begriff und die Bedeutung der automatischen Regelung der elektronischen und Maschineneinrichtungen. In den folgenden zwei Kapiteln werden Übergangsfunktionen bei den Regelungselementen der ersten und der zweiten Ordnung und in den einfachen linearen Kreisen (ohne Anwendung der Operatorenrechnung) erläutert. Der Stabilitätsbegriff wird nicht einmal bei den linearen Kreisen allgemein erörtert. Das vierte und zugleich letzte Kapitel ist

den Eigenschaften der Regelkreise mit nichtlinearen Gliedern und Gliedern mit unstetiger Funktion gewidmet. Verf. analysiert darin das Verfahren für die Lösung in der Phasenebene, erläutert die Entstehung selbsterregter Schwingungen in den Relaiskreisen und legt die Grundlagen der analytischen Lösung mit der Methode der harmonischen Balance dar. Das Buch ist verständlich geschrieben, und man muß es deshalb vom Gesichtspunkt der instruktiven Erläuterung der Grundlagen der Regelungstheorie aus sehr positiv bewerten.

J. Rippl.

● **Gorskaja, N. S., I. N. Krutova und V. Ju. Rutkovskij:** Dynamik der nichtlinearen Servomechanismen. [Dinamika nelinejnych servomechanizmov.] Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1959. 319 S. R. 16,60 [Russisch].

In dem Buch werden Servomechanismen oder Folgeregelungen verschiedener technischer Bauart, nämlich Relaisysteme, hydraulische und pneumatische Folgesysteme bzw. kombinierte Systeme untersucht, wobei typische Nichtlinearitäten wie Hysterese, Totzone, trockene Reibung und Sättigung berücksichtigt werden, mitunter auch Totzeit. Man beschränkt sich auf Systeme, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter oder dritter Ordnung beschrieben werden. Die Systeme werden in der Phasenebene oder mit Hilfe der Punkttransformation nach Andronov untersucht. Besonderer Wert wird auf die Entstehung von selbsterregten Schwingungen und Gleitzuständen gelegt. Während 6 Kapitel die verschiedenen Servosysteme ausführlich behandeln, enthält Kap. 2 eine Einführung in die Methoden der Phasenebene (singuläre Punkte, Grenzzyklen, Bifurkationspunkte, mehrblättrige Phasenebene) und die Theorie der Punkttransformation.

R. Herschel.

● **Bedel'baev, A. K.:** Die Stabilität nichtlinearer Regelsysteme. [Ustojčivost' nelinejnych sistem avtomatičeskogo regulirovanija.] Alma-Ata: Verlag der Akademie der Wissenschaften der Kazachischen SSR 1960. 163 S. R. 7,— [Russisch].

Das Buch behandelt ein Problem, das erstmalig von Lur'e formuliert und seitdem von zahlreichen — meist sowjetischen — Autoren bearbeitet wurde: Das Verhalten eines Regelungssystems mit Hilfsenergie und einem integral wirkenden nichtlinearen Stellglied wird mathematisch beschrieben durch das System

$$(1) \quad \dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^n b_{sk} \eta_k + n_s \xi \quad (s = 1, 2, \dots, n); \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{s=1}^n j_s \eta_s - r \xi.$$

Dabei sind die η_s die allgemeinen Koordinaten des Systems, ξ ist die Stellgröße, σ das Eingangssignal für den Stellmotor. Die b_{sk} sind Systemparameter, die j_s Parameter des Reglers, r der (nichtnegative) Rückführungskoeffizient, die n_s charakterisieren die Wirkung des Reglers auf das System. Die Stellmotorcharakteristik $f(\sigma)$ wird als den Bedingungen (2) $f(0) = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ für $\sigma \neq 0$ genügend vorausgesetzt. Gesucht ist der Bereich im Parameterraum der j_s , für den die Ruhelage von (1) „absolut stabil“ ist, d. h. asymptotisch stabil im Ganzen für beliebige nichtlineare Funktionen $f(\sigma)$, die der durch (2) gegebenen Klasse angehören. Das Buch gibt in übersichtlicher Darstellung die diesbezüglichen Ergebnisse von Lur'e, Letov, Malkin, Razumichin und Čžan Sy-In, ergänzt durch wesentliche Resultate des Verf. Hilfsmittel aller Untersuchungen ist die direkte Methode von Ljapunov. Zum Aufbau im einzelnen: Kap. 1 bringt eine Einführung in die Theorie der automatischen Regelung, Kap. 2 die Grundtatsachen über Stabilität und direkte Methoden bei stationären Bewegungen. Ausführlich werden verschiedene Möglichkeiten zur expliziten Konstruktion Ljapunovscher Funktionen für die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten behandelt. — Im 3. und 4. Kap. wird der „historische“ Lösungsweg von Lur'e dargestellt: Transformation des Systems auf eine spezielle, „kanonische“, Form

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f(\sigma) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k - r f(\sigma)$$

(die λ_s sind Wurzeln von $|\dot{b}_{sk} - \lambda \delta_{sk}| = 0$, Voraussetzung: (3) $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$). Hieraus Ableitung eines Stabilitätskriteriums: der Ansatz einer Ljapunovschen Funktion führt zu einem System quadratischer Bedingungsgleichungen für ihre Koeffizienten. Hat dieses System reelle bzw. konjugiert komplexe Lösungen, so ist (1) absolut stabil. Der Fall $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$ erfordert Sonderbetrachtungen. Kap. 5 bringt Stabilitätskriterien von Letov und Malkin — beide basieren auf der kanonischen Form der Differentialgleichungen und der Zusatzannahme $\lambda_s < 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$) — sowie ein „vereinfachtes Kriterium“ des Verf., das direkt auf dem System

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^n b_{sk} x_k + n_s f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^n j_k x_k - r f(\sigma)$$

(aus (1) mit $\dot{\eta}_s = x_s$) aufbaut: es hat die Form einer Ungleichung mit $n^2 + 1$ freien Parametern. Zwei Möglichkeiten zur Auswertung werden angegeben: jeweils werden gewisse Parameter festgehalten, zur Gesamtheit der durch die noch variierenden Parameter charakterisierten Flächen im $\{j_s\}$ -Raum wird die Hüllfläche betrachtet. Eine notwendige Bedingung, $\sum_{k=1}^n n_k j_k < 0$, wurde bereits von Lur'e angegeben. Kap. 6 beschäftigt sich mit eigeninstabilen Bewegungen: man läßt $\operatorname{Re} \lambda_s > 0$ zu, fordert aber für $f(\sigma)$ statt (2) $f(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma)$, $h > 0$, $\varphi(0) = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ für $\sigma \neq 0$ und für das mit $\varphi(\sigma) \equiv 0$ entstehende lineare System ($n+1$)-ter Ordnung Nichtpositivität der Eigenwerte ε_s ($s = 1, 2, \dots, n+1$). Die besprochenen Methoden bleiben dann anwendbar. — Im 7. Kap. wird das Verhalten des Systems an der Grenze des Stabilitätsbereiches (für einige ε_s gilt $\operatorname{Re} \varepsilon_s = 0$) untersucht, für vier Fälle werden explizite Kriterien für die Einteilung der Grenze in „gefährliche“ und „ungefährliche“ Abschnitte (nach Bautin) gegeben. — Das abschließende 8. Kap. bringt einige Methoden zur Behandlung instationärer Systeme [mit zeitabhängigen Funktionen $b_{sk}(t)$, $n_s(t)$]: Methode des kleinen Parameters, Malkinsche Transformation, Kriterium von Persidskij. Zahlreiche Beispiele am Schluß der Paragraphen demonstrieren — meist im einfachsten Fall des Systems 2. Ordnung — die Anwendbarkeit der gegebenen Kriterien. — Das Buch wendet sich an Ingenieure und Hochscholstudenten.

W. Müller.

Rubel, Ch. V.: A criterion of control inaccuracy. Automat. Remote Control 20, 831—835 (1960), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. 20, 856—859 (1959).

Als Gütekriterium für Regelkreise wird oft der Mittelwert $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$ irgendeiner Größe P herangezogen, die von der Regelabweichung x abhängt. Entwickelt man $P(x)$ in eine Taylor-Reihe, so ergibt sich der Mittelwert \bar{P} als Summe der mit den Taylor-Koeffizienten multiplizierten Mittelwerte der Potenzen von x . Unter stark vereinfachenden Bedingungen (Nullsetzen der 1. Ableitung, Vernachlässigung der 3. und höheren Ableitungen) ergibt sich eine Näherungsformel, nach der die Regelgüte nur noch vom quadratischen Mittelwert abhängt.

H. Schließmann.

Gamkrelidze, R. V.: On the general theory of optimal processes. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 223—226 (1958) [Russisch].

Das von Pontrjagin aufgestellte Maximumprinzip wird hier verwendet, um die optimalen Lösungen eines Systems $\dot{x} = f(x, u)$ (x und f sind Vektoren) für den Fall zu finden, daß die Zustandsgrößen x beschränkt sind. Die Grenze des zulässigen Bereiches im Raume der x wird als glatte $(n-1)$ -dimensionale Fläche vorausgesetzt. Eine Erweiterung auf stückweise glatte Begrenzungsflächen ist möglich. Ziel der Arbeit ist die Bestimmung der Stellgröße $u(t)$, so daß $x(t)$ z. B. im Sinne eines schnellsten Einschwingens optimal wird. Einige allgemeine Eigenschaften von $x(t)$ werden bestimmt, und es wird eine allgemeine Regel zur Bestimmung regulärer optimaler Lösungen angegeben.

K. Magnus.

Gamkrelidze, R. V.: Optimum-rate processes with bounded phase coordinates. Doklady Akad. Nauk SSSR 125, 475—478 (1959) [Russisch].

Für dynamische Systeme, die hinsichtlich der Schnelligkeit des Einschwingens in eine Gleichgewichtslage optimal sind, hat Pontrjagin 1956 ein „Maximumprinzip“ formuliert, das die im System noch wählbaren Stellgrößen $u(t)$ aus einem System Hamiltonscher Gleichungen zu bestimmen gestattet. Dieses Prinzip wird jetzt erweitert auf Systeme, bei denen nicht die Einschwingzeit, sondern irgend-
ein beliebiges Funktional vom Typ $x^0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f[\bar{x}^0(t), u(t)] dt$ zum Minimum gemacht wird.

K. Magnus.

Krasovskij (Krasovskii), N. N.: A contribution to the theory of the optimum regulation of non-linear second order systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 267—270 (1959) [Russisch].

Das von Pontrjagin und seinen Mitarbeitern mehrfach behandelte Problem der Optimierung wird hier für ein rheonomes System von 2 nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung formuliert. Gegeben ist das System $\dot{x} = f(x, t) + q(t) \eta$ mit den zweidimensionalen Vektoren x, f, q . Gesucht ist ein solches $\eta_0(t)$ mit $|\eta_0(t)| \leq 1$, daß der Bildpunkt $x(t)$ in kürzester Zeit von einem vorgegebenen Punkt x_0 in die Ruhelage $x = 0$ übergeht. Es werden ohne Beweis 6 Sätze angegeben, die sich auf die Existenz einer optimalen Lösung, auf notwendige und hinreichende Kriterien für ein Optimum und auf die Möglichkeiten der iterativen Bestimmung von $\eta_0(t)$ für optimales $x(t)$ beziehen.

K. Magnus.

Mišchenko (Michshenko), E. F. and L. S. Pontrjagin (Pontriagin): One statistical problem on optimal control. Doklady Akad. Nauk SSSR 128, 890—892 (1959) [Russisch].

Es wird ein dynamisches System betrachtet, dessen Differentialgleichungen in der Normalform $\dot{z}^i = f^i(z^1, \dots, z^n, u)$, $i = 1, \dots, n$ vorliegen. Die Bewegungen des Bildpunktes im n -dimensionalen Phasenraum mit den Koordinaten z^i werden durch die Stellgröße $u = u(t)$ beeinflusst. Es wird jetzt ein solches $u(t)$ gesucht, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig wandernder Punkt Q in eine vorgegebene kleine Umgebung des Punktes z fällt, ein Maximum wird. Für die Verteilungswahrscheinlichkeit der möglichen Lagen von Q wird angenommen, daß sie der ersten der von Kolmogorov aufgestellten Differentialgleichungen genügt.

K. Magnus.

Pavlov, A. A.: Optimum transient processes in systems with a restricted third derivative. Automat. Remote Control 20, 992—1007 (1960), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. 20, 1020—1036 (1959).

Der betrachtete Regelkreis besteht aus drei I -Gliedern und einem Zweipunkt-Relais. Durch das Zusammenwirken dieser drei Glieder kann die dritte Ableitung der Regelgröße nur begrenzte Werte annehmen. Die Form des optimalen Einschwingvorganges für beliebige Anfangsbedingungen wird angegeben. Für den Anstoß durch eine Sprungfunktion wird der Aufbau eines Rechengerätes angegeben, das in dem Regelkreis vor das Zweipunkt-Relais einzubauen ist, um günstigste Regelvorgänge zu erhalten. Die Rechnung baut auf Betrachtungen in der Zustandsebene auf. Die Ergebnisse sind durch Untersuchungen am Analog-Rechner bestätigt worden.

W. Oppelt.

Lehnigk, S.: Das zeitliche Verhalten eines linearen Regelkreises mit periodischem Taster. Regelungstechnik 5, 271—273 (1957).

Es wird zunächst das Verhalten eines linearen Regelkreises mit periodischem Taster (sampling element) ohne Einfluß äußerer Störungen untersucht und die dieses Verhalten beschreibende (homogene lineare) Differenzengleichung (mit konstanten Koeffizienten) aufgestellt; hierzu wird die Laplace-Transformation benutzt

und vorausgesetzt, daß das charakteristische Polynom nur einfache Nullstellen besitzt. Aus der Lösung dieser Differenzengleichung ergibt sich sofort das Stabilitätskriterium: „Ein linearer Regelkreis mit periodischem Taster ist dynamisch stabil genau dann, wenn sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polynoms im Innern des Einheitskreises liegen.“ Die Frage, ob und unter welchen Bedingungen Stabilitätsgebiete in bezug auf Regelstrecke, Regler und Impulsdauer des Tasters existieren (von diesen Größen ist die dynamische Stabilität ja abhängig), wird nicht allgemein beantwortet; es wird lediglich an Hand eines Beispiels gezeigt, daß in manchen Fällen eine Stabilisierung allein durch Änderung der Impulsdauer erreicht werden kann. Eine Umformung des charakteristischen Polynoms der Differenzengleichung läßt jedoch die Möglichkeit der Existenz solcher Stabilitätsgebiete auch im allgemeinen Fall erkennen. Schließlich wird noch das Verhalten eines linearen periodischen Taster-Regelkreises unter dem Einfluß äußerer Störungen untersucht (inhomogene lineare Differenzengleichung); hierbei wird die Beschränktheit der Störfunktion vorausgesetzt.

S. Schottlaender.

Starikova, M. V.: Zur Untersuchung der Eigenschwingungen und Stabilität automatischer Systeme mit unsymmetrischer Nichtlinearität bei Vorhandensein einer äußeren Einwirkung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 9, 27—32 (1957) [Russisch].

Betrachtet wird das Blockschaltbild eines Regelkreises, der aus gewöhnlichen linearen Gliedern (Regelstrecke, Meßglied), einem idealen Relais, einem Relais mit Hysterese (Kraftschalter), einem Stellmotor mit zeitlicher Verzögerung und einem Stellglied mit nichtlinearer unsymmetrischer Kennlinie besteht. Untersucht wird der Einfluß der einzelnen Parameter, der langsam veränderlichen Störgröße und einer eventuellen zusätzlichen Rückführung auf das Verhalten des Systems, insbesondere auf seine Stabilität und mögliche Dauerschwingungen. Die Untersuchung wird durchgeführt an den harmonisch-linearisierten Gleichungen nach den Näherungsverfahren von E. P. Popov, Dynamik automatischer Regelsysteme, dies. Zbl. 84, 125. Interessant erscheint der Hinweis, daß die Richtigkeit der erhaltenen Ergebnisse durch die Lösung der nichtlinearen Ausgangsgleichungen mit einem Analogrechner „hinreichend gut“ bestätigt wurde.

P. Sagirow.

Emel'janov (Emel'yanov), S. V.: The use of nonlinear correcting devices of the "key" type for improving the quality of second-order automatic control systems. Automat. Remote Control 20, 844—859 (1960), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. 20, 867—883 (1959).

Betrachtet wird ein Regelkreis, bestehend aus einem Verzögerungsglied 1. Ordnung, einem I -Glied und einem verzögerungsfreien P -Glied. Parallel zu dem P -Glied ist ein nichtlineares Glied (z. B. Kontakt-Relais) geschaltet, das auf Abweichung und zeitliche Änderung anspricht. In der Beiwertebene sind die Bereiche abgegrenzt, die zu aperiodischen, periodisch gedämpften und aufklingenden Schwingungen des Regelvorganges gehören, so daß die günstigsten Einstellungen daraus gefunden werden können.

W. Oppelt.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Szarski, J. et T. Wazewski: Interprétation géométrique des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux différentielles totales. Ann. Polon. math. 6, 301—304 (1959).

Es handelt sich um ein Pfaffsches System der besonderen Gestalt

$$dz^i = P^i(x, y, z^1, \dots, z^n) dx + Q^i(x, y, z^1, \dots, z^n) dy, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Seine Integrabilitätsbedingungen lauten

$$(*) \quad Q_x^i - P_y^i + \sum_{j=1}^n (Q_{z^j}^i P^j - P_{z^j}^i Q^j) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ist dann $(x_0, y_0, z_0^1, \dots, z_0^n)$ ein Punkt im Definitionsbereich der Funktionen P^i und Q^i , so wird zunächst der Schnitt der Ebene

$z^i - \zeta^i = P^i(\xi, \eta, \zeta^1, \dots, \zeta^n)(x - \xi) + Q^i(\xi, \eta, \zeta^1, \dots, \zeta^n)(y - \eta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, mit der Zylinderfläche $x = x_0 + r \cos \varphi$, $y = y_0 + r \sin \varphi$, $z^i = h^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $r > 0$, bestimmt. Für die Schnittkurve ergibt sich die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \varphi, & y &= y_0 + r \sin \varphi, \\ z^i &= z_0^i + h^i + P^i(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi, h^1, \dots, h^n) r (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \\ &\quad + Q^i(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi, h^1, \dots, h^n) r (\sin \varphi - \sin \varphi_0), \\ (\zeta^i &= h^i, & \xi &= x_0 + r \cos \varphi, & \eta &= y_0 + r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Die in diese Darstellung eingehenden Funktionen h^i genügen einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ist $h^i = h^i(r, \varphi)$ ein Integral dieses Systems, so gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h^i(r, 2\pi) - z_0^i}{r^2 \pi} = Q_{z_j}^i(A_0) - P_{z_j}^i(A_0) + \sum_{j=1}^n [Q_{z_j}^i(A_0) P^j(A_0) - P_{z_j}^i(A_0) Q^j(A_0)].$$

Darin liegt die angekündigte geometrische Deutung der Integrabilitätsbedingungen (*), $A_0 = A_0(x_0, y_0, z_0^1, \dots, z_0^n)$. M. Pinl.

Vidal Abascal, E.: A generalization of integral invariants. Proc. Amer. math. Soc. 10, 721—727 (1959).

Let (1) $\omega_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, h$) be a completely integrable system of Pfaff in m variables ($h < m$) and let V_{m-h} be its integral varieties. If D_p^0 denotes an arbitrary domain of dimension $p \leq h$, and D_p^1 the displaced domain along the integral varieties V_{m-h} , the integral $\int \Omega$ of an exterior differential form Ω of degree p is said to be an absolute integral invariant for the system (1) if whatever may be the domains D_p^0 and D_p^1 the relation $\int_{D_p^0} \Omega = \int_{D_p^1} \Omega$ holds. If this relation holds only if D_p^0 and D_p^1

are closed, $\int \Omega$ is said to be a relative integral invariant. Some theorems known for the case $h = p = m - 1$ are generalized to this case. For instance: If $\int \Omega$ is an absolute integral invariant of degree h with respect to a set of integral varieties V_{m-h} of the system (1), then the relation $d\Omega = 0$ holds. Some applications are also given. L. A. Santaló.

Haimovici, Adolf: Sur certains problèmes aux limites résolubles par la méthode de la séparation des variables. An. şti. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, n. Ser., Sect. I 3, 45—50, russ. Zusammenfassung 50 (1957).

Einige naheliegende und durchwegs nicht neue Verallgemeinerungen der Methode der Trennung der Variablen; jedoch ist die Darstellung sehr knapp und klar. C. Heinz.

Rasulov, M. L.: Die Residuenmethode zur Lösung von Randwertaufgaben und gemischten Aufgaben für Differentialgleichungen. I. Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Izvestija 1957, Nr. 12, 3—15 (1957) [Russisch].

Die Residuenmethode, die Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 48, 332) zur Lösung gemischter Aufgaben für partielle Differentialgleichungen (d. h. solche mit Rand- und Anfangsbedingungen) angewandt hat, gestattet nach seiner Angabe auch folgende Aufgabe dieser Art zu lösen:

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q} - \sum_{\substack{k \leq q-1 \\ m_k + l \leq qm}} A_{k l_1 \dots l_n}(x) \frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = f(x, t)$$

in einem endlichen Gebiet D für den Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit dem Rand Γ bei der Randbedingung

$$\lim_{x \rightarrow y} \sum_{k=0}^q \frac{\partial^k}{\partial t^k} B_k \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0, \quad y \in \Gamma, \text{ und der Anfangsbedingung } \left. \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \varphi_i(x)$$

($i = 0, 1, \dots, q-1$; $l = l_1 + \dots + l_n$). m, q sind natürliche Zahlen, $B_k(y, \partial/\partial x)$ lineare Differentialoperatoren nach x mit von y abhängigen Koeffizienten. Vorausgesetzt wird, daß eine genügend glatte Lösung $u(x, t)$ in D für $0 \leq t \leq T$ existiert, falls die gegebenen Funktionen $f(x, t)$ und $\varphi_i(x)$ genügend glatt sind, und daß $\varphi_{q-1}(x)$ in D in eine Reihe nach den Fundamentalfunktionen der weiter unten erwähnten Spektralaufgabe entwickelt werden kann. Die Gleichung kann auch als ein in Form einer Matrixgleichung geschriebenes System partieller Differentialgleichungen angesehen werden. Dann bedeuten die Koeffizienten A und die Operatoren B_k quadratische Matrizen von Funktionen bzw. von Operatoren und die Funktionen u, f und φ_i Spaltenvektoren von Funktionen. — Die explizit angegebene Lösung führt auf die Konstruktion der Greenschen Funktion $G(x, \xi, \lambda)$ einer der Gleichung zugeordneten Spektralaufgabe. (Im erwähnten Referat entspricht letztere der Randwertaufgabe, die durch die Hilfsgleichung $Lu(x) - \lambda u(x) = \Phi(x)$ und die dazu gehörigen Randbedingungen gegeben ist. Die Lösung der ursprünglichen Aufgabe wird dort mit Hilfe der Resolvente R_λ dieser Hilfsgleichung ausgedrückt und damit ebenfalls durch eine zugeordnete Greensche Funktion dargestellt.) Im Falle eines eindimensionalen Gebietes D ($n = 1$) ist G ohne Schwierigkeit anzugeben. Es erscheint daher zweckmäßig, die gegebene Aufgabe auf eine gleichartige zurückzuführen, deren Gebiet D_1 eine geringere Dimension hat. Verf. zeigt, daß das tatsächlich möglich ist, wenn die Veränderlichen sich trennen, nämlich wenn 1. bei geeigneter Wahl der Koordinaten das Gebiet D das Descartessche Produkt zweier Gebiete D_1 und D_2 mit den Rändern Γ_1 und Γ_2 ist in Räumen mit jeweils nur einem Teil der Veränderlichen: $D = D_1 \times D_2$, $x = (\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}})$, $\tilde{x} \in D_1, \tilde{\tilde{x}} \in D_2$; 2. die Gleichung die Form hat:

$$l_1\left(\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u + a(\tilde{x})l_2\left(\tilde{\tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\tilde{x}}}\right)u = f(x, t)$$

mit den linearen Differentialoperatoren l_1 und l_2 ; 3. die Randbedingungen mit ebensolchen Operatoren lauten:

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}} B_1\left(\tilde{y}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = 0, \quad \tilde{y} \in \Gamma_1; \quad \lim_{\tilde{\tilde{x}} \rightarrow \tilde{\tilde{y}}} B_2\left(\tilde{\tilde{y}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\tilde{x}}}\right)u(x, t) = 0, \quad \tilde{\tilde{y}} \in \Gamma_2.$$

Der Beweis erfolgt nach ganz derselben Residuenmethode und zieht seinerseits ebenfalls eine Spektralaufgabe heran, und zwar $l_2(\tilde{\tilde{x}}, \partial/\partial \tilde{\tilde{x}})w - \lambda^s w = \Phi(\tilde{\tilde{x}})$ mit der zweiten der obigen Randbedingungen (s ist die Ordnung des Operators l_2), deren Greensche Funktion in die Lösung

$$u(x, t) = \frac{-1}{2\pi \sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{C_\nu} \int_{D_1} \lambda^{s-1} d\lambda \int_{D_2} G(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{\xi}}, \lambda) v(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t, \lambda) d\tilde{\xi}$$

einght (C_ν sind geschlossene Kurven der λ -Ebene, die jeweils nur einen Pol λ_ν der Greenschen Funktion enthalten). Dabei bedeutet $v(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t, \lambda)$ die Lösung der der ursprünglichen gleichartigen, reduzierten Aufgabe mit dem Operator l_1 im Gebiet D_1 . Allerdings erfordert der Beweis noch das Bestehen einer zusätzlichen Bedingung (bezüglich eines in seinem Verlauf entstehenden Gleichungssystems), die es mit sich bringt, daß manchmal schon in einfachen Fällen das Schema der Trennung der Veränderlichen bei der Durchführung versagt, z. B. läßt sich von den beiden Gleichungen $\partial^2 u / \partial x^2 \pm \partial^2 u / \partial y^2 = f(x, y)$ mit den Randbedingungen $u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$ nur die mit dem Vorzeichen $+$ nach diesem Verfahren behandeln. — Die Problemstellung und das Lösungsverfahren ähneln sehr der in einer in diesem Zbl. 85, 312 besprochenen Arbeit desselben Verf. gestellten Randwertaufgabe und deren Lösung. Auch dort wird der Fall der Trennung der Veränderlichen behandelt. Anfangsbedingungen treten dabei nicht auf, sie sind also bei diesem Verfahren nicht wesentlich. Am Schluß wird durch ein Beispiel gezeigt, daß sich die Lösungsmethode durch aufeinanderfolgende Wiederholung des Verfahrens auch in

dem Falle anwenden läßt, daß eine vollständige Trennung bezüglich sämtlicher Veränderlicher x_i vorliegt ($i = 1, \dots, n$). E. Svenson.

Silov, G. E.: Lokale Eigenschaften der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 5(89), 3—44 (1959) [Russisch].

This is a survey of results obtained in recent years on "general" partial differential operators with constant coefficients, mainly concerning with the following theorem due to Hörmander (cf. this Zbl. 67, 322): A partial differential operator $P(D)$ is hypoelliptic, i. e. every solution u of the equation $P(D)u = 0$ is infinitely differentiable, if and only if the following condition is fulfilled: $\text{Im } \zeta \rightarrow \infty$ as $\zeta \rightarrow \infty$ and $P(\zeta) = 0$. J. Peetre.

Borovikov, V. A.: Die Fundamentallösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 8, 199—257 (1959) [Russisch].

Using the expansion in plane waves of the δ -function, Gel'fand and Šapiro (this Zbl. 65, 101) have given an explicit formula for the distinguished fundamental solution K for a homogeneous elliptic differential operator $A(\partial/\partial x)$ of the order m in a n -dimensional vector space X . This formula is of the form:

$$K(x) = \int_{\Omega} \frac{f_{m,n}(x\xi)}{A(\xi)} d\Omega$$

where $f_{m,n}$ is a certain function of one variable, the integration being taken over the unit sphere Ω in the conjugate space of X . In the present paper this formula is extended to homogeneous non-elliptic operators $A(\partial/\partial x)$ satisfying the condition: $\xi \neq 0 \Rightarrow \text{grad } A(\xi) \neq 0$. Here the integration should be interpreted in the sense of Cauchy. Moreover, it is shown that the fundamental solution K is an analytic function outside the characteristic cone, and its behavior near a non-singular point of this cone is investigated in detail. In fact the study of the latter question occupies most of the paper. J. Peetre.

Guglielmino, Francesco: Sul problema di Darboux. Ricerche Mat. 8, 180—196 (1959).

Soit $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ deux fonctions de la classe C^1 dans les intervalles respectifs $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ et $y_0 \leq y \leq y_0 + b$ et telles que $\sigma(x_0) = \tau(y_0)$. L'A. démontre l'existence d'une solution du problème (1) $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, (2) $z(x, y_0) = \sigma(x)$, $z(x_0, y) = \tau(y)$ dans la classe des fonctions $z(x, y)$ continues avec les dérivées z_x, z_y, z_{xy} dans R : $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 \leq y \leq y_0 + b$. Les hypothèses suivantes ont été faites (i) $f(x, y, z, p, q)$ est continue et bornée dans l'ensemble S : $(x, y) \in R$, $|z|, |p|, |q| < \infty$. (ii) Si $(x, y, z, p_1, q), (x, y, z, p_2, q) \in S^* \subset S$ (S^* convenablement défini), $p_2 \geq p_1$, on a $f(x, y, z, p_2, q) - f(x, y, z, p_1, q) \leq \Psi^*(x, y, p_2 - p_1)$; pour chaque x fixe de l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ la fonction $\Psi^*(x, y, u)$ vérifie les conditions de Carathéodory et $u \equiv 0$ est la solution unique de l'équation $u(x, y) =$

$\int_{y_0}^y \Psi^*(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta$ dans chaque intervalle $y_0 \leq y \leq y_0 + \beta$, ($0 < \beta \leq b$).

(iii) Le problème $w_x = f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), w)$, $w(x_0, y) = \tau'(y)$ n'admet qu'une solution dans R si $z(x, y)$ et $z_x(x, y)$ sont continues dans R , $z(x, y)$ vérifie les conditions (2) et z_x la condition de Lipschitz par rapport à y . L'A. démontre que le théorème en question englobe, en ce qui concerne l'existence d'une solution du problème (1), (2), les résultats de T. Satō [Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A. 2, 107—123 (1941)], de C. Ciliberto (ce Zbl. 65, 331) et de Z. Szymdt (ce Zbl. 70, 92). Dans la démonstration du théorème, basée sur le théorème de Schauder sur le point fixe, l'A. utilise la même transformation fonctionnelle dont s'est servi C. Ciliberto dans le mémoire précité. E. Szymdt.

Koval', P. I.: Sur la stabilité des solutions approximatives des équations différentielles paraboliques et hyperboliques. Ukrain. mat. Žurn. 9, 271—280 (1957) [Russisch].

Verf. ersetzt die Differentialgleichungen durch Systeme von Differenzengleichungen und untersucht deren Stabilität mit Hilfe von Sätzen, die er früher (dies. Zbl. 78, 275) abgeleitet hat. Wenn die Ersatzdifferenzengleichungen von erster Ordnung sind, kann die Stabilität unter gewissen Bedingungen durch geeignete Wahl der Spannen erzwungen werden. Sind dagegen die Differenzengleichungen von höherer Ordnung (d. h. benutzt man Interpolationspolynome höheren Grades), so sind ihre trivialen Lösungen im allgemeinen instabil. W. Hahn.

Movčan (Movchan), A. A.: The direct method of Liapunov in stability problems of elastic systems. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 686—700 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 483—493 (1959).

Verf. behandelt die Plattengleichung $\partial^4 w / \partial x^4 - A \partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial t^2 = 0$ mit der Randbedingung $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ ($x = 0, 1$) und untersucht die Stabilität der trivialen Lösung $w = 0$. Die Lösungen des Randwertproblems werden in einem Banachschen Raum interpretiert; in diesem wird dann ein „Ljapunovsches“ Funktional konstruiert, das den Voraussetzungen des ersten Ljapunovschen Stabilitätsatzes in der für Banachsche Räume gültigen Erweiterung genügt. Für diesen Satz und einige Korrolare wird ein Beweis gegeben, der etwas einfacher ist als der erste von Zubov (Die Methoden von A. M. Ljapunov und ihre Anwendungen, dies. Zbl. 78, 79) mitgeteilte (allerdings nicht so allgemein). Bei der Diskussion der Stabilitätsbedingung kommt richtig die erste Eulersche kritische Belastung heraus. Die Arbeit zeigt mithin, daß grundsätzlich Probleme der angewandten Elastizitätstheorie der direkten Methode zugänglich sind; sie hinterläßt aber auch den Eindruck, daß vom Einsatz dieses Hilfsmittels vorläufig nicht viel Neues zu erwarten ist. — Die englische Übersetzung enthält mehrere sinnstörende Fehler. W. Hahn.

Szarski, J.: Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non linéaire d'équations paraboliques. Ann. Polon. math. 6, 211—216 (1959).

Si tratta di alcune generalizzazioni di risultati stabiliti precedentemente dall'A. (questi Zbl. 70, 93) relativi al problema della limitazione e al problema, a questo collegato, di dare criteri di unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine della forma

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = f_i \left(t, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_i}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j \partial x_k}, \dots \right) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in cui la i -esima equazione non contiene derivate delle funzioni $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_m$. L. Giuliano.

Vitásek, Emil: Über die quasistationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Českosl. Akad. Věd. Apl. Mat. 5, 109—138, russ. Zusammenfassung 139—140 (1960).

Die Arbeit hat Bedeutung für das Studium des Wärmefeldes, welches in den einzelnen Arbeitsschichten einer gebauten Schwergewichtsmauer entsteht. Auf Grund von Erfahrungen ist bekannt, daß in der n -ten Arbeitsschicht in der Zeit t das Wärmefeld beiläufig das gleiche sein wird, wie in der $(n-1)$ -ten Schicht in der Zeit $t - t_0$, wobei t_0 die Zeitspanne zwischen der Betonlegung zweier aufeinanderfolgender Schichten ist. Praktisch entsteht dieser Zustand schon nach der Betonierung einiger Schichten. Man spricht von einem quasistationären Zustand. Da die quasistationäre Lösung schneller bestimmt wird als das Wärmefeld in der Schwergewichtsmauer, hat die Arbeit praktische Bedeutung. Die mathematische Formulierung ist folgende: Es seien $g(t)$ eine stetige und beschränkte Funktion, a, t_0, T und b positive Zahlen. Man sucht eine Funktion $f(x)$ derart, daß die Lösung des Randwertproblems $\partial u / \partial t - a^{-1} \partial^2 u / \partial x^2 + g(t + k t_0)$, $k b < x < (k + 1) b$, $0 < t < T$, (k ist eine nichtnegative

ganze Zahl), $u(x, 0) = 0$ für $0 < x < b$, $u(x, 0) = f(x - b)$ für $b < x < \infty$, $u(0, t) = 0$ für $0 < t < T$, die Gleichung $u(x, t_0) = f(x)$ erfüllt. Die Funktion $u(t, x)$ und ihre erste Ableitungen sollen stetig für $x > 0$, $0 < t < T$ sein. Verf. nennt die Funktion f die quasistationäre Lösung. Das Wärmefeld in der Arbeitsschicht wird durch die Funktion $u(x, t)$ beschrieben. Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz sowie die Konvergenz der schrittweisen Näherungen wird bewiesen. Wenn man noch $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ voraussetzt, dann ist die quasistationäre Lösung beschränkt.

R. Východný.

Miranker, Willard L. and Joseph B. Keller: The Stefan problem for a nonlinear equation. J. Math. Mech. 9, 67—70 (1960).

Si considera il seguente problema non lineare, unidimensionale del tipo di Stefan nelle incognite $c(x, t)$ ed $R(t)$: $\frac{1}{2} D \left(g \left(\frac{c}{c_0} \right) c_x \right)_x = c_t$, $x > R(t)$, $t > 0$; $c(R, t) = 0$, $R(0) = 0$; $c(x, 0) = c_0$, $x > 0$; $\frac{1}{2} k D g(c/c_0) c_x = R_t$, $x = R$, $t > 0$, con D , c_0 ed h costanti e nell'ipotesi che sia g derivabile e tale che $0 < G_1 \leq g \leq G_2$. Con considerazioni di analisi dimensionale si mostra che, come nel caso lineare, si ha $R = \alpha \sqrt{Dt}$ e $c = c_0 u(s)$, valendo la condizione $0 < k c_0 < G_1/G_2$, la costante α e la funzione $u(s)$ soddisfacendo al sistema $(g(u) u_s)_s + s u_s = 0$, $s > \alpha$, $u(\alpha) = 0$, $u(\infty) = 1$, $\alpha = k c_0 g(0) u_s(\alpha)$. Il risultato era già stato acquisito dall'A. per via più complessa.

G. Sestini.

Mizohata, Sigeru: Unicité dans le problème de Cauchy pour quelques équations différentielles elliptiques. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 31, 121—128 (1958).

Es wird die Eindeutigkeit des Cauchyschen Anfangswertproblems für elliptische Differentialgleichungen von der Form $(P + Q)U = 0$ gezeigt, wobei P ein elliptischer Operator mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $2m$ und Q ein Operator der Ordnung $k \leq m$ ist. Unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Nullstellen von P kann die Beschränkung $k \leq m$ fallen gelassen und durch $k \leq 2m - 1$ ersetzt werden. Der Beweis benutzt Methoden von Nirenberg (dies. Zbl. 77, 94).

Cl. Müller.

Il'in, V. A. und I. A. Šišmarev: Über die Äquivalenz von Systemen verallgemeinerter und klassischer Eigenfunktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 24, 757—774 (1960) [Russisch].

Verff. betrachten einen linearen, selbstadjungierten, elliptischen Differentialoperator

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] - c(x) u,$$

$$\left[\text{d. h.: } a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad \alpha = \text{const} > 0 \right]$$

mit $c(x) \geq 0$, und beweisen, daß für einen beliebigen, N -dimensionalen, normalen Bereich ein vollständiges System von klassischen Eigenfunktionen existiert; dabei ist letzteres System äquivalent dem System der verallgemeinerten Eigenfunktionen.

J. Wloka.

Fiorenza, Renato: Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche. Ricerche Mat. 8, 83—110 (1959).

Soit $\Psi(x)$ une fonction définie sur la frontière FT d'un domaine borné T de l'espace à m dimensions. Soit $F(p_{ik}, p_i, u, x)$ et $G(p_i, u, x)$ deux fonctions définies pour $x \in T$ et $x \in FT$ respectivement tandis que toutes les autres variables prennent des valeurs numériques arbitraires. L'A. considère le problème suivant: (1) $F(p_{ik}, p_i, u, x) = 0$ lorsque $x \in T - FT$, (2) $G(p_i, u, x) = \Psi(x)$ lorsque $x \in FT$ ($p_i = u_{x_i}$, $p_{ik} = u_{x_i x_k}$); les fonctions F et G sont de la classe C^1 dans leur domaines de

définition; la forme $\sum_{i,k=1}^m F_{pik} \lambda_i \lambda_k$ est définie-positive lorsque $x \in T$; $\sum_{i=1}^m G_{p_i} \gamma_i \geq h > 0$ pour $x \in FT$ où $\gamma_i(x)$ sont les cosinus directeurs de la normale à FT issue du point x et dirigée à l'extérieur de T . Dans le théorème II l'A. étend au problème cité les résultats de Leray, Schauder et Caccioppoli obtenus pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation elliptique (1) (cf. le § 42 de la monographie de C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, ce Zbl. 65, 85). La démonstration qu'il présente est analogue à celle exposée dans l'ouvrage précité de C. Miranda dans le cas des théorèmes 42, I, VI concernant toujours le problème de Dirichlet. Elle utilise certaines formules de majoration des solutions eventuelles d'un problème aux limites linéaire établies par l'A. dans le théorème I.

Z. Szmydt.

Rajagopal, A. K.: A note on Ballabh's paper. *Ganita* 9, 5—7 (1958).

(Vgl. R. Ballabh, dies. Zbl. 58, 326.) Es wird festgestellt, bei welcher Transformation der Veränderlichen $r = r(\varrho)$ und bei welcher Wahl der Funktionen $f(r)$, $F(r)$, $g(r)$ die Differentialausdrücke

$\frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[F(r) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{g(r)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right]$ und $\frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[F \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{g(r)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} \right]$ in den Laplaceschen Ausdruck $\Delta \psi$ übergehen. (Druckfehler in Formel (1): statt $\partial^2 p / \partial \theta^2$ ist $\partial^2 \psi / \partial \theta^2$ zu setzen.)

St. Fenyő.

Onišenko (Onishchenko), V. I.: The mixed axisymmetrical problem of the theory of potential in a space with a flat circular slit. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 21—27, russ. u. engl. Zusammenfassung 28 (1958) [Ukrainisch].

Das gemischte axialsymmetrische Problem der Potentialtheorie für zwei harmonische Funktionen in einem Raum mit einer kreisförmigen Trennungsgrenze der Randbedingungen wird auf das ebene Problem der Potentialtheorie für zwei Funktionen mit einer Trennungsgrenze der Randbedingungen in Form eines Geradenabschnittes zurückgeführt. Dieses Problem wird seinerseits auf das Problem der linearen Konjugation gebracht.

V. K. Prokopov (R. Ž. Mech. 1959, 961).

Mitchell, Josephine: Representation theorems for solutions of linear partial differential equations in three variables. *Arch. rat. Mech. Analysis* 3, 439—459 (1959).

Die Arbeit gehört in den Ideenkreis der Bergmanschen Theorie der Integraloperatoren zur Erzeugung von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen aus komplex-analytischen Funktionen. Sie betrifft die Herleitung von Integralbeziehungen für harmonische Funktionen dreier Veränderlicher und Lösungen anderer partieller Differentialgleichungen. Die erhaltenen Ergebnisse sind Analoga des Residuensatzes und Abelscher Sätze. Zuerst werden harmonische Vektoren $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ betrachtet, also Vektorfunktionen, für die $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$ ist. H_1 wird hierbei durch einen Whittaker-Bergman-Operator in der Form

$$H_1(x, y, z) = \int_C f(u, \zeta) d\zeta, \quad u = x + [(z + iy)\zeta - (z - iy)\zeta^{-1}]$$

aus der „Zugeordneten“ f gewonnen, wobei f analytisch ist. Für die beiden anderen Komponenten von H gelten dann ähnliche Darstellungen. Es sei $G = \int_K \vec{H} d\vec{X}$, wobei K eine Kurve im Regularitätsgebiet von H_1 ist. Hat H_1 eine rationale Zugeordnete, so gelten nach Bergman Beziehungen zwischen G und einer Linearkombination von Integralen $\int_C f^* d\zeta$, wobei f^* eine aus f erhaltene algebraische Funktion

ist. In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Beziehungen in dem Fall hergeleitet, daß f selbst eine algebraische Funktion ist. H_1 läßt sich dann als Summe gewisser Normalintegrale und algebraischer Funktionen darstellen. Weiterhin werden die Singularitätenkurven hierbei vorkommender Periodenfunktionen untersucht. Die

harmonischen Funktionen werden weiterhin vermöge Bergmanscher Operatoren in Lösungen von $\Delta\Phi + F(x^2 + y^2 + z^2)\Phi = 0$ transformiert. Auf diese Weise lassen sich einige der obigen Ergebnisse auf diese Lösungen übertragen, wie im Schluß der Arbeit gezeigt wird. *E. Kreyszig.*

Todorov, I. T. and D. Zidarov: The uniqueness of the determination of the form of an attracting body from the values of exterior potentials. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 262—264 (1958) [Russisch].

The authors discuss the methods of proof of Novikov (this Zbl. 18, 309) and Sretenskij (this Zbl. 57, 88) concerning the conditions under which two bodies will coincide whenever they have the same outer Newtonian potentials. Let T_1 and T_2 denote two physical bodies of constant (unit) density in 3-space, and let S_1 and S_2 denote their boundary surfaces. Let S_α^i ($\alpha = 1, 2$) denote that part of S_α interior to the closure of $T_1 \cup T_2$, let S^i denote the union $S_1^i \cup S_2^i$, and let S^e denote the bounding surface of $\overline{T_1} \cup \overline{T_2}$. It is shown first that under the condition that there exist an origin 0 such that

$$\iint_{S^i} |(R, \nu)| dS \leq \iint_{S^e} |(R, \nu)| dS,$$

where R is the radius vector from 0, ν the outer normal to S_α , and dS the surface element on S_α , then T_1 and T_2 will coincide whenever the exterior potentials are the same. A second similar criterion is also given. *A. J. Lohwater.*

Nozaki, Yasuo: On generalization of Frostman's lemma and its applications. Kōdai math. Sem. Reports 10, 113—126 (1958).

M. Riesz (this Zbl. 18, 407) considered

$$I^\alpha f(P) = \{C_m(\alpha)\}^{-1} \int_{\Omega_m} f(Q) r_{PQ}^{-m} dQ, \quad C_m(\alpha) = \pi^{m/2} 2^\alpha \Gamma(\tfrac{1}{2}\alpha) / \Gamma((\tfrac{1}{2}m - \alpha)),$$

in the m -dimensional euclidean space Ω_m ($m \geq 1$) and proved (1) $I^\alpha(I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f$ for $\alpha > 0$, $\beta > 0$ satisfying $\alpha + \beta < m$ and for a function f for which integrals converge absolutely. The present author uses (1) to prove

$$(2) \quad r_{PQ}^{k+l-m} \int_{\Omega_m} r_{PM}^{-k} r_{MQ}^{-l} dM = C_m(m-k) C_m(m-l) \{C_m(2m-k-l)\}^{-1}.$$

Some applications are made. [Remark (i). It does not seem that the author has any proof of (1). In an other paper (this Zbl. 33, 276) M. Riesz proved (1) by the aid of (2). Remark (ii). In section 8 the integral on the right side of (6) diverges at every point P for which $\varphi(P) \neq 0$. *M. Ohtsuka.*

Thyssen, M.: Sur la fonction de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet ou de Neumann posés à l'extérieur d'un cercle ou d'une sphère. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 27, 54—67 (1958).

Es handelt sich um die Untersuchung des Dirichletschen und Neumannschen Problems im Falle des metaharmonischen Operators $\Delta - k^2$ (k reell) bei gegebenen homogenen Randbedingungen außerhalb eines Kreises C , evtl. einer Kugel. Die Untersuchung wird nur auf den ebenen Fall beschränkt, da der dreidimensionale ganz analog ist. Bei der Berechnung von Δ im metaharmonischen Operator in bezug auf Polarkoordinaten (r, θ) sucht Verf. die Lösung in der Form $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Es wird dabei verlangt, daß a) $R(r)$ die Lösung des Randwertproblems

$$(1) \quad R''(r) + R'(r)/r + R(r)(\mu^2/r^2 - k^2) = 0$$

(μ reell), $R(a) = 0$ (Dirichlet) bzw. $R'(a) = 0$ (Neumann), $\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$ und

b) $\Theta(\theta)$ die Greensche Funktion des Randwertproblems

$$(2) \quad \Theta''(\theta) - \mu^2 \Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\pi) = \Theta(-\pi); \quad \Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi)$$

sei. Es ist bekannt, daß die Lösung von (1), die im Unendlichen den Grenzwert Null

besitzt, mittels der Besselschen Funktionen $K_{i\mu}(kr)$ ($i = \sqrt{-1}$) dargestellt wird, wobei $K_{i\mu}(ka) = 0$ (Dirichlet) oder $K_{i\mu}(ka) = [\partial K_{i\mu}(k'r)/\partial r]_{r=a} = 0$ (Neumann). Die Greensche Funktion des Operators (2) ist von der Form

$$\Theta(\theta) = -\operatorname{ch} \mu(\pi - |\theta - \theta_0|)/2\mu \operatorname{sh} \mu \pi.$$

Es werden die neu eingeführten Funktionen

$$g_D = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_j(\pi - |\theta - \theta_0|)}{\operatorname{sh} \mu_j \pi} \cdot \frac{K_{i\mu_j}(kr_0) K_{i\mu_j}(kr)}{K'_{i\mu_j}(ka) [\partial K_{i\mu}(ka)/\partial \mu]_{\mu=\mu_j}},$$

$$g_N = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_j(\pi - |\theta - \theta_0|)}{\operatorname{sh} \mu_j \pi} \cdot \frac{K_{i\mu_j}(kr_0) K_{i\mu_j}(kr)}{K_{i\mu_j}(ka) [\partial K'_{i\mu}(ka)/\partial \mu]_{\mu=\mu_j}}$$

untersucht. Mit Hilfe der asymptotischen Formel für $K_{i\mu}$ und der Ableitungen von $K_{i\mu}$ wird bewiesen, daß für $\theta \neq \theta_0$ diese Funktionen selbst und die Gradienten von den Funktionen g_D , g_N auf dem Komplement $C_{R^2} c$ des Kreisgebietes stetig sind und weiter, daß diese Funktionen der Klasse $L^2(\Omega)$ angehören, wo Ω das Komplement der Menge $C \cup \{(r, \theta) : r > a, \theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon\}$ ist. Aus der Tatsache, daß die Funktionen

$$-K_{i\mu_j}(kr) ((r/a)^{2\mu_j} K'_{i\mu_j}(ka) [\partial K_{i\mu}(ka)/\partial \mu]_{\mu=\mu_j})^{-1/2}$$

($j = 1, 2, \dots$) ein vollständiges Orthonormalsystem bilden (in $L^2(a, +\infty)$), geht hervor, daß für jede genügend glatte Funktion $\varphi(r, \theta)$ die Gleichung

$$\int_{C_{R^2} c} g_D (\Delta - k^2) \varphi(r, \theta) r dr d\theta = \varphi(r_0, \theta_0)$$

besteht. Dasselbe gilt für die Funktion g_N . Daraus folgt: Die Funktionen g_D (ev. g_N) stellen die Greenschen Funktionen für den Operator $\Delta - k^2$ im Gebiet $C_{R^2} c$ dar. Die Randbedingungen werden hier im verallgemeinerten Sinne (Courant) aufgefaßt.

F. Nožička.

Owens, O. G.: A characterization in E^3 of the everywhere regular solution of the reduced wave equation. Duke math. J. 27, 81—90 (1960).

Es gibt eine überall im Endlichen definierte zweimal stetig differenzierbare

Lösung $u(x, y, z)$ von $\Delta u + u = 0$ derart, daß $\int_0^\infty \sqrt{r} u dr = F(\theta, \varphi)$, $x + iy = r e^{i\varphi} \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, gleichmäßig in (θ, φ) , wobei F willkürlich vorgegeben und mit 2π periodisch in θ ist und bezüglich des sphärischen Abstandes auf der Einheitskugeloberfläche eine gleichmäßige Lipschitzbedingung erfüllt. Eine Integraldarstellung dieser Lösung u wird angegeben.

E. Kreyszig.

Sargsjan, I. S.: Über die Entwicklung und Differentiation der Entwicklungen nach den Eigenfunktionen des Schrödingerschen Operators bei unbegrenzt zunehmendem Potential. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 27, 193—199 (1958) [Russisch].

Consider the operator $P = -\Delta + q(x)$ in R^n . If $q(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$, then it is well known that the spectrum of P is discrete, and moreover it may be shown that the eigenfunctions are exponentially decreasing. This implies that the corresponding eigenfunction expansion can be considered not only for square integrable functions but also for functions which become square integrable after multiplication by a certain (negative) power of $|x|$. In the present paper such an eigenfunction expansion theorem is given in the case $n = 2$. The proof depends on an asymptotic formula in an earlier paper by the same author (this Zbl. 82, 99). In the case $n = 1$ such results have been obtained by Titchmarsh, and in the case $n = 3$ by Levitan.

J. Peetre.

Kalik, C.: Sur un problème aux limites qui intervient dans un projet d'une chaudière à vapeur. Mathematica, Cluj 1, 27—34 (1959).

Si risolve il seguente problema piano, stazionario di conduzione del calore: (1) $r^{-1}(r u_r)_r + u_{zz} = 0$, $(r, z) \in \Omega$; $u_n - \gamma u = \psi$, $(r, z) \in \mathfrak{S}\Omega$, n indicando derivazione rispetto alla normale esterna alla frontiera $\mathfrak{S}\Omega$ del campo Ω , definito dalle disuguaglianze $r_0 < r < r_0 + s$, $-L < z < +L$, γ e ψ essendo costanti, che possono essere nulle su qualche tratto di $F\Omega$. La soluzione del problema è ottenuta introducendo un particolare spazio funzionale $W(\Omega)$ delle funzioni $v(r, z)$ aventi derivate parziali prime generalizzate di quadrato sommabile, essendo convenientemente definita la norma. Lo spazio risulta completo e separabile e vi si definisce il funzionale $F(v) = \int_{\Omega} \Delta_1 v r d\Omega + \int_{F\Omega} v(\gamma v - 2\psi) r ds$. La funzione $v(r, z)$ che minimizza questo funzionale, dà una soluzione debole del problema (1), che può essere approssimata mediante polinomi in r e z (metodo di Ritz). G. Sestini.

Keller, J. B.: On solutions of $\Delta u = f(u)$, Commun. pure appl. Math. 10, 503—510 (1957).

Schranken für die Lösungen der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung (*) $\Delta u = f(u)$ im R^n sind schon mehrfach gegeben worden. (W. Walter, dies. Zbl. 66, 344; R. Ossermann, On an differential inequality and conformal mapping of surfaces, Stanford Univ. 1956.) Gilt $f(u) \geq h'(u)$, $h'(u)$ positiv nicht fallend und stetig, sowie $\int_0^\infty \left[\int_0^x h'(z) dz \right]^{1/2} dx < \infty$, dann existiert eine durch h' bestimmte

fallende Funktion $g(R)$, so daß alle in einem Gebiet D des Euklidischen Raumes einschließlich des Randes S stetigen Lösungen von (*) die Ungleichung $u(p) \leq g[R(P)]$ erfüllen, $R(P)$ gleich Entfernung von $P \in D$ von S . Es gilt $g(R) \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow 0$, $g(R) \rightarrow -\infty$ für $R \rightarrow \infty$. Man schließt leicht hieraus, daß die Gleichung (*) unter den obigen Voraussetzungen keine überall reguläre Lösung besitzt. Die Arbeit enthält noch Sätze über die Existenz von kugelsymmetrischen Lösungen der Gleichung (*). H. Beckert.

Keller, J. B.: On solutions of nonlinear wave equations. Commun. pure appl. Math. 10, 523—530 (1957).

Unter Benützung von Beweismethoden in der vorstehend besprochenen Arbeit zeigt Verf., daß Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung $u_{tt} - c^2 \Delta u = f(u)$ mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \Phi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$ unter gewissen genau angegebenen Bedingungen nach Verstreichen einer gewissen Zeit unendlich werden. Schranken werden angegeben. Das Resultat wird ausgedehnt auf die nichtlineare Darboux-Gleichung $u_{tt} + k t^{-1} u_t + c^2 \Delta u = f(u)$. H. Beckert.

Variationsrechnung:

Craig, Homer V.: On extensors in the calculus of variations. Math. Mag. 30, 175—191 (1957).

Der Begriff von Extensoren (d. h. Tensoren unter den erweiterten Transformationen) ist in Differentialgeometrie, Mechanik und Relativität durch die Arbeiten von H. V. Craig (dies. Zbl. 47, 403; 58, 90; 67, 333), A. Kawaguchi [Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Math. 9, 1—152 (1940); s. dies. Zbl. 23, 169; 52, 170], M. Kawaguchi (dies. Zbl. 47, 403) usw. wesentlich entwickelt worden. Besonders zeigte der Verf., daß der Formalismus der Extensoren zur unmittelbaren Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen eines konservativen Systems angewandt werden kann [Math. Mag. 22, 245—251 (1949)]. In dieser Arbeit verallgemeinert der Verf. dieses Verfahren und zeigt, daß die Eulersche Gleichung für das typische Problem der Variationsrechnung für Kurven und Flächen durch den Formalismus der Extensoren (d. h. anstatt der Benutzung der partiellen Integration und des Fundamentalthilfssatzes der Variationsrechnung unmittelbar dargestellt und erhalten werden kann. Ferner betrachtet er das Problem der stationären Kurven mit festen Endpunkten,

das entsprechende isoperimetrische Problem, und das Problem der stationären Flächen des Typus der Scheibe mit vorgegebener Randkurve. Es ist sehr bemerkenswert, daß in dieser Arbeit der Zusammenhang zwischen dem formalen Problem der Variationsrechnung und dem der Extensortechnik festgestellt ist. *A. Kawaguchi.*

Jablokov, V. A.: Variation des dreifachen und n -fachen Integrals bei erweiterten Bedingungen, die den Argumenten der zu integrierenden Funktion auferlegt sind. *Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat.* 2 (9), 270—275 (1959) [Russisch].

The paper refers to the formalism of a problem of the variational character without any discussion on the fundamentals. The author considers the integral

$$(I) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} F(x, y, z, u, p_1, p_2, p_3) dx dy dz$$

$p = \partial u / \partial x$, etc., and seeks the conditions for $\delta I = 0$, (II), with the restriction that the auxiliary function ξ occurring in δI has the form (III) $\xi(x, y, z) = u(x) v(y) w(z)$; with (III) taken into account, the author transforms the expression (II) into the form:

$$(IV) \quad \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} (F_u \xi + F_{p_1} \xi_x + F_{p_2} \xi_y + F_{p_3} \xi_z) dx dy dz = 0.$$

Integration by parts, separation of the triple integrals into particular line integrals, and operations on particular terms in (IV) lead to the expressions of the following character:

$$\iiint_{\sigma} F_u dx dy dz = \iint_{\sigma} (F_{p_1} dy dz + F_{p_2} dz dx + F_{p_3} dx dy), \quad \text{etc.}$$

In the case of a double integral and $F(x, y, u, p_1, p_2)$ the problem above was solved by Haar [*Acta Sci. math.* 3, 224—234 (1927)]. Obviously, the technique can be generalized to multiple integral with $F(x_i; u; p_i)$, $i = 1, \dots, n$, with the result:

$$\iiint_{V_n} F_u dx_1 \cdots dx_n = \iint_{\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^n F_{p_i} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

M. Z. v. Krzywoblocki.

Picone, Mauro: Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 28, 131—138 (1960).

Questa nota è l'esposizione, con relative dimostrazioni, di risultati comunicati, ma non in forma esplicita, nella riunione XII della S. I. P. S. (1923), concernenti criteri sufficienti per l'esistenza del minimo del calcolo delle variazioni in più variabili ed in forma ordinaria. In effetti la nota presenta tre criteri, ognuno più restrittivo del precedente, e tutti, meno restrittivi di quello, classico, di Weierstrass.

E. Baiada.

Fleming, W. H. and L. C. Young: Generalized surfaces with prescribed elementary boundary. *Rend. Circ. mat. Palermo*, II. Ser. 5, 320—340 (1957).

In an earlier paper (this Zbl. 78, 138) W. H. Fleming had shown that the Plateau problem of spanning a surface of minimum area and no prescribed topological type in a given simple elementary boundary curve in E_3 may have no solution in terms of surfaces of finite characteristic. In the present paper generalized surfaces in E_n are considered and two concepts of boundary are compared. One is the g -boundary defined in W. H. Fleming and L. C. Young, *Rend. Circolo mat. Palermo*, II. Ser. 5, 117—144 (1956) in terms of linear functionals, another is the boundary rim defined by L. C. Young (this Zbl. 65, 337) in terms of the equivalent class of parametric representations. In the present paper it is shown that the two concepts of boundary agree for elementary surfaces, as well as for oriented generalized surfaces, the g -boundary being undefined for nonoriented generalized surfaces. — For surfaces in E_3 it is proved that the closure of the set of all generalized surfaces

of finite oriented topological type with given rims coincides with the set of all generalized surfaces with corresponding g -boundary. No analogous result holds in E_m , $m \geq 4$. These results are brought to bear on the questions of the calculus of variations for surfaces with unprescribed boundary type. *L. Cesari.*

Fleming, W. H.: Irreducible generalized surfaces. *Rivista Mat. Univ. Parma* 8, 251—281 (1957).

In the present paper the author studies generalized surfaces in the line of L. C. Young's theory (this Zbl. 44, 102; 65, 337). Results of these papers are sharpened by the use of conformal mappings for polyhedra of higher topological type in a way similar to the author's extension of Morrey's theorem to two manifolds (Fleming, this Zbl. 87, 273). Also, the concept of boundary has been extended so as to include multiple points, as well as curves of positive measure. The concept of boundary is obtained by a limiting process which is too involved to be given here. A condition of irreducibility for generalized surfaces is given under which they possess a microrepresentation (Young, l. c.). As application, existence theorems of calculus of variations are given for regular as well as for non regular parametric problems. Some of these extend the one proved by Sigalov in 1951 (this Zbl. 44, 101; 81, 100) and its recent version for surfaces of high topological type. *L. Cesari.*

Rothe, E. H.: Some applications of functional analysis to the calculus of variations. *Proc. Sympos. appl. Math.* 8, 143—151 (1958).

Existence theorems for the minimum of "almost quadratic" functionals are proved in a simple fashion by the use of the methods of functional analysis, especially a theorem of Friedrichs on semi-bounded quadratic forms in a Hilbert space (this Zbl. 8, 392). Also the interpretation is given of the "index form" from this point of view. *T. Kato.*

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Molokovič, Ju. M.: Über eine Näherungsmethode der Lösung von linearen Integralgleichungen. *Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat.* 5 (12), 164—170 (1959) [Russisch].

Es wird eine Iterationsmethode zur Lösung Volterrascher Integralgleichungen zweiter Art von der Form

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) d\xi$$

behandelt, wobei $\varrho(\xi)$ eine stetige nichtnegative Funktion, $f(x) \in L^2(a, b)$, $k(x, \xi)$ im Bereiche $a \leq \xi \leq x < b$ zu L^2 gehörend ist. Eine hinreichende Bedingung der Konvergenz und eine Fehlerabschätzung wird gegeben. Zum Schluß werden zwei numerische Beispiele aufgeführt. *St. Fenyő.*

Birger, I. A.: On a method of solution of integral equations with large values of the parameter. *PMM J. appl. Math. Mech.* 22, 1149—1152 (1959), Übersetzung von *Priklad. Mat. Mech.* 22, 808—809 (1958).

Für die lineare Integralgleichung

$$(1) \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x)$$

sei $y_n(x)$ ein bez. der Gewichtsfunktion $h(x)$ normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen der homogenen Gleichung, also es sei

$$(y_n(\xi), y_m(\xi)) \equiv (y_n, y_m) = \int_a^b y_n(\xi) y_m(\xi) h(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

die zugehörigen Eigenwerte mögen λ_n heißen. Ist $|\lambda| < |\lambda_1|$, so läßt sich (1) durch Iteration numerisch lösen. Für den Fall $|\lambda_{n-1}| < |\lambda| < |\lambda_n|$ empfiehlt Verf.

folgendes theoretisch naheliegende Verfahren: Man berechne $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ und $y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$. Dann läßt sich die Integralgleichung

$$y^*(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y^*(\xi) d\xi - \sum_{m=1}^{n-1} y_m(x) \left(\int_a^b K(z, \xi) y^*(\xi) d\xi, y_m(z) \right) + f(x)$$

durch Iteration lösen. Die Lösung von (1) ist dann

$$y(x) = y^*(x) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{y_m}{\lambda_m/\lambda - 1}(f, y_m).$$

Das Verfahren läßt sich auf Systeme von Integralgleichungen ausdehnen. — Ref. glaubt nicht, daß dieses Verfahren in vielen Fällen praktisch zum Ziel führt, obgleich Verf. angibt, daß unabhängig von ihm A. F. Gurov in seiner Dissertation 1957 eine im Prinzip ähnliche Methode auf ein Problem der Stabschwingungen angewandt hat.

R. Iglisch.

Markman, V. V.: Über die singulären Lösungen einer gestörten linearen Integralgleichung. Izvestija vysš. učebn. Zaved., Mat. 4 (11), 104—110 (1959) [Russisch].

Im Anschluß an eine Arbeit von P. P. Rybin [Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 4), 30—34 (1957)] gibt Verf. Kriterien dafür, daß die inhomogene Integralgleichung der Gestalt

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) + \mu^2 \int_0^1 [A_0(x, s) + A_1(x, s) \varphi(s) + A_2(x, s) \varphi(s)^2] ds$$

im Falle, daß 1 ein einfacher Eigenwert von K ist, eine Grundlösung der Gestalt $\mu^{-1} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \mu \varphi_2(x) + \mu^2 \varphi_3(x) + \dots$ besitzt.

St. Fenyő.

Vajnberg, M. M.: Über die positiven Lösungen gewisser nicht-linearer Integralgleichungen. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenye Zapiski 57, Trudy Kafedr. Mat. 4, 61—73 (1957) [Russisch].

First of all this paper gives a simple geometrical interpretation of the iteration method used here and in some other papers concerning the same problem. This interpretation is the following: let $T = \varphi(t)$ be an increasing function of real variable t , $\varphi(0) = 0$, and let $t_0, t_0 > 0$, be a unique element for which $\varphi(t_0) = t_0$; if the graph of the function $\varphi(t)$ is convex, then the iteration process $t_{n+1} = \varphi(t_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) is convergent, $t_n \rightarrow t_0$; if $\varphi(t)$ is concave, this process is always divergent (for $t_1 \neq t_0$), but the inverse one, $t_n = \varphi(t_{n+1})$, is convergent. Similar interpretation for the function $T = \varphi(t) + b$, $b > 0$ is given too. On the basis of those geometrical considerations the author gives a proof for the following theorem: let $F(u, x)$, $K(x, y, u)$ be increasing functions of u for each $x, y \in B$, where B is a bounded and closed region of E^n ; $F(u, x)$, $K(x, y, u)$ are continuous functions of x, y and u , for $x, y \in B$, $u \in [0, a]$; a is a positive constant; $F(0, x) = 0$, $K(x, y, 0) = 0$. If there exists a positive continuous function $u_0(x)$, $u_0 \leq a$, such that

$$F(u_0(x), x) > f(x) + \int_B K(x, y, u_0(y)) dy,$$

where $f(x)$ is a given positive continuous function, then using the iteration process we can find minimal and maximal continuous and positive solutions of the integral-equation

$$F(u(x), x) = \int_B K(x, y, u(y)) dy + f(x).$$

Similar conditions required for the existence of solutions in L^p is given in theorem 2.

R. Herczyński.

Nikitin, B. D.: Über die Existenz der Lösungen eines unendlichen Systems nicht-linearer Integralgleichungen. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenye Zapiski 57, Trudy Kafedr. Mat. 4, 81—98 (1957) [Russisch].

Es wird das unendliche System von Integralgleichungen betrachtet:

$$u_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_{ik}} K_{ik}(x, y, u_1(y), u_2(y), \dots) dy, \quad (i = 1, 2, \dots, x \in G, G_{ik} \subset G).$$

Der folgende metrische Raum S wird eingeführt: $u \in S \leftrightarrow u = (u_1, u_2, \dots)$ und $u_i(x) \in L_{p_i}, p_i \geq 1$;

$$\rho(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|u_i - v_i\|_{p_i} (1 + \|u_i - v_i\|_{p_i})^{-1} \text{ mit } \lambda_i > 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

Wenn bestimmte Bedingungen für die Funktionen K_{ik} erfüllt sind, dann stellt das Integralgleichungssystem eine Abbildung dar, die eine abgeschlossene, konvexe Menge des vollständigen metrischen Raumes S stetig in eine kompakte Teilmenge überführt. Die Anwendung eines Fixpunktsatzes (der in dieser Form von Tichonov bewiesen wurde) liefert die Existenz einer Lösung des Integralgleichungssystems. Folgende Bedingung, deren Erfülltsein die Existenz einer Lösung sichert, wird formuliert: Für die stetigen Funktionen K_{ik} soll gelten

$$\alpha) \quad |K_{ik}(x, y, u_1, u_2, \dots)| \leq B_{ik}(x, y);$$

$$\beta) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_{ik}} B_{ik}(x, y) dy < \infty, \quad x \in G, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$\gamma) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{G_{ik}} B_{ik}(x, y) dy \right\|_{p_i} \leq B_i < \infty;$$

$$\delta) \quad \begin{aligned} & |K_{ik}(x + h, y, u_1(y), u_2(y), \dots) - K_{ik}(x, y, u_1(y), \dots)| \\ & \leq |B_{ik}(x + h, y) - B_{ik}(x, y)| \cdot |f_{ik}(y, u_1(y), u_2(y), \dots)|; \end{aligned}$$

$$\varepsilon) \quad \left\{ \int_{G_{ik}} |f_{ik}(y, u_1(y), \dots)|^{q_i} dy \right\}^{1/q_i} \leq D_i < \infty, \quad \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1 \right).$$

E. Heyn.

Parameswaran, M. R.: Two tauberian theorems for functions summable (A). J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 77—83 (1959).

Verf. betrachtet die Laplace-Transformation $L(t, s) = \int_0^{\infty} e^{-tu} d\{s(u)\}$ sowie die

Cesàro-Transformation $C^{\alpha}(x, s) = \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} s(u) du$ und die entsprechenden Limitierungsverfahren (A) bzw. (C, α) . Theorem I. Die Funktion $s(u)$ sei (A)-limitierbar, es gebe reelle Zahlen $k \geq 0$, c , für die $C^k(x, s) - (1+c)C^{k+1}(x, s) = O(1)$ gilt. Dann wird $s(u)$ auch von $(C, k+1)$ limitiert. — In Theorem II wird sogar die Konvergenz dieses Ausdrucks sowie $k > 0$ vorausgesetzt, dafür aber gleich auf (C, k) -Limitierbarkeit geschlossen; die betreffende Bedingung ist sogar genau. — Bei dem Theorem I entsprechenden Ergebnis für Folgen statt Funktionen muß man nur $k > -1$ voraussetzen.

K. Zeller.

Ditkin, V. A.: On the theory of operator calculus. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 15—17 (1957) [Russisch].

Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen wird das nullteilerfreie Produkt

$$\varphi(t) \cdot \psi(t) = \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^1 \varphi(x\xi) \psi[(1-x)(t-\xi)] dx \right\}$$

eingeführt und zur Grundlage einer Operatorenrechnung gemacht, mit deren Hilfe man u. a. die modifizierte Besselsche Differentialgleichung $d(t dy/dt)/dt = ay$ unter einer Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ auflösen kann. Bezeichnet man das In-

verse von t mit B , so gilt beispielsweise

$$\frac{1}{B} \psi(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi \psi(u) du, \quad \frac{1}{B^n} = \frac{t^n}{(n!)^2}, \quad \frac{B}{(B-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{a}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{at}),$$

$$\frac{B}{B+a} = J_0(2\sqrt{at}), \quad \frac{B^2}{B^2+a^2} = \text{ber}(2\sqrt{at}), \quad \frac{aB}{B^2+a^2} = \text{bei}(2\sqrt{at}).$$

Der Laplace-Transformation entspricht $\varphi(p) = 2 \int_0^\infty \varphi(t) K_0(2\sqrt{pt}) dt$, wobei das Integral im Falle $|\varphi(t)| < Qe^{2\gamma_0\sqrt{t}}$ für $\Re \sqrt{p} > \gamma_0 > 0$ konvergiert, und die Umkehrformel lautet $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{\varphi}(p) I_0(2\sqrt{pt}) dp$, wobei über irgendeine Parabel

$\Re \sqrt{p} = \gamma > \gamma_0$ zu integrieren ist (vgl. C. S. Meijer, dies. Zbl. 23, 325). Die vorliegende Operatorenrechnung ist zu derjenigen von J. Mikusiński (dies. Zbl. 38, 278) weitgehend analog, wo das Faltungsprodukt die Grundlage bildet. Die Analogie wird allerdings noch besser, wenn man das Faltungsprodukt durch den Ausdruck

$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t-\xi) \psi(\xi) d\xi$ ersetzt, bei dem man zwischen konstanten Zahlen und konstanten Funktionen nicht zu unterscheiden braucht. Während der Verf. letzteres lediglich erwähnt, sind hierzu inzwischen schon von M. Rajewski (dies. Zbl. 84, 285) sowie vom Referenten [Z. angew. Math. Mech. 39, 342—346 (1959)] nähere Ausführungen gemacht worden.

L. Berg.

Vasilach, Serge: Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pour. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 181—238 (1957).

Die von J. Mikusiński (Operatorenrechnung, dies. Zbl. 78, 113) entwickelte Operatorenrechnung, die sich auf Funktionen einer Variablen im Intervall $[0, \infty]$ bezieht, wird auf Funktionen zweier Variablen im Quadranten $[0, \infty]^2$ übertragen. Als Anwendung werden partielle Differentialgleichungen in zwei Variablen mit konstanten Koeffizienten behandelt.

G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• Ljusternik, L. A. und W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Übersetzung aus dem Russischen. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abt. Bd. 8.) 2., unveränd. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1960. X, 256 S. Ganzln. DM 25,—.

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 44, 325.

Koshi, Shôzô: Modularity on semi-ordered linear spaces. II: Approximately additive modulars. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I 13, 166—200 (1957).

Die vorliegende Arbeit knüpft an die Arbeit gleichen Titels von Miyakawa und Nakano [J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I 13, 41—53 (1956)] an. Es sei R ein universal stetiger halbgeordneter Raum und $m(x)$ ein nach unten halbadditiver

Modular auf R . Zu m bestimmt man $m_1(x) = \sup_{i=1}^n m([p_i]x)$, wobei sich das

Supremum über alle Zerlegungen der Projektion $[x]$ in paarweise orthogonale Projektionen $[p_i]$ erstreckt. Die Menge S aller x mit $m_1(x) < \infty$ für ein geeignetes $\alpha > 0$ ist ein halbnormaler Teilraum von R und m_1 ist ein additiver Modular auf S . Der Raum R zerfällt in $R = M \oplus N$, $M = S^{\perp\perp}$, $N = S^\perp$. Ist insbesondere $N = 0$, so heißt $m(x)$ von unten approximativ additiv. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Eigenschaft von oben approximativ additiv erklären. Ist $m(x) < \infty$ für alle x ,

so läßt sich das entsprechende additive $m_1(x)$ durch $m_1(x) = \inf_{i=1}^n m([p_i]x)$

wie oben erklären. Es wird eine Reihe von Bedingungen dafür abgeleitet, wann ein halbadditiver Modular sogar approximativ additiv ist bzw. wann es keinen halbnormalen Teilraum von R gibt mit dieser Eigenschaft. Ebenso werden die konjugierten Module untersucht. Es sei m von unten approximativ additiv. Dann gehören zu m und zu m_1 je zwei Normen auf R . Sind diese Normen äquivalent, so heißt $m(x)$ von unten wesentlich additiv. Entsprechend sind die von oben wesentlich additiven Module eingeführt. Auch diese Eigenschaften der Module werden in ihrem Zusammenhang mit den oben erklärten studiert. Schließlich wird die Verbindung hergestellt zu den Eigenschaften uniform endlich, uniform wachsend, uniform monoton der Module m und m_1 . Für weitere Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden.

G. Köthe.

Shimogaki, Tetsuya: On certain property of the norms by modulars. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I 13, 201—213 (1957).

R sei im folgenden ein universal stetiger halbgeordneter Raum (im Sinn von Nakano), auf dem ein Modular $m(a)$, $a \in R$, erklärt ist. Dann sind auf R die beiden äquivalenten Normen $\|a\| = \inf_{\xi > 0} 1 + \frac{m(\xi a)}{\xi}$, $\|a\| = \inf_{m(\xi a) \leq 1} \frac{1}{\xi}$ erklärt.

Zu R gehört der modularkonjugierte Raum R^m mit dem konjugierten Modular m . Ein Modular m hat die Eigenschaft (*), wenn gilt $\inf_{0 \neq a \in R} \frac{\|a\|}{\|a\|} = \gamma > 1$.

Gilt (*) in einem R ohne atomisches Element, so ist m uniform endlich (d. h. $\sup_{m(x) \leq 1} m(\xi x) < \infty$ für alle $\xi > 0$) und uniform wachsend (d. h. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \inf_{m(x) \geq 1} \frac{m(\xi x)}{\xi} = +\infty$).

Besitzt umgekehrt ein Modular m diese beiden Eigenschaften, so gilt (*) für die zugehörigen Normen. Für $\xi \geq 1$ sei $f(\xi) = \sup_{m(x) \leq 1} \frac{m(\xi x)}{\xi}$ und $g(\xi) = \inf_{m(x) \geq 1} m(\xi x)$.

Ein Modular m heißt uniform p -endlich bzw. uniform p -wachsend, wenn es $\gamma > 0$ und $\xi_0 \geq 1$ gibt, so daß $f(\xi) \leq \gamma \xi^p$ bzw. $g(\xi) \geq \gamma \xi^p$ für alle $\xi \geq \xi_0$ gilt. Ist m uniform p -endlich bzw. uniform p -wachsend, so ist der konjugierte Modular \bar{m} uniform q -wachsend bzw. uniform q -endlich, wobei $1/p + 1/q = 1$. Besitzt R kein atomisches Element und gilt (*) mit $\gamma = p^{1/p} q^{1/q}$, $p \leq q$, $1/p + 1/q = 1$, so ist m uniform p -wachsend und uniform q -endlich. Die Voraussetzung, daß R kein atomisches Element besitzt, kann nicht entbehrt werden.

G. Köthe.

Shimogaki, Tetsuya: On the norms by uniformly finite modulars. Proc. Japan Acad. 33, 304—309 (1957).

R sei ein universal stetiger halbgeordneter linearer Raum im Sinne von Nakano mit einer Norm $\|x\|$. Die Norm heißt endlich monoton, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

$n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß aus $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $|x_i| \cap |x_j| = 0$ für $i \neq j$, $\|x\| \leq 1$, $\|x_i\| \geq \varepsilon$ für alle i , j stets $n \leq n_0$ folgt. Die Norm heißt endlich flach, wenn zu

jedem $\gamma > 0$ ein $\varepsilon(\gamma)$ existiert, so daß aus $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $|x_i| \cap |x_j| = 0$, $\|x\| \geq 1$,

$\|x_i\| \leq \varepsilon$ für alle i, j stets $n \geq \gamma \varepsilon^{-1} \|x\|$ folgt. Ist \bar{R}' der normkonjugierte Raum zu R , so gilt, daß die konjugierte Norm auf \bar{R}' endlich flach bzw. endlich monoton ist, wenn die ursprüngliche Norm endlich monoton bzw. endlich flach ist. Ist ein Modular $m(x)$ auf R gegeben und ist m uniform endlich, d. h. gilt $\sup_{m(x) \leq 1} m(\xi x) < \infty$

für jedes $\xi > 0$, so ist die zugehörige Norm $\|x\| = \inf_{m(\xi x) \leq 1} \frac{1}{|\xi|}$ endlich monoton.

Besitzt R kein atomisches Element und ist $\|x\|$ endlich monoton bzw. endlich flach, so ist umgekehrt m uniform endlich bzw. uniform wachsend (d. h. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \inf_{m(x) \geq 1} \frac{m(\xi x)}{\xi} = \infty$).

G. Köthe.

Shimogaki, Tetsuya: Note on Orlicz-Birnbaum-Amemiya's theorem. Proc. Japan Acad. **33**, 310—313 (1957).

R sei ein universal stetiger halbgeordneter linearer Raum mit einem Modular $m(x)$. Dieser heißt endlich, wenn $m(x) < \infty$ für jedes $x \in R$ gilt, nach oben halbbeschränkt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\gamma_\varepsilon > 0$ existiert, so daß aus $m(x) \geq \varepsilon$ stets $m(2x) \leq \gamma_\varepsilon m(x)$ folgt. Der Modular m heißt monoton vollständig, wenn aus $0 \leq a_\lambda \uparrow$, $\lambda \in \Lambda$, und $\sup_\lambda m(a_\lambda) < \infty$ stets die Existenz von $\bigcup_\lambda a_\lambda$ folgt. Verf. gibt einen neuen Beweis des folgenden Satzes von Amemiya: Besitzt R kein atomisches Element, dann ist jeder monoton vollständige endliche Modular auf R nach oben halbbeschränkt. Sei R ein diskreter halbgeordneter Raum mit einer Basis e_λ , $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \cap e_\mu = 0$ für $\lambda \neq \mu$, so daß jedes positive Element x auf eine und nur eine Weise in der Form $x = \bigcup_\lambda \xi_\lambda e_\lambda$, $\xi_\lambda \geq 0$, dargestellt werden kann. Ist m ein Modular auf R , so sei $\varphi_\lambda(\xi) = m(\xi e_\lambda)$. Es sei nun m ein monoton vollständiger Modular auf dem diskreten R . Notwendig und hinreichend dafür, daß m endlich ist, sind die beiden Bedingungen 1) $\varphi_\lambda(\xi) < \infty$ für alle $\xi \geq 0$ und alle λ , 2) es gibt $\varepsilon, \varepsilon'$ mit $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, so daß aus $\varepsilon \leq m(x) \leq \varepsilon'$ stets $m(2x) \leq \gamma m(x)$ für ein geeignetes $\gamma > 0$ gilt.

G. Köthe.

Koshi, Shōzō: On some type of the modularized linear space. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **14**, 16—28 (1958).

Es werden additive Modulare $m(x)$ auf semiregulären halbgeordneten linearen Räumen R betrachtet. $m(x)$ heißt uniform wachsend, wenn $\inf_{a \neq 0} \frac{m(a)}{\|a\|} \geq \delta > 0$ gilt; $m(x)$ heißt uniform halbregeulär, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß aus $\|x\| \leq \varepsilon$ stets $m(x) = 0$ folgt. Bei Übergang zu den konjugierten Modularen vertauschen sich beide Eigenschaften. In derselben Weise dual sind folgende Eigenschaften: $m(x)$ heißt uniform linear, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein n gibt, so daß aus $\|x\| \geq \varepsilon$ stets $m(x) \leq n\|x\|$ folgt; $m(x)$ heißt uniform unendlich, wenn es ein n gibt, so daß aus $\|x\| \geq n$ stets $m(x) = \infty$ folgt. Ein Element $x \in R$ heißt asymptotisch linear, wenn $\sup_{\xi > 0} \{\xi \gamma(x) - m(\xi x)\} < \infty$ gilt, wobei $\gamma(x) = \sup_{\xi > 0} \frac{m(\xi x)}{\xi}$ ist. Ist A die Menge aller asymptotisch linearen Elemente aus R und gilt $\sup_{x \in A} \sup_{\xi > 0} \{\xi \gamma(x) - m(\xi x)\} < \infty$, so heißt $m(x)$ uniform asymptotisch linear. Die duale Eigenschaft dazu ist: $m(x)$ heißt uniform unstetig, wenn für ein geeignetes n aus $m(x) < \infty$ folgt $m(x) \leq n$. Weitere Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen und Beispiele.

G. Köthe.

Alexiewicz, A. and Z. Semadeni: The two-norm spaces and their conjugate spaces. Studia math. **18**, 275—293 (1959).

Ein Zweinormenraum $\langle X, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ ist ein linearer Raum mit zwei Normen. Es wird $\|x\|_* \leq \|x\|$ für alle $x \in X$ vorausgesetzt. $\langle X, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ heißt normal, wenn die Einheitskugel S von $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ bezüglich $\| \cdot \|_*$ abgeschlossen ist. Eine Folge $x_n \in X$ heißt γ -konvergent gegen x_0 , wenn $\sup \|x_n\| < \infty$ und $\lim \|x_n - x_0\|_* = 0$ gilt. $\langle X, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ heißt γ -vollständig, wenn es γ -folgenvollständig ist. Ein lineares Funktional ξ auf X heißt γ -linear, wenn aus $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ stets $\xi(x_n) \rightarrow 0$ folgt. Es gilt für den Raum \mathcal{E}_γ der γ -linearen Funktionale die Beziehung $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_\gamma \subset \mathcal{E}^*$, \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}^* der zu $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ -bzw. $\langle X, \| \cdot \|_* \rangle$ konjugierte Raum. Der Raum $\langle \mathcal{E}^*, \| \cdot \|_*, \| \cdot \| \rangle$ heißt der γ -konjugierte Raum zu $\langle X, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$. Es ist ein normaler, γ -vollständiger Zweinormenraum. $\langle \mathcal{X}, \| \cdot \| \rangle$ bzw. $\langle \mathcal{X}^*, \| \cdot \|_* \rangle$ seien die bikonjugierten Räume zu $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ bzw. $\langle X, \| \cdot \|_* \rangle$. Es sei ferner $\langle \mathcal{X}^{(\gamma)}, \| \cdot \| \rangle$ der konjugierte Raum zu $\langle \mathcal{E}^*, \| \cdot \| \rangle$. Der Zweinormenraum $\langle \mathcal{X}^{(\gamma)}, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ ist der γ -konjugierte Raum zu $\langle \mathcal{E}^*, \| \cdot \|_* \rangle$ und ist $\langle X, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ normal, so läßt es sich in $\langle \mathcal{X}^{(\gamma)}, \| \cdot \|, \| \cdot \|_* \rangle$ kanonisch und bezüglich beider Normen isometrisch einbetten. Ist dies eine Ein-

bettung auf $\mathfrak{X}^{(\gamma)}$, so heißt $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ γ -reflexiv. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn S kompakt bezüglich der Topologie $\sigma(X, \mathcal{E}_\gamma)$ ist. Jeder γ -abgeschlossene Teilraum und der γ -konjugierte Raum eines γ -reflexiven Raumes sind wieder γ -reflexiv. Die Reflexivität von $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ ist gleichbedeutend damit, daß $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ γ -reflexiv ist und $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}$ gilt. Jeder normale $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ läßt sich auf eindeutige Weise in einen γ -vollständigen normalen $\langle X^c, |||, ||| \rangle^*$ einbetten, X^c ein Teilraum der vollständigen Hülle von $\langle X, |||, ||| \rangle^*$. Ist $\langle S, |||, ||| \rangle^*$ kompakt bzw. präkompakt, so heißt der normale $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ γ -kompakt bzw. γ -präkompakt. Aus der γ -Kompaktheit eines normalen X folgt die γ -Reflexivität. Ferner gilt, daß $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ dann und nur dann γ -präkompakt ist, wenn $\langle \mathcal{E}^*, |||, ||| \rangle^*$ γ -kompakt ist. Weitere Aussagen über γ -Kompaktheit und Separabilität. $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ heißt gesättigt, wenn $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}$ gilt. Es wird eine Reihe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abgeleitet, daß X gesättigt ist, z. B. \mathcal{E}^* ist dicht in $\langle \mathcal{E}, |||, ||| \rangle^*$, oder jeder lineare abgeschlossene Teilraum von $\langle X, |||, ||| \rangle^*$ ist γ -abgeschlossen. Jeder Teilraum eines gesättigten X ist wieder gesättigt, dagegen braucht weder die γ -vollständige Hülle noch der γ -bikonjugierte Raum gesättigt zu sein. *G. Köthe.*

Sundaresan, K.: On strictly convex spaces. J. Madras Univ., Sect. B 27, 295—298 (1957).

Soient E un espace vectoriel, $x \rightarrow |x|$ une semi-norme dans E ; l'A. dit que la semi-norme est strictement convexe lorsque $|x + y| = |x| + |y|$ et $|x| = |y| = 1$ entraînent $x = y$; et il prouve: 1. dans le cas d'une norme, cette définition de convexité stricte est équivalente à celle de Clarkson (Cf. ce Zbl. 15, 356); 2. pour qu'une semi-norme soit strictement convexe, il faut et il suffit que le seul point b tel que $|a - b| = |b - c| = \frac{1}{2} |a - c|$ soit $b = \frac{1}{2}(a + b)$; 3. $d(x, y)$ étant une distance du type (F) , pour que $\|x\| = d(x, 0)$ soit une norme strictement convexe, il faut et il suffit que $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$ entraîne $b = ta + (1 - t)c$, avec $0 \leq t \leq 1$.

A. Pereira Gomes.

Bastiani, Andrée et Charles Ehresmann: Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2695—2697 (1959).

Cette note fait suite à deux notes antérieures de A. Bastiani (ce Zbl. 87, 107; 89, 92). Dans un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur le corps des réels muni de la topologie fine, on présente sans démonstration un certain nombre de résultats concernant les variétés d'appui d'une pyramide convexe, les pyramides simpliciales généralisées, les polyèdres sans sommets. Des exemples illustrent des situations géométriques telles que des pyramides sans hyperplan d'appui strict, des pyramides sans arêtes, etc.

A. Pereira Gomes.

Davis, Chandler: Separation of two linear subspaces. Acta Sci. math. 19, 172—187 (1958).

L'A. étudie dans les espaces hilbertiens (réels ou complexes) l'analogie d'une situation géométrique qui, dans un espace euclidien de dimension 4, peut être énoncée comme suit: deux plans \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} dont l'intersection est l'origine étant donnés, il existe deux plans orthogonaux \mathfrak{E}_1 et \mathfrak{E}_2 dont l'intersection est l'origine et tels que $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{Q}$ sont des droites faisant entre elles des angles θ_i ($0 \leq \theta_i \leq \pi/2$); ces angles sont univoquement déterminés par la pair $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ et ils la déterminent à une congruence près. L'A. reconnaît que certains des résultats fondamentaux sont dus à Dixmier (ce Zbl. 31, 362; 45, 391). Son exploit suit cependant une voie différente, basée sur les propriétés des opérateurs C et S qu'il introduit au § 3 et qui généralisent les fonctions trigonométriques (en ce sens, qu'ils sont identiques aux opérateurs scalaires $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$ pour la dimension 2). Au § 3 il montre que deux sous-espaces $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ étant donnés, pour que $(1) \dim(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}^\perp) = \dim(\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}^\perp)$, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur unitaire W qui

applique \mathfrak{P} sur \mathfrak{Q} , \mathfrak{P}^\perp sur \mathfrak{Q}^\perp et qui commute avec l'opérateur $C(P, Q)$ P et Q étant les projecteurs sur \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} , respectivement; ceci renforce un théorème connu de Sz.-Nagy. Si (1), alors $U = C^{-1/2}(PQ + Q^\perp P^\perp)$ est un tel opérateur unitaire. Au § 4, le „bissecteur“ de \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} est défini, lorsque (1) est vérifiée, moyennant une symétrie X qui échange \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} . Entre les opérateurs U et les bissecteurs, des relations sont établies qui généralisent des faits géométriques du cas bidimensionnel; notamment U est le produit de deux symétries. Au § 5, on trouve un ensemble complet d'invariants unitaires pour \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , défini en termes de fonction multiplicité spectrale de $C(P, Q)$ et, au § 6, d'autres théorèmes de caractérisation. Finalement, au § 7 il est montré que si W est un opérateur unitaire qui applique \mathfrak{P} sur \mathfrak{Q} et \mathfrak{P}^\perp sur \mathfrak{Q}^\perp , alors $\|1 - U\| \leq \|1 - W\|$; d'autres propriétés extrémales de U sont données.

A. Pereira Gomes.

Rutickij, Ja. B.: Über eine Klasse von Banachschen Räumen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1 (73), 230—234 (1957) [Russisch].

The paper is a survey (without proofs) of some results of the author and Krasnosel'skij concerning Orlicz spaces. The connection between L_M and L_M^* (without the Δ_2 -condition), a kind of weak convergence, and the problem of finding some effective formulas for functions equivalent to the function conjugate (in the sense of Young) to a given function are examined.

R. Sikorski.

Bessaga, C., A. Pełczyński and S. Rolewicz: Some properties of the space (s) . Colloquium math. 7, 46—51 (1959).

Es werden einige Charakterisierungen des Montelraumes (s) aller reellen Folgen gegeben: Ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum X ist dann und nur dann topologisch isomorph zu (s) , wenn jeder unendlichdimensionale Teilraum von X einen zu (s) topologisch isomorphen Teilraum enthält. Ein (F) -Raum im Sinn von Banach mit der Basis (e_n) ist zu (s) topologisch isomorph, wenn jeder unendlichdimensionale Teilraum einen zu (s) isomorphen Teilraum enthält. Ferner gilt: E sei ein (F) -Raum mit der (nichthomogenen) Norm $|x|$; E enthält einen zu (s) topologisch isomorphen Teilraum, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in E$ existiert mit $|tx| < \varepsilon$ für alle reellen t .

G. Köthe.

Seregin, L. V.: Über stationäre Maße im Folgenraum. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 6 (84), 151—154 (1958) [Russisch].

Sei Ω_N die Menge der Folgen $\{i_k\}$ ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$), deren Elemente nur der Werte $0, 1, \dots, N-1$ fähig sind. Die Zylinder in Ω_N (endlich viele aufeinander folgende Koordinaten fixiert, die übrigen beliebig) erzeugen eine σ -Algebra \mathfrak{A}_N . Verf. betrachtet stationäre (verschiebungstreue) Maße μ auf \mathfrak{A}_N ; die Menge dieser Maße sei M_N . Ein Maß heißt ergodisch, wenn jede verschiebungsinvariante Menge das Maß 0 hat oder Komplement einer Menge vom Maß 0 ist. — Verf. konstruiert eine Abbildung α von M_N in M_2 , die eineindeutig, linear, stetig und „ergodentreu“ ist. (Letzteres besagt, daß Urbild und Bild gleichzeitig ergodisch sind.) Zum Schluß betrachtet er noch den Fall $N = \infty$.

K. Zeller.

Porcelli, Pasquale: Two embedding theorems with applications to weak convergence and compactness in spaces of additive type functions. J. Math. Mech. 9, 273—292 (1960).

“Let X be a set, $\sigma(X)$ an algebra of subsets of X , and $H(X)$ the normed linear complete space of bounded additive (not necessarily infinitely additive) functions on $\sigma(X)$, where the norm of the element f in $H(X)$ is the total variation $V(f, X)$ of f on $\sigma(X)$. The principal object of this paper is to characterize weak convergence of sequences in $H(X)$ and sequential weak compactness of subsets of $H(X)$ ”. The main results are: 1. A sequence $\{\chi_m\}$ in $H(X)$ is weakly convergent if and only if $\lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m(E_p)$ exists for every countable family $\{E_p\}$ of non-overlapping members of $\sigma(X)$. 2. A subset H_0 of $H(X)$ is weakly sequentially compact if and only if H_0 is

uniformly bounded and for each sequence $\{\alpha_m\}$ in H_0 , $\lim_{m,n} \sum_{p \geq n} |\alpha_m(E_p)| = 0$ for every family $\{E_p\}$ as above. 3. A sequence $\{\alpha_m\}$ in $H(X)$ is weakly convergent if and only if $\lim \alpha_m(E)$ exists for each E in $\sigma(X)$ and the sequence is uniformly absolutely continuous with respect to the function

$$\alpha_0(E) = \sum_{m=1}^{\infty} (2^m [1 + V(\alpha_m, X)])^{-1} V(\alpha_m, E).$$

These theorems are proved by embedding an arbitrary separable subspace of $H(X)$ into the space of ordinary functions of bounded variation on an interval or into the space of continuous functions on an interval. M. Jerison.

Gluskin, L. M.: Halbgruppen und Ringe von Endomorphismen linearer Räume. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **23**, 841—870 (1959) [Russisch].

Ausführliche Beweise und eingehende Behandlung der in einer früher (dies. Zbl. **88**, 323) erschienenen Arbeit des Verf. mitgeteilten Sätze. J. Szendrei.

Newman, Donald J.: A radical algebra without derivations. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 584—586 (1959).

There exists a Banach algebra A equal to its own radical which has no non-trivial (continuous) derivation into itself: Fix complex $c_n \neq 0$, $1 \leq n < \infty$, such that $|c_n| \geq |c_{n+1}|$, $c_n \rightarrow 0$, and $n^\varepsilon |c_{n+1}|^{n+1} |c_n|^{-n} \rightarrow \infty$ for each $\varepsilon > 0$, (e. g. $c_n = 1/\log(n+1)$). Then A consists of all formal power series $a(t) = \sum a_n t^n$ such that $\|a(t)\| = \sum |a_n| |c_n|^n < \infty$. F. D. Quigley.

Fell, J. M. G.: The dual spaces of C^* -algebras. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 365—403 (1960).

The present paper is concerned with families F of $*$ -representations T of a C^* -algebra A on a Hilbert space and their direct integrals, with topological properties of the structure (dual) space \hat{A} of A (here, the topologically irreducible $*$ -representations), and with various applications of these general results to locally compact groups, particularly the $n \times n$ complex unimodular groups. In Chapter I, T is said to be weakly contained in F if and only if one of the following (equivalent) conditions is satisfied: (i) every functional $f \geq 0$ on A associated with T (i. e. $f(a) = (T_a x, x)$) is a weak* limit of finite sums of functionals ≥ 0 associated with F (i. e. with $S \in F$), or (ii) kern $T \supset \cap \{\text{kern } S \mid S \in F\}$. If $F \subset \hat{A}$, then its closure $\bar{F} = \{T \mid T \text{ is weakly contained in } F\}$, by definition. Two families F and E are called weakly equivalent if and only if each $T \in F$ (resp. E) is weakly contained in E (resp. F). Any F is weakly equivalent to a (unique) closed subset E of \hat{A} . If $T = \int \oplus T^t (t \in X, \text{ locally compact Hausdorff})$, then T is weakly equivalent to $\{T^t \mid t \in X\}$. Necessary and sufficient conditions are given that a direct sum of completely continuous T 's in \hat{A} be completely continuous. In Chapter II, the convergence of nets $\{T^i\}$ in \hat{A} is related to the functions $T \rightarrow \|T_x\|$ and $T \rightarrow \text{trace}(T_x)$, ($T \in \hat{A}$, x fixed in A); e. g. if all T^i have dimension $\leq n$, and $T^i \rightarrow S^m$, $1 \leq m \leq r$, S^m distinct in \hat{A} , then $\sum \dim S^m \leq n$. The applications to locally compact groups G include the following: If $T \in \hat{G}$ and $F \subset \hat{G}$, then $T \in \bar{F}$ if and only if some function of positive type associated with T is a uniform limit (on compact sets) of sums of functions of positive type associated with F . In Chapter III, a detailed study is made of the (hull-kernel) topology of \hat{G} for G $n \times n$ complex unimodular, and the irreducible representations of such a G which are weakly contained in the regular representation are determined. F. D. Quigley.

Schaefer, H. H.: On the Fredholm alternative in locally convex linear spaces. Studia math. **18**, 229—245 (1959).

Im folgenden seien E und F beliebige reelle oder komplexe separierte lokalkonvexe Räume. Ein Homomorphismus T von E in F heißt σ -Transformation (vgl. H.

Schaefer, dies. Zbl. **73**, 325), wenn sein Nullraum $N(T)$ endlichdimensional und sein Bildraum $B(T)$ abgeschlossen und endlichcodimensional ist. Die ganze Zahl $\kappa(T) = \dim N(T) - \text{codim } B(T)$ wird Index von T genannt. Es folgen Untersuchungen über das Verhalten von σ -Transformationen beim Übergang zu den Adjungierten. Die unter Verwendung des Begriffes der normalen Auflösbarkeit von Gleichungen definierten Fredholmschen Transformationen sind gerade diejenigen schwachen σ -Transformationen, die den Index Null besitzen. Eine zweite Charakterisierung besagt, daß eine lineare Abbildung T von E in F dann und nur dann eine Fredholmsche Transformation ist, wenn sie sich mit einem schwachen Isomorphismus U von E auf F und einer endlichdimensionalen, schwach stetigen linearen Abbildung V_0 von E in F in der Form $T = U + V_0$ darstellen läßt. Dabei darf V_0 nicht durch eine beliebige kompakte lineare Abbildung V von E in F ersetzt werden. Eine schwache σ -Transformation von E in sich wird als Rieszsche Transformation bezeichnet, wenn die Folge der linearen Unterräume $N(T^n)$ bzw. $B(T^n)$ für hinreichend großes n stationär ist. Man erhält auf diese Weise gerade diejenigen Fredholmschen Transformationen von E in sich, für die der lineare Unterraum $\bigcup_{n=1}^{\infty} N(T^n)$ endlichdimensional ist. Eine lineare Abbildung T von E in sich ist dann und nur dann eine Rieszsche Transformation, wenn sie sich mit einem schwachen Automorphismus U von E und einer endlichdimensionalen, schwach stetigen linearen Abbildung V_0 von E in sich in der Form $T = U + V_0$ darstellen läßt, so daß außerdem $UV_0 = V_0U$ gilt. Abschließend wird für eine beschränkte lineare Abbildung eines folgenvollständigen separierten komplexen lokalkonvexen Raumes gezeigt, daß das Spektrum eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene ist. Die Menge der Fredholmschen Punkte ist offen. A. Pietsch.

Beck, Anatole: Eigen operators of ergodic transformations. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 118—129 (1960).

The author considers the following question concerning a linear operator T on a Banach space \mathfrak{X} with $\|T\| \leq 1$. Does there exist a measure space (S, Σ, m) , an ergodic measure-preserving transformation h on S , and a strongly measurable function X from S into \mathfrak{X} , not identically zero, such that $X(h(s)) = T(X(s))$ a. e. in S ? If so, T is said to be an eigen operator of h . Here, h is called ergodic if for every pair of measurable sets A, B , not of measure 0, there is a positive integer i such that $m(h^i(A) \cap B) > 0$. Theorem. In order that T be an eigen operator with $0 < m(S) < \infty$, it is necessary and sufficient that there exist $x \neq 0$ in \mathfrak{X} for which the set P_x , the closure in \mathfrak{X} of $\{T^i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, is compact and contains x . Sufficiency of the condition is proved by defining a multiplication in P_x under which P_x becomes a monothetic abelian compact topological group with identity x and generator $T(x)$. The Haar measure space of P_x plays the role of (S, Σ, m) , the transformation h is multiplication by $T(x)$, and the function X is the identity mapping of P_x into \mathfrak{X} . Theorem. In order that T be an eigen operator with $m(S) = \infty$, it is necessary and sufficient that there exist $x \neq 0$ for which $x \in P_x$. In this case, sufficiency is proved by assigning measure 0 to each Borel set of the first category in P_x and measure ∞ to all other Borel sets in P_x , and proceeding as before. The author was unable to find an example of an eigen operator for an infinite measure space that contains a set of positive measure. This and other unsolved problems are listed at the end of the paper.

M. Jerison.

Davis, Chandler: Compressions to finite-dimensional subspaces. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 356—359 (1958).

\mathcal{H} étant un espace de Hilbert (réel ou complexe) de dimension quelconque, soient A un opérateur hermitien, P une projection hermitienne. — L'A. démontre des formules intéressantes l'étude de l'opérateur compression PAP de A à $P\mathcal{H}$, dans le cas où ce sous-espace est de dimension finie. Soient (x_1, \dots, x_n) une base de $P\mathcal{H}$ et G

le déterminant de Gram de ces points; $G(x_k; z)$ représente le déterminant obtenu en remplaçant la k -ième ligne de G par les produits scalaires (z, x_j) , $j = 1, \dots, n$; $G(x_k, z)(x_h; y)$ représente le déterminant obtenu en remplaçant la h -ième ligne de $G(x_k, z)$ par (y, x_j) , $j = 1, \dots, n$, et ainsi de suite. La première formule dit que la composante de Pz suivant x_k est $G^{-1}G(x_k; z)$. Les autres formules donnent, en fonction des déterminants définis plus haut, les fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de l'opérateur compression. Par exemple, si l'on pose $\det(\lambda + B) = \sum_p c_p(B) \lambda^{n-p}$ pour un opérateur B , on a pour l'opérateur compression

$$c_p(PAP) = G^{-1} \sum G(x_{k_1}; Ax_{k_1}) \cdots G(x_{k_p}; Ax_{k_p}),$$

le signe de somme portant sur toutes les combinaisons de p indices distincts. Ceci donne la trace pour $p = 1$. Une autre formule concerne le cas où A est aussi une projection sur un sous-espace de dimension finie. A. Pereira Gomes.

Levitan, B. M.: Adjoined operators of generalized translation. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 401—404 (1958) [Russisch].

In this note, the author gives further results of his researches (see B. M. Levitan, this Zbl. 86, 320). C. Foias.

Porath, Günter: Störungstheorie der isolierten Eigenwerte für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum. Math. Nachr. 20, 175—230 (1959).

Unter Verwendung der Spektraltheorie abgeschlossener linearer Transformationen im Banach-Raum (Taylor, Dunford) läßt sich die Störungstheorie für „reguläre“ abgeschlossene lineare Transformationen $T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots$ im Banach-Raum entwickeln. Das Ziel des Verf. ist es, in der vorliegenden Arbeit die Hauptergebnisse der Störungstheorie für den Transformationstyp $T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1$ zu verallgemeinern. Dabei seien T_0 und T_1 lineare Transformationen mit gemeinsamem Definitionsbereich D (enthalten in einem Banach-Raum B), ferner sei T_0 abgeschlossen (in D). Es gelte die Ungleichung $\|T_1 f\| \leq H(\|f\|, \|T_0 f\|)$ für $f \in D$, mit einer geeigneten stetigen Funktion $H(\xi, \eta)$. Das Spektrum von T_0 enthalte einen isolierten Punkt ζ_0 . Dann ist $T(\varepsilon)$ für alle ε in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ abgeschlossen und das Spektrum von $T(\varepsilon)$ besteht im Innern einer bestimmten Umgebung von ζ_0 aus einem isolierten Teil $\sigma(\varepsilon)$, der sich für $\varepsilon \rightarrow 0$ auf ζ_0 zusammenzieht. Verf. untersucht nun die lineare Transformation $T(\varepsilon)$ im Hinblick auf folgende Probleme: 1. Unter welchen Bedingungen besteht $\sigma(\varepsilon)$ aus einem „regulären“ Eigenwert $\zeta(\varepsilon) = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots$ von $T(\varepsilon)$? 2. Welche Bedingungen gewährleisten, daß $\sigma(\varepsilon)$ einen regulären Eigenwert von $T(\varepsilon)$ enthält? 3. Bestimmung regulärer Eigenelemente von $T(\varepsilon)$. 4. Fehlerabschätzungen und Konvergenzradius für die regulären Eigenwerte und Eigenelemente. Der isolierte Teil $\sigma(\varepsilon)$ besteht aus einem regulären Eigenwert, wenn der isolierte Punkt ζ_0 die „Hauptvielfachheit“ 1 besitzt. Beim zweiten Problem wird vorausgesetzt, daß ζ_0 ein Eigenwert von T_0 ist und der zu ζ_0 gehörende „Haupteigenraum“ $M(\zeta_0)$ mit dem Eigenraum $E(\zeta_0)$ identisch ist. Bezeichnet P_0 die Projektion von B auf $M(\zeta_0)$, so soll außerdem die (beschränkte) lineare Transformation $P_0 T_1 P_0$ in $M(\zeta_0)$ einen isolierten Eigenwert von der Hauptvielfachheit 1 besitzen. — Für den Fall der „diskreten“ ersten (einfachen) Näherung wird vorausgesetzt, daß sich P_0 in der Gestalt $P_0 f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle f, f_{\nu}^* \rangle f_{\nu}$ (für $f \in B$), mit ein Biorthogonalsystem $\{[f_{\nu}, f_{\nu}^*]\} \subseteq B \times B^*$ darstellen läßt. Verf. gibt dann ein Rekursionssystem zur Bestimmung der ζ_{ν} und z_{ν} in den Ansätzen $\zeta(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \zeta_{\nu}$ und $z(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} z_{\nu}$ für den regulären Eigenwert bzw. für das reguläre Eigenelement an. Im Zusammenhang damit wird schließlich auch das vierte Problem beantwortet. — Für einen speziellen Transformationstyp, die abgeschlossenen linearen „Folgen-Transforma-

tionen“ von der Form $Tf = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \langle f, f_{\nu}^* \rangle f_{\nu}$ ($f \in B$) werden einige wichtige Größen, die in den Fehlerabschätzungen auftreten, näher bestimmt. Die bei den Beweisen herangezogenen funktionalanalytischen Hilfsmittel über Projektionen und Biorthogonalsysteme sind auch für sich von großem Interesse. Ist B speziell ein reflexiver Banach-Raum, so vereinfachen sich einige Sätze über Biorthogonalsysteme; so ergibt sich durch Spezialisierung ein Kriterium für die Gültigkeit der „verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung“:

$$\langle f, f^* \rangle = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle f, f_{\nu}^* \rangle \langle f_{\nu}, f^* \rangle \quad (\text{für } [f, f^*] \in B \times B^*). \quad H. Pachale.$$

Kato, Tosio: Perturbation of continuous spectra by trace class operators. Proc. Japan. Acad. **33**, 260—264 (1957).

Wie in einer vorangehenden Arbeit (siehe dies. Zbl. **89**, 324) wird die Störung eines selbstadjungierten Operators H_0 in der Form $H_0 + V$ untersucht. Es wird gezeigt, daß die Ergebnisse der früheren Arbeit, in der als Störoperatoren V nur selbstadjungierte Operatoren von endlichem Range zugelassen waren, im wesentlichen erhalten bleiben, wenn man für V selbstadjungierte Operatoren der „trace-class“ (das sind Operatoren, die sich als Produkt von zwei Operatoren der Schmidtschen Klasse darstellen lassen) in Betracht zieht.

H. Krumhaar.

Heuser, Harro: Über Eigenwerte und Eigenlösungen symmetrisierbarer finiter Operatoren. Arch. der Math. **10**, 12—20 (1959).

Es sei A ein beschränkter Operator auf einem Hilbert-Raum X ($A \in \mathcal{L}(X)$). (Zu den folgenden Bezeichnungen siehe das Referat einer früheren Arbeit, vgl. dies. Zbl. **84**, 111). A heißt finit: wenn $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ und $X/\mathfrak{B}(A - \lambda I)$ für jedes $\lambda \neq 0$ dieselbe endliche Dimension haben; vollfinit: wenn außerdem $A - \lambda I$ für jedes $\lambda \neq 0$ beide Kettenbedingungen erfüllt; symmetrisierbar durch einen symmetrischen Operator H auf X : wenn HA symmetrisch ist; vollsymmetrisierbar durch H : wenn außerdem $He \neq 0$ für jede Eigenlösung von A zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ gilt. — Ist A ein beschränkter, finiter, durch $H \geq 0$ vollsymmetrisierbarer Operator und $HA \neq 0$, so gibt es mindestens einen Eigenwert $\lambda \neq 0$; die Eigenwerte sind reell, haben endliche Vielfachheit und können sich nur im Nullpunkt häufen. Man erhält sie durch ein Extremalverfahren. Jedes Element $e \in HAX$ läßt sich nach den (H -orthonormierten) Eigenfunktionen von A entwickeln. Ist $HAx \neq 0$, so konvergieren die Folgen $A^{2n}x/||A^{2n}x|| \rightarrow h \in X$, $||A^{2n+2}x||/||A^{2n}x|| \rightarrow \omega$ und mindestens eines der Elemente $e' = h + (1/\sqrt{\omega}) A h$ bzw. $e' = h - (1/\sqrt{\omega}) A h$ ist Eigenlösung von A zum Eigenwert $\sqrt{\omega}$ bzw. $-\sqrt{\omega}$. — Die Voraussetzung $H \geq 0$ kann man hierbei durch die Forderung der Vertauschbarkeit $HA = AH$ ersetzen.

J. Schröder.

Ionescu Tulcea, C. and Arthur B. Simon: Spectral representations and unbounded convolution operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA **45**, 1765—1767 (1959).

The present note consists of two parts, each containing the announcement of a theorem. The first theorem generalizes several of the C. Ionescu Tulcea's representation theorems (this Zbl. **87**, 319). The second part is based on a powerful approach to convolution operators [an approach apparently discovered by Ju. M. Berezanskij and S. G. Krejn (this Zbl. **80**, 319)]; the corresponding theorem extends the main-results that have been obtained by R. A. Kunze (this Zbl. **87**, 115). Now follows a sketch of the setting (in a somewhat simplified form) for the first part of the first theorem. Let S be a locally compact space, and let \mathcal{A} be a linear subspace of the vector-space of complex Radon measures having compact support in S . Suppose that the linear space \mathcal{A} is endowed with a multiplication (denoted $*$) such that the couple $(\mathcal{A}, *)$ is an algebra; two additional restrictions guarantee that \mathcal{A} be large enough. Let $E(1)$ be the set of all continuous complex-valued functions

$\chi \not\equiv 0$ defined on S with $|\chi(s)| \leq 1$ (for $s \in S$) and such that the mapping $\mu \rightarrow \int \chi \cdot d\mu$ is a group representation of $(\mathcal{A}, *)$. Let $\mathfrak{S}(X)$ denote the family of scalar operators on a fixed Banach space X . Next, let $s \rightarrow U_s$ be a weakly continuous mapping of S into $\mathfrak{S}(X)$ with $|U_s| \leq 1$ (for $s \in S$) and such that the mapping $\mu \rightarrow \int U \cdot d\mu$ is a group representation of $(\mathcal{A}, *)$. Finally, the hypotheses presuppose the existence of a σ -complete Boolean algebra \mathcal{B} (consisting of projectors in X) such that \mathcal{B} contains the range of the spectral measure of U_s , whenever $s \in S$. Theorem. There exists a spectral family m on $E(1)$ such that, for each s in S , the operator U_s is weakly defined by the integral $\int \langle s, \chi \rangle \cdot dm(\chi)$, where χ runs over $E(1)$. The authors give a similar representation for suitable families of commuting normal operators on a Hilbert space. No proofs are given. *G. L. Krabbe.*

Iochvidov, I. S. und M. G. Krejn: Spektraltheorie der Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik. II. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 8, 413—496 (1959) [Russisch].

Les AA. continuent leur travail (ce Zbl. 72, 134) sur les espaces Π_χ . Dans le quatrième chapitre on étudie des sous-espaces invariants d'un opérateur unitaire U : 1. si U n'a pas de valeurs propres de module $\neq 1$, alors les valeurs propres (en nombre fini $\leq \chi$) par rapport à un sous-espace invariant positif T de dimension χ , ainsi que leurs ordres de multiplicité, ne dépendent pas de T ; 2. si U est cyclique, pour chaque valeur propre il existe un seul vecteur propre (jusqu'à une constante multiplicative près); 3. si $P(\lambda)$ est un polynôme sans racines à l'intérieur du cercle unité, alors la condition nécessaire et suffisante afin que $(P(U)x, P(U)x) \leq 0$ pour tout $x \in \Pi_\chi$, est que P soit divisible par rapport au polynôme minimal de U dans un certain sous-espace invariant. Le chapitre suivant s'occupe des suites $\{c_p\}_{0 \leq p < \infty}$ qui appartiennent à la classe \mathfrak{P}_χ . On dit que la suite $\{c_p\}$ appartient à la classe \mathfrak{P}_χ s'il existe un entier n_0 tel que toute forme quadratique $\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \xi_q$ ($c_{-p} = c_p$) avec $n \geq n_0$ ait exactement χ carrés positifs. Une telle suite fournit le produit scalaire (x, y) d'un Π_χ et un opérateur U unitaire et cyclique dans cet espace. Le résultat principal est la représentation intégrale de ces suites. On démontre aussi que toute suite finie $\{c_p\}_{0 \leq p \leq n-1}$, telle que la forme quadratique ci-dessus ait exactement χ carrés positifs, peut être prolongée d'une manière unique jusqu'à une suite de la classe \mathfrak{P}_χ . Dans le cas $\chi = 1$, on a une et une seule des formes

$$c_p = \varrho \operatorname{ch} p\zeta - \int_0^\pi \cos pt \, d\sigma(t) \quad (\text{cas hyperbolique})$$

$$c_p = a - \int_0^\pi \cos pt \, d\sigma(t) \quad (\text{cas elliptique})$$

$$c_p = c_0 + \int_0^\pi \frac{\sin^2(pt/2)}{\sin^2(t/2)} d\sigma(t). \quad (\text{cas parabolique}).$$

Ces formes sont utilisées dans le dernier chapitre à la représentation des hélices dans un espace de Lobatchevski à une infinité de dimensions. On appelle espace de Lobatchevski et on désigne par L_R l'ensemble des éléments de Π_1 qui satisfont à la relation $(x, x) = 1$, muni de la métrique hyperbolique $d(x, y) = R \log [(x, y) + \sqrt{(x, y)^2 - 1}]$ ($R > 0$). Une hélice dans cet espace est une fonction de variable réelle $t \rightarrow x_t$, satisfaisant à la condition $[x_t, x_s] = \Delta(t - s)$ où Δ est une fonction non négative, paire et continue. *G. Marinescu.*

Herz, Carl S.: The spectral theory of bounded functions. Trans. Amer. math. Soc. 94, 181—232 (1960).

The subject of this article is harmonic analysis in the space $C(\Gamma)$ of bounded continuous functions on a given locally compact abelian group. While emphasizing his own results, the author surveys — in a unified, lucidly organized form — a large

number of results that are either unpublished, or that are dispersed in the literature. Important ideas are fully discussed from various viewpoints (including the viewpoint of classical analysis). Illustrative examples are plentiful. Let $\varphi \in C(I)$: §§ 1—2 deal with the spectrum $\Lambda(\varphi)$ and its properties, whereas the point spectrum of φ is defined and analyzed in the case where φ is a uniformly continuous function. The four last headings are: Potential theory and spectral analysis (§ 3). The spectral synthesis problem (§ 4). Representations (§ 5). Examples of spectral synthesis (§ 6).

G. L. Krabbe.

Kac (Kats), G. I.: Generalized functions on locally compact groups and the expansion of a regular representation. Doklady Akad. Nauk SSSR 125, 27—30 [Russisch].

Soit H un espace hilbertien, T un opérateur linéaire à domaine D_T dense (dans H) tel que T^{-1} soit un opérateur d'Hilbert-Schmidt. Soit H_T (l'espace des vecteurs généralisés) l'adjoint de D_T muni de la norme $\|\varphi\|_1 = \|T\varphi\|$, $\varphi \in D_T$ (voir, ce Zbl.

80, 106). Soit C un anneau d'opérateurs commutatif et soit $\int L^{(\lambda)} d\sigma(\lambda)$ la décomposition de H en intégrale hilbertienne qui transforme C en algèbre des opérateurs diagonisables. Alors (théorème 1 de la note) il existe (presque partout par rapport à σ) des sous-espaces hilbertiens $H^{(\lambda)} \subset H_T$ (pas nécessairement fermés dans H_T) isométriques (linéairement) à $L^{(\lambda)}$, uniquement définis par leurs propriétés suivantes: Pour tout $f \in H$, il existe une fonction $f^{(\lambda)} \in H^{(\lambda)}$ telle que

$$(\varphi, f) = \int (\varphi, f^{(\lambda)}) d\sigma(\lambda), \quad (\varphi, Af) = \int \alpha(\lambda) (\varphi, f^{(\lambda)}) d\sigma(\lambda),$$

quel que soit $A = \int \alpha(\lambda) I_{L^{(\lambda)}} d\sigma(\lambda) \in C$ et $\varphi \in D_T$. Les $H^{(\lambda)}$ engendrent un espace vectoriel dense dans H_T et $H^{(\lambda)} \cap H^{(\mu)} = \{0\}$ pour $\lambda \neq \mu$. Si $A \in C'$ est continu par rapport à la norme de H_T , alors $(Af)^{(\lambda)} = A f^{(\lambda)}$. On applique cela aux représentations de l'anneau d'opérateurs engendré dans $L^2(G)$ (où G est un groupe localement compact) par les opérateurs de translation et l'on donne quelques détails intéressants concernant ce cas.

C. Foias.

Fišman (Fishman), K. M.: On the representation of certain classes of analytic functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 466—469 (1957) [Russisch].

The author starts with two separable Hilbert spaces H and \mathfrak{H} with reproducing kernels, consisting of functions $\{f(z)\}$ ($z \in G$) and $\{\varphi(\zeta)\}$ ($\zeta \in \mathfrak{G}$); the inner products in H and \mathfrak{H} are denoted by (\cdot) and $[\cdot]$ respectively. The reproducing kernels are given by $g(z_1, z_2) = \sum p_n(z_1) \overline{p_n(z_2)}$ and $h(\zeta_1, \zeta_2) = \sum q_n(\zeta_1) \overline{q_n(\zeta_2)}$, where $\{p_n(z)\}$ and $\{q_n(\zeta)\}$ are orthonormal bases of H and \mathfrak{H} , and the kernel $k(z, \zeta)$ is given by $\sum p_n(z) \overline{q_n(\zeta)}$. The author announces an extension of an imbedding theorem of Aronszajn (this Zbl. 37, 207): If \mathfrak{H} is imbedded in a larger Hilbert space $\tilde{\mathfrak{H}}$ then every element $f(z) \in H$ is representable in the form $f(z) = [\tilde{\varphi}, k(z, \zeta)]$, ($\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{H}}$), and, among all representations of the same function $f(z)$, that function having the smallest norm in $\tilde{\mathfrak{H}}$ is the function $\varphi = \varphi(\zeta) = (f(z), k(z, \zeta))$. Applications are made to the theory of integral representations of various classes of analytic functions.

A. J. Lohwater.

Gross, Leonard: Integration and nonlinear transformations in Hilbert space. Trans. Amer. math. Soc. 94, 404—440 (1960).

Ziel der Untersuchungen ist die Verallgemeinerung des auf Jacobi zurückgehenden, klassischen Satzes über das Verhalten n -dimensionaler Integrale bei Koordinatentransformation im Rahmen der von I. E. Segal (dies. Zbl. 70, 340) entwickelten Integrationstheorie in einem reellen Hilbert-Raum H . Das Charakteristische dieser Theorie besteht darin, dem Raum H in invarianter Weise einen Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{N}, m) zuzuordnen und eine Abbildung $f \rightarrow \tilde{f}$ zu konstruieren,

welche jeder zahmen Funktion f auf H eine meßbare Funktion \tilde{f} auf S zuordnet. (Zahm heißt dabei jede Funktion der Form $f = \Phi \circ P$, wobei P ein endlich-dimensionaler Projektor auf H und Φ eine Bairesche Funktion ist.) Hierdurch gelingt es, die Integrationstheorie über H auf die Integrationstheorie über (S, m) zurückzuspielen. Verf. erweitert zunächst den Definitionsbereich obiger Abbildung $f \rightarrow \tilde{f}$. Hierzu wird neben der üblichen Normtopologie τ_0 auf H noch die schwächste Topologie τ_2 auf H betrachtet, bezüglich welcher alle Hilbert-Schmidt-Operatoren τ_2 - τ_2 -stetige Abbildungen von H in sich sind. τ_2 ist eine lokalkonvexe Topologie. Eine komplexwertige Funktion heißt nun gleichmäßig τ_2 -stetig nahe der Null, wenn eine Folge A_n von Hilbert-Schmidt-Operatoren derart existiert, daß die Hilbert-Schmidt-Normen $[\text{Spur}(A_n^* A_n)]^{1/2}$ eine Nullfolge bilden und daß f τ_2 -stetig in jeder der τ_2 -offenen Mengen $U_n = \{x: \|A_n(x)\| < 1\}$ ist. (Wenn H endlich-dimensional ist, fällt dieser Stetigkeitsbegriff mit dem üblichen zusammen.) Es wird gezeigt, daß sich für solche Funktionen f noch eine meßbare Bildfunktion \tilde{f} in natürlicher Weise erklären läßt. Weiter wird untersucht, wie sich die Konvergenz einer Folge von solchen „stetigen“ Funktionen in der Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit der Bildfunktionen widerspiegelt. Ferner wird eine Dichtigkeitssage über die Automorphismengruppe von $L^\infty(S, m)$ gemacht, welche sich bei der zum Beweis des Hauptresultates verwendeten Approximationsmethode als nützlich erweist. Das Analogon zum Jacobischen Satz wird dann zunächst für Transformationen der speziellen Form $T = I + K$ bewiesen, wobei I der Einheitsoperator ist und K als nicht-linear sowie durch geeignete Forderungen an sein Fréchet-Differential als hinreichend klein und glatt vorausgesetzt wird. Der allgemeine Fall wird sodann durch Einführung einer ein-dimensionalen Gruppe nicht-linearer Transformationen bewältigt. Wegen der genauen, nicht leicht wiederzugebenden Formulierungen muß auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden. Der Fall linearer Transformationen ist bereits von I. E. Segal [Trans. Amer. math. Soc. 88, 12—41 (1958)] behandelt worden.

H. Bauer.

Šragin, I. V.: Über die schwache Stetigkeit des Niemytzkischen Operators. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenyje Zapiski 57, Trudy Kafedr Mat. 4, 73—79 (1957) [Russisch].

The operator $h u = g(u(x), x)$ is called Niemytzki's operator (M. M. Vajnb erg Variationsmethoden zur Untersuchung nichtlinearer Operatoren, this Zbl. 73, 103). Let $g(u, x)$ be a continuous function of $u, u \in (-\infty, +\infty), u \in L^p$ for almost all $x, x \in B$, where B is a measurable set of E^n . The object of the paper is to show that the necessary and sufficient condition for $h u$ to be a weakly continuous operator from L^p to L^q ($1 \leq p, q < \infty$) is the following: for almost all $x \in B, g(u, x)$ has the form $g(u, x) = a(x) + b(x) \cdot u$, where $a(x) \in L^q, b(x) \equiv 0$ for $q > p$ and $b(x) \in L^r$ for $q \leq p$ ($r = \infty$ for $q = p$, and $1/r = 1/p + 1/q$ for $q < p$). This interesting fact is important for Hammerstein's integral equations.

R. Herczyński.

Mlak, W.: Differential inequalities in linear spaces. Ann. Polon. math. 5, 95—101 (1958).

In the first part of this paper the author discusses several forms of a generalisation of the mean value theorem due to T. Ważewski (this Zbl. 52, 113). The functions considered are defined on a real interval and take their values from a real topological vector space E . In the second part of the paper a relation of "inequality" is introduced in E by means of the notion of the cone, in the usual way, and well-known theorems concerning differential inequalities are generalized, E being now assumed to be in addition a Hausdorff space. In the case that E is a Banach space some existence theorems for differential equations of the form $y' = f(t, y)$ are proved, where $f(t, x)$ (with $x = y(t)$) satisfies a special con-

dition, being defined for $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, $\|x - x_0\| \leq r$ and with values from E . If $f(t, y)$ satisfies certain appropriate conditions then, as the A. remarks, a weakening of some assumptions for the existence theorems is possible. He makes also the remark that a certain generalized form of derivative for the theorems considered may be applied.

A. Mallios.

Altman, M.: On the approximate solutions of functional equations in L^p spaces. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 127—134 (1958).

In früheren Arbeiten [Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 457—460, 461—465 (1957); vgl. dies. Zbl. 78, 299] behandelte Verf. Iterationsverfahren (1) $x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)/f_n(y_n)] y_n$ zur Lösung einer Gleichung (2) $F(x) = 0$ in einem Banachschen Raum X . $F(x)$ ist dabei ein nichtlineares Funktional, $f_n = F'(x_n)$ und y_n ein Element mit $\|y_n\| = 1$, $f_n(y_n) = \|f_n\|$. Hier wird eine geeignete Wahl von y_n für den Fall angegeben, daß X ein Raum L^p ist ($p > 1$). — Die Lösung einer Operatorgleichung $P(x) = 0$ in einem Raum L^p kann man auf (2) zurückführen, indem man (3) $F(x) = \|P(x)\|^p$ oder (4) $F(x) = \|P(x)\|$ setzt. Das (3) entsprechende Iterationsverfahren (1) wurde bereits untersucht (dies. Zbl. 84, 112). Mit (4) ergibt sich ein Verfahren, welches für den Fall $p = 2$ ebenfalls schon behandelt wurde (dies. Zbl. 88, 94). Hier werden für dies Verfahren mit $p > 1$ entsprechende Ergebnisse hergeleitet. — Ref. vermißt eine Prüfung der verschiedenen Verfahren mit numerischen Beispielen.

J. Schröder.

Liń, Cjuń: Über L. V. Kantorovičs Approximationsmethoden in der Analysis. Science Record, n. Ser. 2, 92—97 (1958).

L. V. Kantorovič (dies. Zbl. 34, 212) behandelte Näherungsverfahren zur Lösung einer Gleichung (1) $x - \lambda Hx = y$ in einem linearen normierten Raum X , die darin bestehen, daß man (1) durch eine Näherungsgleichung in einem Raum \bar{X} ersetzt. Insbesondere erhielt Kantorovič Konvergenzaussagen für die Lösungen einer Folge solcher Näherungsgleichungen. Verf. vereinfacht diese Ergebnisse. Im Gegensatz zu Kantorovič verlangt Verf. nicht, daß \bar{X} zu einem Unterraum $X' \subset X$ isomorph ist. — Mit den funktionalanalytischen Ergebnissen werden bei Integralgleichungen zweiter Art für verschiedene Näherungsverfahren Aussagen über die Ordnung der Konvergenz hergeleitet (u. a.: Methode der mechanischen Quadraturen, Methode der ausgearbeiteten Kerne einschließlich Verfahren von Ritz). Verf. behandelt dann in ähnlicher Weise lineare Gleichungen der allgemeineren Form (2) $Gx - Tx = y$, wobei er jedoch den Raum X' (und einen entsprechenden Raum Y') benötigt, und betrachtet als Beispiel eine Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichungen, bei der man zur Näherung einen Polynomansatz macht. Kantorovič hatte (2) auf (1) zurückgeführt. Im Gegensatz zu Kantorovič und auch Karpilovskaja (dies. Zbl. 53, 89) verlangt Verf. nicht, daß G^{-1} existiert.

J. Schröder.

Kolmogorov, A. N. und V. M. Tichomirov: ε -Entropie und ε -Kapazität der Mengen in Funktionenräumen. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 2 (86), 3—86 (1959) [Russisch].

This study is an account of the subject originated by Kolmogorov (this Zbl. 70, 115) and developed by him and other authors (Vituskin, this Zbl. 79, 282; Erochin etc.). The study contains not only the results published earlier but also new results due to Arnold (§ 6) and Tichomirov (§§ 4, 7, 8). One learns how the ideas of ε -entropy and ε -capacity originated by a commentary of Kolmogorov to an article of Vituskin concerning the 13 th Hilbert problem, how the ideas run parallel with probability theory of informations (theorem of Kotel'nikov) and how these investigations impact on some classical mathematical fields like approximation of analytic functions by linear forms etc. Let A be a set of a metric space R ; for every $\varepsilon > 0$ one defines the ε -coverings as those whose members have a diameter $\leq 2\varepsilon$: an ε -lattice of A is any set S such that $(S, \varepsilon) \supset A$, where $(S, \varepsilon) = \bigcup_{x \in S} A(x, \leq \varepsilon)$.

$A(x; \leq \varepsilon) = \{y; y \in A; \varrho(x, y) \leq \varepsilon\}$; A is " ε -distinct", provided $x \neq y$, and $x, y \in A$ imply $\varrho(x, y) > \varepsilon$. One supposes that A be completely bounded i. e. that every ε -distinct subset of A is finite. One defines: $N_\varepsilon(A) = \inf |F|$, F being ε -cover of A ; $N_\varepsilon^R(A) = \inf |S|$, S being ε -lattice of A ; $M_\varepsilon(A) = \sup |M|$, M being ε -distinct subset of A ; $H_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A) =$: minimal ε -entropy of A ; $H_\varepsilon^R(A) = \log N_\varepsilon^R(A) =$: ε -entropy of A relative to R ; $C_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A) =$: ε -capacity of A ; here $\log = \log_2$; $\underline{\text{dm}} A = \underline{\lim} X$, $\overline{\text{dm}} A = \overline{\lim} X$, $X = H_\varepsilon A / \log 1/\varepsilon$; if $\underline{\text{dm}} A = \overline{\text{dm}} A$, one sets $\underline{\text{dm}} A = \overline{\text{dm}} A$; $\text{dm} A$ is called the metrical dimension of A ; metrical order $q(A)$ of A is defined as $\lim \log H_\varepsilon A / \log 1/\varepsilon$. For functions f, g let $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f}{g} = 1$, $f \gtrsim g \Leftrightarrow \limsup \frac{f}{g} \leq 1$; $f \asymp g \Leftrightarrow f = O(g)$ and $g = O(f)$, $f \geq g \Leftrightarrow f = O(g)$; $f \gg g \Leftrightarrow f = o(g)$. Various propositions involving these terms are formulated and proved. The terminology is linked with that in the theory of informations. It turns out that also "centered" spaces (i. e. every space R such that for every subset A of diameter $2r$ there exists a point O of R such that $\varrho(O, X) \leq r$ for every $X \in A$) have an important role here. For n dimensional euclidean space Re_S^n with a Banach metric defined by a convex body S considered as the unit sphere one has constants $\theta(n, S)$, $\tau(n, S)$ such that for every A of content $\mu^n A > 0$ one has $N_\varepsilon A \sim \theta \cdot B$, $M_{2\varepsilon} A \sim \tau \cdot B$, where $B = \varepsilon^{-n} \frac{\mu^n A}{\mu^n S}$; θ and τ are called the minimal density of the covering of Re^n by means of S and the maximal density of the distribution of S in Re^n (Theor. IX). The evaluation of θ , τ is very difficult. For the norm $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p-1}$ ($x \in \text{Re}^n$) one denotes by Re_p^n the corresponding space and S_p^n the unit sphere. In particular, for Re_2^2 one has $\theta = 2\pi \cdot 27^{-1/2}$, $\tau = \pi \cdot 12^{-1/2}$. The functions C_ε , H_ε are studied in particular for two classes of integral analytic functions (cf. § 7) theorems xx, xxi), for the class $B_\sigma(C)$ of all the finite sums $\sum_{-n}^n c_k e^{i\lambda_k t}$ such that $|f| \leq C$ with frequencies λ_k in $[-\sigma, \sigma]$ (cf. § 8) and for spaces of real functionals (§ 9). For an s -dimensional vector $z = (z_1, \dots, z_s)$ let $|z| = (|z_1|, \dots, |z_s|)$; an integral function $f(z)$ is of a finite order, provided for some positive vector $p = (p_1, \dots, p_s)$ (i. e. $p_1, \dots, p_s > 0$) one has (1) $f(z) < e^{|z_1|^{p_1} + \dots + |z_s|^{p_s}}$ for all vectors z with coordinates $> r(p)$, where $r(p)$, is a positive number variable with p ; the infimum of the numbers p_i (for every $i = 1, 2, \dots, s$) is denoted by p_i ; the vector (p_1, \dots, p_s) is called the order of f ; the order is denoted by p . The type σ of f is the infimum of the positive numbers $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ satisfying asymptotically (2) $|f(z)| < e^{\sigma_1 |z_1|^{p_1} + \dots + \sigma_s |z_s|^{p_s}} =: e^{(\sigma, |z|^p)}$. For positive vectors p, σ let $\Phi_{p, \sigma}^s(C)$ be the set of all f satisfying (3) $f(z) < C e^{(\sigma, |z|^p)}$; this set is metrized by the norm $\|f\| = \sup |f(z)|$ on the polycylinder; then the corresponding functions C_ε and H_ε are $\sim \frac{2}{(s+1)!} \prod_i p_i \frac{(\log 1/\varepsilon)^{s+1}}{\log \log 1/\varepsilon}$ (Theor. XX; Vituškin). Let $F_{p, \sigma}^s$ where $p, \theta = (p, p, \dots, p)$, be composed of all the $f(z)$ satisfying $|f(z)| \leq C e^{(\sigma, |\text{Im} z|^p)}$, $p \geq 1$, f being 2π -periodical in respect to every variable; then C_ε and H_ε are $\sim \Delta_{s, p, \sigma} (\log 1/\varepsilon)^{s(p-1)/p+1}$, where

$$\Delta_{s, p, \sigma} = 2^{s+1} \sigma^{\sigma/p} p \{ \Gamma(1/p) \}^s / (s p - s + p) \{ (p-1) \log 2 \}^{s(1-1/p)} \Gamma(s/p + 1)$$

(Theor. XXi, Tichomirov). A functional F is said to satisfy the Hölder condition in respect to the function $\omega = \omega(\lambda)$, provided $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \omega(\varrho(x_1, x_2))$, ω being defined for positive reals and being > 0 and non convex; let $D_\omega^A(C)$ be the set of all the functionals over $X \supset A$ which at X are bounded by C and satisfying to the Hölder condition in respect to ω . If A is completely bounded and $\log \log 1/\varepsilon \ll$

$H_\varepsilon A \asymp H_{\varepsilon k}(A)$ for every positive integer k , then $\log H_\varepsilon(D_\omega^A(C)) \asymp H_{\omega^{-1}(\varepsilon)}(A)$ (Theor. XXV). The study contains 2 supplements: one concerning the Vituškin's paper on 13th Hilbert's problem and the other concerning the Shannon capacity of a device and its connections with the function C_ε .
G. Kurepa.

Praktische Analysis:

Pütter, Paul Stefan: Ein allgemeines Maximalisierungsverfahren. Z. angew. Math. Mech. **39**, 466—472 (1959).

Verf. gibt ein numerisches Verfahren zur Lösung der Aufgabe $f(x_1, \dots, x_n) = \text{Max}$ unter den Nebenbedingungen $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) an. Es beruht darauf, daß ausgehend von einem Punkt (x_{10}, \dots, x_{n0}) , der die Nebenbedingungen erfüllt, ein Stück in Richtung des stärksten Anstieges von f weitergegangen wird. Dabei sind nur jene Richtungen zur Konkurrenz zugelassen, die infinitesimal die Nebenbedingungen erfüllen. Nach Fortschreiten um einen endlichen Betrag werden im allgemeinen die Nebenbedingungen verletzt sein. Durch Iteration der Anstiegsrichtung wird ihre Erfüllung mit vorgegebener Genauigkeit erreicht. Die Schrittweite, um die in Richtung des stärksten Anstieges weitergegangen wird, wird zur Konvergenz des nachfolgenden Iterationsverfahrens numerisch in Beziehung gesetzt. Auch für den Fall, daß weitere Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen vorliegen, wird eine Ergänzung des Verfahrens angegeben, die sich zwar in der Praxis schon bewährt hat, von der der Verfasser aber nachweist, daß ihr zumindest theoretisch noch Mängel anhaften. Außerdem weist der Verf. darauf hin, daß bei endlich vielen mit endlicher Genauigkeit ausgeführten Rechenschritten grundsätzlich kein Verfahren angegeben werden kann, das ohne weitergehende Voraussetzungen über f und g_k die Annäherung an das Maximum von f in allen theoretisch möglichen Fällen mit vorgegebener Genauigkeit leistet.
W. Knödel.

Veidinger, L.: On the numerical determination of the best approximations in the Chebyshev sense. Numerische Math. **2**, 99—105 (1960).

Verf. definiert und diskutiert folgendes Problem: Gegeben $n+1$ reelle Funktionen $f(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ im endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$; gesucht diejenigen Werte $\lambda_i = \lambda_i^*$ ($i = 1, \dots, n$), für welche

$$\max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_i \lambda_i^* q_i(x) \right| = \inf_{\lambda} \left\{ \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_i \lambda_i q_i(x) \right| \right\} =: E,$$

wobei λ den „Vektor“ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bezeichnet. Bekanntlich gilt

$$f(x_j^*) - \sum_i \lambda_i^* q_i(x_j^*) = \pm (-1)^j E$$

für mindestens $n+1$ Punkte $x_j^* \in [a, b]$, $x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^*$, wobei auf der rechten Seite der letzten Gleichung für alle j dasselbe Zeichen gilt. Remes (dies. Zbl. **10**, 17) hat u. a. folgendes Iterationsverfahren für die numerische Lösung der obigen Aufgabe vorgeschlagen: Man beginne mit $n+1$ Punkten $x_j^{(1)}$, wobei $a \leq x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \dots < x_{n+1}^{(1)} \leq b$ sein soll, und bestimme die $n+1$ Unbekannten $\lambda_i^{(1)}$ und $E^{(1)} \geq 0$ so, daß

$$f(x_j^{(1)}) - \sum_i \lambda_i^{(1)} q_i(x_j^{(1)}) = \pm (-1)^j E^{(1)}.$$

Danach sucht man die relativen Extrema von $f(x) - \sum \lambda_i^{(1)} q_i$; fallen diese mit den $x_j^{(1)}$ zusammen (innerhalb der verlangten Genauigkeit), so ist man fertig; andernfalls wählt man diese neuen Extrema als neuen Satz $x_1^{(2)}, \dots, x_{n+1}^{(2)}$. Verf. gibt, unter gewissen, im allgemeinen erfüllten Voraussetzungen über die Gestalt der „Fehlerkurve“ $f(x) - \sum \lambda_i^* q_i(x)$, einen Beweis dafür, daß dann die (monoton wachsende)

Folge $E^{(v)}$ quadratisch gegen ihren Grenzwert E konvergiert; d. h. es gibt für jedes positive N eine Konstante C , so daß

$$E^{(v+1)} - E^{(v)} \leq C (E^{(v)} - E^{(v-1)}) \text{ für alle } v > N.$$

Zehn wertvolle Literaturangaben beschließen die Arbeit. — [Ref. vermutet, daß ein entsprechender Satz über quadratische Konvergenz im allgemeinen auch dann gilt, wenn die annähernde Funktion $F(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ in nicht-linearer Weise von den λ_i abhängt; jedoch sind ihm weder die notwendigen Voraussetzungen noch ein Beweis bekannt.]

H. J. Maehly.

Farnell, A. B.: Curve-fitting matrices. Amer. math. Monthly 66, 297—300 (1959).

The coefficients of the polynomial $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ satisfying $p(x_i) = y_i$, where y_i are given function values at the points x_i ($i = 1, \dots, n$), are obtained by solving a linear system, the matrix of which is a Vandermonde matrix of order n . After computing the inverse of this matrix the solution of the system is reduced to a matrix by vector multiplication. The author deals with a method for computing the inverses of the n -th order Vandermonde matrices. His method seems to require less numerical operations than the method of N. Macon and A. Spitzbart (this Zbl. 81, 15).

Th. J. Dekker.

Läuchli, Peter: Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichsrechnung. Z. angew. Math. Phys. 10, 245—280 (1959).

Im ersten Abschnitt formuliert Verf. die vermittelnde und die bedingte Ausgleichung in Matrixschreibweise und deutet sie geometrisch im R_n : Bei beiden Arten ist durch die auftretenden Matrizen jeweils eine Hyperebene F' bestimmt und der Punkt $s \in F'$ gesucht, welcher von einem gegebenen Punkt l (Meßwerte) außerhalb F' den kleinsten Abstand hat. Bei der vermittelnden Ausgleichung wird s direkt als $x \in F'$ mit dieser Minimaleigenschaft bestimmt, bei der bedingten Ausgleichung als Schnittpunkt von F' mit der zu F' „total senkrechten“, l enthaltenden Hyperebene F'' ermittelt. — Im zweiten Abschnitt wird die Methode der konjugierten Gradienten für beide Arten der Ausgleichung so formuliert, daß man zur Iteration die Normalgleichungen nicht aufzustellen braucht (für den Fall der vermittelnden Ausgleichung siehe Stiefel, dies. Zbl. 51, 349). Die Näherungen x'_i bzw. x''_i bei der vermittelnden bzw. bedingten Ausgleichung liegen (für geeignete Ausgangswerte) in F' bzw. F'' . — Die von Synge („The hypercircle in mathematical physics“; dies. Zbl. 79, 138) und anderen entwickelte „Method of the hypercircle“ auf die Ausgleichsrechnung übertragend beweist Verf. im dritten Abschnitt Abschätzungen für den Betrag $|v| = (v, v)^{1/2}$ des Fehlervektors $v = s - l$. Sei z. B. $x' \in F'$ und $x'' \in F''$, so gilt: $(v', v') - (x' - x'', x' - x'') \leq (v, v) \leq (v', v')$ mit $v' = x' - l$, $v'' = x'' - l$. Je einen der dazu erforderlichen Punkte x' und x'' erhält man bei der vermittelnden bzw. bedingten Ausgleichung, wenn man die Methode der konjugierten Gradienten benutzt. Wird nur auf eine der Arten ausgeglichen, hat man den anderen Punkt zusätzlich zu bestimmen. Bei der bedingten Ausgleichung wachsen die (v'_i, v'_i) monoton, bei beiden Arten liegen die Näherungen auf einem bestimmten Hyperkreis. — Der Abschnitt 4 enthält drei numerische Beispiele. Das letzte Beispiel zeigt, daß das monotone Verhalten der (v'_i, v'_i) durch Abrundungsfehler gestört werden kann.

J. Schröder.

Dück, W.: Fehlerabschätzungen für das Iterationsverfahren von Schulz zur Bestimmung der Inversen einer Matrix. Z. angew. Math. Mech. 40, 193—194 (1960).

La méthode de Schulz pour la recherche de l'inverse de la matrice C est l'itération $X_{n+1} = X_n (2E - C X_n)$. Diverses majorations de $X_{n+1} - X$ à partir de X_n et de quantités déterminées au cours du calcul sont proposées. L'erreur d'arrondi au cours du calcul n'est pas envisagée.

J. Kuntzmann.

Ostrowski, A. M.: On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors. V: Usual Rayleigh quotient for non-Hermitian matrices and linear elementary divisors. VI: Usual Rayleigh quotient for nonlinear elementary divisors. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 472—481 (1959); 4, 153—165 (1960).

V. Gegenüber dem in Teil III (Teil III, IV s. dies. Zbl. 89, 119) behandelten Iterationsprozeß für allgemeine nichthermitesche Matrix A unter Verwendung des verallgemeinerten Rayleigh-Quotienten (RQ) mit Rechts- und Linksiterierten wird hier das entsprechende Verfahren mit dem gewöhnlichen Rayleigh-Quotienten auf Konvergenz untersucht:

$$\xi_v = (A - \lambda_{v-1} I)^{-1} \xi_{v-1}, \quad \lambda_v = \xi_v^* A \xi_v / \xi_v^* \xi_v$$

($v = 1, 2, \dots$) mit beliebigem Ausgangsvektor ξ_0 und einer Näherung λ_0 für den interessierenden Eigenwert σ von A bei ausschließlich linearen Elementarteilern dieses Eigenwertes σ . Ergebnis: Das Verfahren konvergiert quadratisch. — Mit der Bezeichnung „ein Horner“ für den Lösungsgang eines linearen Systems benötigt das Verfahren mit dem gewöhnlichen RQ 1 Horner je Iterationsschritt gegenüber 2 Horner bei Verwenden des verallgemeinerten RQ. Der Aufwand von zwei Horner bringt somit beim gewöhnlichen RQ einen Genauigkeitsgrad vier gegenüber drei beim verallgemeinerten RQ. — VI. Die Konvergenz-Untersuchung von Teil V für gewöhnlichen Rayleigh-Quotienten wird auf den Fall nichtlinearer Elementarteiler zum interessierenden Eigenwert σ der Matrix ausgedehnt. Die Konvergenz ist linear und recht langsam. Es werden verschiedene Arten der Konvergenzbeschleunigung (Steffensen, Householder) auf den Konvergenzgrad untersucht. Bestätigung der Ergebnisse an einem Zahlenbeispiel.

R. Zurmühl.

Kulik, Stephen: A method of approximating the complex roots of equations. Pacific J. Math. 8, 277—281 (1958).

Zu dieser Methode vergleiche man das ausführliche Referat über die Arbeit „A method for approximating the zeros of analytic functions“ des Verf. (vgl. dies. Zbl. 83, 118). Ein schon dort angegebener Spezialfall, in welchem die mit $\Phi(z)$ bezeichnete Funktion zu $(u - z)^k f'(z)$ genommen wird (u ein Parameter, k eine natürliche Zahl, $f(z)$ die Funktion, deren Wurzeln gesucht sind) wird in dieser Abhandlung genauer erörtert. Dabei zeigt es sich, daß man mit demselben Algorithmus, jedoch unter Verwendung verschiedener numerischer Werte für den Parameter u im Falle reeller Wurzeln entweder zwei benachbarte Wurzeln oder die größte und die kleinste Wurzel berechnen kann; im Falle konjugiert imaginärer Wurzeln lassen sich die Real- und Imaginärteile der Approximationen leicht trennen. E. Mohr.

Fritscher, O.: Berechnung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen als Ergänzung der Methode von Graeffe. Österreich. Ingenieur-Arch. 14, 68—75 (1960).

Das Graeffe-Verfahren liefert die Beträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Verf. gibt eine interessante Ergänzung des Verfahrens, die es erlaubt, auch die Argumente der Wurzeln auf einfachem Wege zu bestimmen. Grundlegend ist dabei die Tatsache, daß konjugiert komplexe Zahlen vom Betrage 1 zueinander reziprok sind. Die gegebene Gleichung wird in zwei algebraische Gleichungen übergeführt, die genau diejenigen Wurzeln gemeinsam haben, die den Wurzeln kleinsten oder größten Betrages der ursprünglichen Gleichung entsprechen. Im Falle reeller Koeffizienten wird durch eine geeignete Umformung der Grad der beiden Ersatzgleichungen auf die Hälfte reduziert, und je zwei konjugiert komplexe Wurzeln werden in einer einfachen reellen Wurzel zusammengefaßt. Die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ergibt dann die Lösungen. Im Falle komplexer Koeffizienten gelingt zwar die Reduktion des Grades der Ersatzgleichungen nicht, ihre gemeinsamen Wurzeln sind jedoch reell, und sie besitzen nur reelle Koeffizienten. Verf. gibt drei instruktive Beispiele an.

K. Kirchgässner.

Maxfield, John E.: An iterative scheme for finding the real zeros of certain polynomials. *SIAM Review* 2, 148—150 (1960).

Verf. schreibt: „In dieser Arbeit wird eine Modifikation der Lin-Iteration beschrieben, welche stets lokal konvergiert, sofern alle reellen Wurzeln einfach sind. Für mehrfache Wurzeln lassen sich Beispiele konstruieren, für welche die lokale Konvergenz vom Vorzeichen des Anfangsfehlers abhängt... Das hier beschriebene Verfahren verlangsamt die lokale Konvergenz in denjenigen Fällen, wo schon die Linsche Iteration lokal konvergiert...“ — Es scheint nicht, daß sich das vorgeschlagene Verfahren zur numerischen Wurzelberechnung eignet. *H. J. Machly.*

Albrecht, Julius: Über die Abrundungsfehler bei der Iteration für $y = \sqrt[n]{x}$. *Z. angew. Math. Mech.* 40, 191 (1960).

L'algorithme de Newton pour la détermination d'une racine $n^{\text{ème}}$ est précisé pour fournir la meilleure valeur approchée par défaut à 10^{-p} près en tenant compte des erreurs d'arrondi. L'algorithme exige des divisions par un nombre de p chiffres mais ayant jusqu'à $(n-1)p$ chiffres au quotient. L'A. montre par des exemples que les règles d'arrondi ordinaire (en gardant seulement p chiffres) peuvent conduire à des écarts importants sur les dernières décimales. *J. Kuntzmann.*

Sisler, Miroslav: Die Konvergenz der Iterationsverfahren für die Lösung von Systemen nichtlinearer Gleichungen. *Českosl. Akad. Věd. Apl. Mat.* 5, 141—148, russ. und deutsche Zusammenfassung 148—150 (1960) [Tschechisch].

Ein System von n analytischen Gleichungen $f_v(x_1, \dots, x_n) \equiv f_v(x) = 0$ ($v = 1, \dots, n$) in den n Unbekannten x_1, \dots, x_n kann unter gewissen Bedingungen durch die verallgemeinerte Newtonsche Iteration, in vektorieller Schreibweise $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, gelöst werden, wo $\varphi(x) = x - f(x) F(x)^{-1}$ zu setzen ist, wenn $F(x)$ die Funktionalmatrix $(\partial f_v / \partial x_v)$ darstellt. Es werden Bedingungen (zu kompliziert, um hier reproduziert zu werden) angegeben, unter denen in einer gewissen Kugel-Umgebung des Anfangspunktes $x^{(0)}$ der Iteration nur ein einziger attraktiver Fixpunkt a von $\varphi(x)$ existiert. Ferner werden Abschätzungen für den Fehler beim k -ten Schritt $x^{(k)}$ der Iteration angegeben. Als Beispiel wird das System $x^3 - 2xy + 2 = 0$, $x y^2 - 2y = 0$ behandelt; die rationalen Funktionen $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ werden angegeben und drei Schritte der Iteration werden durchgeführt.

H. Schwerdtfeger.

Samokiš, B. A.: Untersuchung der Konvergenzgeschwindigkeit der Methode des steilsten Abstiegs. *Uspechi mat. Nauk* 12, Nr. 1 (73), 238—240 (1957) [Russisch].

Die Lösung x^* der Gleichung $Ax = y$, wo A ein beschränkter, selbstadjungierter positiv definiter Operator im Hilbertschen Raume ist, kann durch Iteration nach dem Schema $z_n = Ax_n - y$, $x_{n+1}^{(p)} = x_n^{(p)} + \alpha_1^{(n)} z_n + \dots + \alpha_p^{(n)} A^{p-1} z_n$ erhalten werden und, falls man die Zahlen $\alpha_k^{(n)}$ durch Minimalisierung des quadratischen Funktionals $F(x) = (Ax, x) - 2(x, y)$ für $x = x_n^{(p)} + \alpha_1 z_n + \alpha_2 A z_n + \dots + \alpha_p A^{p-1} z_n$ bestimmt, gilt nach Birman (dies Zbl. 38, 80) eine Abschätzung $\|x^* - x_n^{(p)}\| \leq C q_p^n$, wo q_p eine durch p und die Grenzen M, m des Operators A bestimmte Zahl ist. Falls man über das Spektrum der Eigenwerte nichts genaues weiß, ist die Birmansche Abschätzung nicht verbesserbar. Verf. gibt weitere und genauere Fehlerbestimmungen unter weitergehenden Aussagen über das Spektrum hinsichtlich der isolierten Eigenwerte und der übrig bleibenden Intervalle in $[M, m]$. *E. M. Bruins.*

Rutishauser, Heinz: Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung. *Numerische Math.* 2, 263—279 (1960).

Bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung kann man entweder die Differentialgleichung direkt (I) oder das äquivalente System von n Gleichungen 1. Ordnung numerisch integrieren (II). Die Methode I wird meist als vorteilhafter angesehen. Verf. untersucht beide Möglichkeiten hinsichtlich ihrer Genauigkeit an Hand der linearen Differentialgleichung

n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und zwar beim Gesamtverlauf der numerischen Integration. Ist der Fehler eines numerischen Integrationsverfahrens für alle Differentialgleichungen einer Klasse bei festem x und für $h \rightarrow 0$ stets von der Größenordnung $O(h^p)$, so wird p die „Fehlerordnung“ des Verfahrens genannt. Es wird festgestellt, daß eine „modifizierte“ Eulersche Formel (I) und die Eulersche Formel für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung (II) stets unabhängig von n die Fehlerordnung 1 haben. Ebenso haben die Verfahren von Kutta-Nyström bzw. Kutta-Zurmühl (I) und Runge-Kutta (II) genau die Fehlerordnung 4. Die Fehlerordnung bei den Extrapolations- oder Interpolationsverfahren von Falkner (I) und Adams (II) hängt jeweils nur von der Anzahl N der mitgeführten Differenzen bzw. Funktionswerte ab und ist bei I höchstens N , bei II genau N . Mit den Formeln von Euler, Runge-Kutta und Kutta-Zurmühl werden an Hand einfacher Beispiele vergleichende numerische Experimente durchgeführt. Als Maß für die Genauigkeit dient das „Fehlermaß“

$$F = [\log y(x) - \log \tilde{y}(x)] / (x - x_0).$$

Dabei ist $\tilde{y}(x)$ der durch numerische Integration erhaltene Wert. Bei der numerischen Integration nach der modifizierten Eulerschen Formel (I) wächst das Fehlermaß mit wachsendem x stark an, ist jedoch für kleine x wesentlich kleiner als bei der Eulerschen Formel (II). Bei der Integration nach Kutta-Zurmühl (I) wächst bei den gewählten Beispielen je einer Differentialgleichung 2. und 4. Ordnung das Fehlermaß mit wachsendem x und ist größer als bei der Integration nach Runge-Kutta (II), wo das Fehlermaß mit wachsendem x sogar abnimmt. W. Törnig.

Plainevaux, J. E.: *Intégration graphique des équations différentielles du 1^{er} ordre dans un plan de phases*. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 470—484 (1959).

Es wird ein neues Verfahren zur graphischen Integration von $y' = f(x, y)$ unter der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ angegeben. Anstatt in der (x, y) -Ebene die Isoklinen $y' = \text{const}$ aufzuzeichnen, wird in einer (y, y') -Ebene die Kurvenschar („Courbes iso-temps“) $y' = f(x_k, y)$, $x_k = \text{const}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ gezeichnet. Dann werden ausgehend von x_0, y_0, y'_0 für die Punktepaare y_k, y'_k ($k = 1, 2, \dots, n$) mit der festen Schrittweite $h = x_{k+1} - x_k$ Näherungswerte y_k^*, y'_k^* ermittelt. Man erhält z. B. y_1^*, y'_1^* , indem man die durch $y_1^* - y_0 = \frac{1}{2} h (y'_0 + y'_1^*)$ gegebene Gerade mit der Kurve $y' = f(x, y_1)$ schneidet usw.; alle auftretenden Hilfsgeraden sind parallel. Dabei zeigt sich, daß der Fehler in der Bestimmung von y_k^*, y'_k^* von der dritten Ordnung in h wird; er läßt sich auf die fünfte Ordnung herabdrücken, wenn man die Werte y_k^* als eine Linearkombination der mit der einfachen und der doppelten Schrittweite erhaltenen Näherungswerte ansetzt. Im Sonderfall $\partial f / \partial y = 0$ erhält man das bereits früher vom selben Verf. angegebene neue Verfahren für die graphische Integration einer Funktion (dies. Zbl. 82, 124), im Fall einer linearen Differentialgleichung sind die Kurven $y' = f(x_k, y)$ Geraden, im Falle $f(x, y) = m(x) + n(y)$ kommt man mit dem Aufzeichnen zweier einzelner Kurven aus. Als Beispiele werden behandelt eine Differentialgleichung aus der Reaktortechnik und die Fundamentalgleichung der äußeren Ballistik.

F. Reutter.

Tichonov (Tikhonov), A. N. and A. A. Samarskij (Samarsky): *On homogeneous difference schemes*. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 562—565 (1958) [Russisch].

Die vorliegende Mitteilung der Verff. ist die Weiterentwicklung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 70, 126). Es wird die Gleichung $Lu = -f(x)$, $0 < x < 1$, betrachtet, wo L ein linearer Differentialoperator ist. Sei $S_N(x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1)$ ein Differenzennetz; dann entspricht der Differentialgleichung die Differenzengleichung $L_h y_i^h = -f_i^h$. Der lineare Differenzenoperator L_h ist mit Hilfe der Matrix aus den Koeffizienten a_{ij}^h , die Funktionen der Schrittweite h sind, bestimmt: $L_h = (a_{ij}^h)$. Verff. lassen ferner zu, daß die Ausgangs-

gleichung noch in irgendeiner Weise von m Funktionen $p_1(x), \dots, p_m(x)$, die den Vektor $p(x)$ bilden, abhängt: $L^{(p(x))} = -f(x)$, so daß $L_h = L_h^{(p)} = (a_{ij}^h[p(x)])$ wird. Es folgt nun in gedrängter Form eine große Anzahl von Begriffsdefinitionen, die hauptsächlich Fragen der Regularität betreffen und für Konvergenzbetrachtungen eine Rolle spielen. Zunächst werden verschiedene Klassen von Funktionen $f(x)$ und $p(x)$ aufgestellt und in Zusammenhang mit den Lösungen der Differenzengleichung Formen der Konvergenz diskutiert. Außerdem werden Betrachtungen über die Ordnung der Genauigkeit (oder Approximation) und andere Eigenschaften (z. B. Symmetrie) des Differenzenschemas durchgeführt. Verff. wenden sich dann dem Spezialfall $L^{(p)} u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) = -f(x)$ zu und beweisen einige Sätze über das Differenzenschema. Diese können auch für die Fehlerabschätzung bei numerischen Rechnungen von Bedeutung sein.

R. Reißig.

Tichonov (Tikhonov), A. N. and A. A. Samarskij (Samarskii): Convergence of difference schemes in the class of discontinuous coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 529—532 (1959) [Russisch].

Verff. setzen ihre Betrachtungen aus der vorstehend referierten Arbeit fort und verfolgen das Ziel, zu der Gleichung $L^{(p)} u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) = -f(x)$ ($0 < x < 1$, $0 < m \leq p(x) \leq M$) notwendige Konvergenzbedingungen für ein Differenzenschema über der Klasse der unstetigen Koeffizienten aufzustellen sowie die Klasse des in der früheren Arbeit definierten normalen Schemas, das eine notwendige Konvergenzbedingung erfüllt, zu charakterisieren. Diesem Differenzenschema $L_h^{(p)}$ liegt ein gleichmäßiges Differenzennetz $x_i = i h$ mit der Maschenweite h zugrunde, und es gilt die Definitionsgleichung: $L_h^{(p)} y_i = h^{-2} [(y_{i+1} - y_i)/B_i - (y_i - y_{i-1})/A_i]$, wo $A_i = A[p(x_i + s h)]$ und $B_i = B[p(x_i + s h)]$, $-1 < s < 1$, normale, d. h. lineare, reguläre positive, von h unabhängige und zueinander symmetrische Funktionale sind. Das Schema heißt quasikonservativ, wenn $B_i = A_{i+1}$ über der Klasse $C_m(p)$ (Klasse der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen $p(x)$). Wenn $B_i = A_{i+1}$ über $Q_m(p)$ (Klasse der Funktionen $p(x)$, die samt ihren Ableitungen bis zur m -ten Ordnung stückweise stetig sind), dann wird das Schema als konservativ bezeichnet. Verff. beweisen nun einige Hilfssätze über die Konvergenz eines normalen Schemas $L_h^{(p)}$ in der Klasse $Q_m(p)$ und zeigen, daß ein normales Schema mit gewissen Konvergenzeigenschaften quasikonservativ ist und daß ferner ein im Sinne der Konvergenz äquivalentes konservatives Schema existiert. R. Reißig.

Tichonov (Tikhonov), A. N. and A. A. Samarskij (Samarskii): Some best homogeneous difference scheme. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 779—782 (1959) [Russisch].

Verff. knüpfen an eine vorangehende Mitteilung (siehe vorstehendes Referat) an, betrachten die gleiche Differentialgleichung $L^{(p)} u = -f(x)$ wie dort und ein zugehöriges normales Differenzenschema $L_h^{(p)} y_i$. Sie stellen sich die Aufgabe, ein optimales Schema zu finden, daß über $Q_m(p)$ die 2. Ordnung der Genauigkeit liefert. Es wird gezeigt, daß ein einziges derartiges Schema vorhanden ist. Dieses konstruieren sie für die homogene Gleichung $L_h^{(p)} y_i = 0$ in der (konservativen) Form $L_h^{(p)} y_i = h^{-2} [y_{i+1} - y_i]/A_{i+1} - (y_i - y_{i-1})/A_i]$, wobei $A_i = \int_{-1}^0 p(x_i + s h) ds$. Das Resultat wird auf die inhomogene Gleichung $L^{(p,q)} u = L^{(p)} u - q(x) u = -f(x)$ erweitert, und schließlich wird dargelegt, daß es nicht von der speziellen Schreibweise der Differential- und Differenzenoperatoren abhängt.

R. Reißig.

Milnes, Harold W. and Renfrey B. Potts: Numerical solution of partial differential equations by boundary contraction. Quart. appl. Math. 18, 1—13 (1960).

Gegeben sei in einem zweidimensionalen Gebiet \mathfrak{R} , welches von einer glatten Jordankurve S_0 begrenzt ist, eine lineare partielle Differentialgleichung. Ist die Lösung dieser Gleichung eindeutig durch Randbedingungen auf S_0 bestimmt, so schlagen die Verf. folgende Methode zur approximativen Lösung vor: Man überdecke \mathfrak{R} mit einem Gitter, welches aus zwei Scharen von Linien besteht. Die eine Schar besteht aus konzentrischen glatten Jordankurven S_0, S_1, \dots, S_N , die sich mit wachsendem Index auf einen Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}$ zusammenziehen, und für die S_0 mit der Randkurve von \mathfrak{R} zusammenfällt. Die andere Schar besteht aus Strahlen T_0, \dots, T_N durch P_0 (vgl. Polarkoordinaten). Dann approximiere man das Differentialgleichungsproblem durch lineare Gleichungen zwischen den Näherungswerten $u(n, m)$ in den Eckpunkten $S_n \cap T_m$ des Gitters auf solche Weise, daß die $u(k+j+1, m)$ auf der Kurve S_{k+j+1} durch die $u(k+j, p), \dots, u(k, p)$ auf den Kurven S_{k+j}, \dots, S_k bestimmt sind. Setzt man $v_k = (u(k, 0), \dots, u(k, N))^*$, so kann man diese Gleichungen in der Form.

$$(1) \quad C_k^{(j+1)} v_{k+j+1} + C_k^{(j)} v_{k+j} + \dots + C_k^{(0)} v_k = 0$$

oder

$$(2) \quad w_{k+1} = A_k w_k, \quad w_k = (v_{k+j}, \dots, v_k)^*$$

schreiben. Dabei sind die $C_k^{(i)}$ geeignete quadratische Matrizen, und die Gleichung (2) erhält man aus (1) auf die übliche Weise. Ist w_0 durch die Randbedingungen bestimmt, so kann man die übrigen w_k iterativ berechnen. Sind die Koeffizienten der Matrizen $C_k^{(i)}$ von den Eckpunkten des Gitters unabhängig, so behaupten die Verf., daß das Verfahren dann und nur dann stabil ist, falls für die Eigenwerte x_j von $A = A_k$ gilt: a) $|x_j| \leq 1$ b) $x_j \neq x_i$ für $j \neq i$, und sie geben ein Verfahren an, um die Eigenwerte zu bestimmen. Die Formulierung des Satzes ist nicht ganz richtig. An Stelle von a) braucht man nur zu fordern daß $|x_j| \leq 1 + (\text{konst})/N$. Außerdem ist nach der Meinung des Referenten der Beweis, daß die Bedingungen a) und b) hinreichend für die Stabilität sind, nicht ganz überzeugend. Ist nämlich C die Matrix, die A auf Diagonalgestalt transformiert, so muß man auch zeigen, daß C, C^{-1} bei Verfeinerung des Gitters beschränkt bleiben. Als Beispiele betrachten die Verf. eine geeignete hyperbolische Differentialgleichung und weisen auf ihre Arbeit: Boundary contraction solution of Laplace's differential equation (vgl. dies. Zbl. 88, 340) hin, in der sie für die Laplacesche Differentialgleichung im Einheitskreis mit Hilfe von Poissons Integralformel geeignete Gleichungen (1) konstruieren. *H.-O. Kreiß.*

Törnig, W.: Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. I: Das charakteristische Anfangswertproblem. II: Das Cauchy-Problem. Arch. rat. Mech. Analysis 4, 428—445, 446—466 (1960).

Gegeben sei in einem Intervall $\mathfrak{R}: a < x < b, c < y < d$ das charakteristische Anfangswertproblem

$$(1) \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, p, q): \quad p = \partial z / \partial x, \quad q = \partial z / \partial y; \quad z(x, \eta) = \sigma(x), \\ z(\zeta, y) = \tau(y) \quad \text{mit} \quad (\zeta, \eta) \in \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) = \tau(\eta).$$

Dabei genügt $f(x, y, z, p, q)$ für alle z, p, q in jedem abgeschlossenen Teilintervall von \mathfrak{R} einer Lipschitz-Bedingung. Der Verf. löst dieses Problem approximativ mit Hilfe von Differenzenschemaverfahren. Er schreibt (1) in der Form

$$(2) \quad z(x, y) = z(x, \eta) + z(\zeta, y) - z(\zeta, \eta) + \int_{\zeta}^x \int_{\eta}^y f(u, v, z, p, q) \, dv \, du,$$

und überdeckt \mathfrak{R} mit einem zu den Koordinatenachsen parallelen Gitter. Dann ersetzt er $f(x, y, z, p, q)$ durch geeignete Polynome $P(x, y)$, die in einer Anzahl von

Eckpunkten des Gitters denselben Wert wie $f(x, y, z, p, q)$ annehmen. Rechnet man dann die Integrale in (2) aus, so erhält man je nach Wahl der $P(x, y)$ Interpolations- bzw. Extrapolationsverfahren. Verf. zeigt dann, daß die mit den Interpolationsverfahren verbundene Iteration bei hinreichend feinem Gitter konvergiert. Außerdem gibt er eine konvergente Iterationsmethode an, um auch das Anfangsfeld berechnen zu können. — Im zweiten Teil der Arbeit löst der Verf. das Cauchyproblem für die Gleichung (1) $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, p, q)$ approximativ mit Hilfe von Differenzenschemaverfahren. Dabei sind $z(x, y)$, $p(x, y)$ und damit auch $q(x, y)$ auf der Geraden $y = x$ vorgegeben. Schreibt man (1) für $\zeta > \eta$ in der Form

$$z(\zeta, \eta) = z(\zeta, \zeta) + \int_{\zeta}^{\eta} q(x, x) dx + \int_{\zeta}^{\eta} \int_{\eta}^x f(x, y, z, p, q) dy dx,$$

$$p(\zeta, \eta) = p(\zeta, \zeta) + \int_{\zeta}^{\eta} f(\zeta, y, z, p, q) dy, \quad q(\zeta, \eta) = q(\eta, \eta) - \int_{\zeta}^{\eta} f(x, \eta, z, p, q) dx,$$

so erhält man auf dieselbe Weise wie im ersten Teil Interpolations- bzw. Extrapolationsverfahren. Verf. zeigt wieder, daß die mit dem Interpolationsverfahren verbundene Iteration bei hinreichend feinem Gitter konvergiert, und daß man auch das Anfangsfeld iterativ bestimmen kann. Außerdem zeigt er, daß die Lösungen der Differenzengleichungen bei Verfeinerung des Gitters gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren und daß man im Prinzip Fehlerabschätzungen angeben kann.

H.-O. Kreiß.

Černin, K. E.: Lösung einer axialsymmetrischen Aufgabe nach der Methode der Geraden. Trudy mat. Inst. Steklov. **53**, 302—306 (1959) [Russisch].

The author solves the Dirichlet problem in the 3-dimensional space for the equation $\Delta u = 0$ and for the domain with axial symmetry. The boundary conditions are $u = 0$ on the interior and $u = \text{const}$ on the exterior surface. Using the method of Faddeeva (this Zbl. **41**, 244) the author obtains a system of n linear differential equations of 2. order which can be solved in terms of Bessel functions. An example is given.

J. Górski.

Černin, K. E.: Konforme Abbildung der aus Rechtecken zusammengesetzten Bereiche auf dem Einheitskreis. Trudy mat. Inst. Steklov. **53**, 307—312 (1959) [Russisch].

The author gives a practical method which permits to find the conformal mapping $w = f(z)$ of the domain G , where D is the sum of two rectangles onto the unit circle. The starting point of this method is the known formula for $f(z) = (z - z_0) e^{-(g+ih)}$, where $g(x, y)$ is the solution of the Dirichlet problem for D with boundary condition $g = \log r$ and $h(x, y)$ is the conjugate with $g(x, y)$. The function $g(x, y)$ is given by the formula $g(x, y) = \sum A_k(x, y) f_k$, where f_k denote the values of g at some system of points on the boundary of D . The coefficients $A_k(x, y)$ are taken from numerical tables.

J. Górski.

Fil'čakov, (Filchakov), P. F.: Numerical method for determining the constants of Christoffel-Schwarz's integral. Ukrain. mat. Žurn. **10**, 340—344 (1958) [Russisch].

The author gives an approximative method of conformal mapping of the given polygon onto the upper half-plane. The first step consists in conformal mapping of a triangle T which contains the given polygon P in its interior. One edge and two sides of T coincide with one edge and two sides of P . In such a way the given polygon is conformally mapped onto the upper half-plane out along a Jordan arc with both end-points lying on the real axis. Let us denote this domain by D . The author uses his previous method (this Zbl. **67**, 58) which permits to obtain a sequence of conformal maps of D onto domains which converge to the upper half-plane.

J. Górski.

Pouzet, Pierre: Méthode d'intégration numérique de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 3101—3102 (1960).

L'intégration approchée de $\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^x G(x, s, \varphi(s)) ds$ par une méthode par pas comprend pour chaque pas, deux parties: — transformation en une autre équation du même type pour laquelle on se trouve dans les conditions du premier pas, exécution du premier pas pour cette nouvelle équation par la méthode de Runge-Kutta.

J. Kuntzmann.

Popov, E. P.: Über die Bestimmung der höheren harmonischen unsymmetrischen Eigenschwingungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinost. **1959**, Nr. 6, 44—50 (1959) [Russisch].

Verf. gibt ein neuartiges Verfahren zur Bestimmung der höheren Harmonischen in den Lösungen nichtlinearer Schwingungsgleichungen an. Er verwendet die nach dem Verfahren der harmonischen Balance berechenbare Lösung als erste Näherung und gibt Vorschriften an, die Amplituden der höheren Harmonischen zu ermitteln. Dabei wird das konstante Glied der Fourier-Reihe mitberücksichtigt, so daß die Überlegungen auch für unsymmetrische nichtlineare Funktionen gelten. Aus rechen-technischen Gründen wird jede der höheren Harmonischen der nichtlinearen Funktion $F(x)$ in zwei Anteile zerlegt, von denen der erste nur von den Anteilen x_0 und $x_1(t)$, der zweite nur von den höheren Harmonischen $x_n(t)$, $n \geq 2$, abhängen. Der Rechenaufwand soll auf diese Weise geringer sein als nach den von anderen Autoren angegebenen Verfahren mit entsprechender Zielsetzung. Ein Beispiel wird durchgerechnet.

K. Magnus.

Hua, Loo-keng and Wang Yuan: Remarks concerning numerical integration. Sci. Record, n. Ser. **4**, 8—11 (1960).

L'erreur dans la représentation approchée de la valeur moyenne d'une fonction périodique de plusieurs variables par la valeur moyenne en q points alignés équidistants dépend de propriétés arithmétiques que l'A. étudie.

J. Kuntzmann.

Nestor, O. H. and H. N. Olsen: Numerical methods for reducing line and surface probe data. SIAM Review **2**, 200—207 (1960).

Halton, J. H.: On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numerische Math. **2**, 84—90; Berichtigung. Ibid. **196** (1960).

Bei der numerischen Berechnung eines mehrdimensionalen Integrals durch Monte-Carlo-Methoden wird das Integral $\int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k f(x_1, \dots, x_k)$ durch eine endliche Summe der Form $\sum_i w_i f(x_{i1}, \dots, x_{ik})$ angenähert. Summiert wird über endlich viele Punkte (x_{i1}, \dots, x_{ik}) , $i = 1, \dots, N$, einer Quasi-Zufallsfolge. Die Güte solcher Näherungen läßt sich nach J. M. Hammersley abschätzen, indem man den Fall betrachtet, daß $f(x_1, \dots, x_k)$ die Indikatorfunktion des Parallelepipeds $0 \leq x_i \leq A_i$ ($i = 1, \dots, k$) bei beliebigem $A = (A_1, \dots, A_k)$ mit $0 \leq A_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, k$) ist. Das Integral hat dann den Wert $V = A_1 A_2 \cdots A_k$. Als Kriterium für die Wirksamkeit (efficiency) der verwendeten Punktfolge wird die Größe des Integrals

$$J = \int_0^1 dA_1 \cdots \int_0^1 dA_k |S(A) - NV|^2$$

benutzt. Darin ist N die Anzahl der verwendeten Punkte und $S(A)$ die Anzahl derjenigen dieser Punkte, die in dem durch A bestimmten Parallelepiped liegen. Die N Zahlen der von Hammersley vorgeschlagenen Folge sind definiert durch

$$(n/N, \varphi_{R_1}(n), \varphi_{R_2}(n), \dots, \varphi_{R_{k-1}}(n)), \quad n = 1, \dots, N.$$

Darin ist $\varphi_R(n) = n_0 R^{-1} + n_1 R^{-2} + \dots + n_M R^{-M-1}$, wobei die n_0, \dots, n_M durch die eindeutige Darstellung $n = n_0 + n_1 R + \dots + n_M R^M$ gegeben ist. Die Größen R_1, \dots, R_{k-1} sind die $k-1$ ersten Primzahlen. In der vorliegenden Arbeit beweist Verf., daß für die Hammersley-Folge die beiden Abschätzungen

$$\sup |S(A) - N V| < C_k (\log N)^{k-1} \quad \text{und} \quad J < B_k (\log N)^{2k-2}$$

mit bekannten Konstanten B_k und C_k gelten. Die Hammersley-Folge ist eine Verallgemeinerung der Folge $(n/N, \varphi_2(n))$ für $k=2$, die van der Corput 1935 vorgeschlagen hat und für die er $\sup |S(A) - N V| < C \log N$ zeigen konnte.

H. Störmer.

Meyer zur Capellen, Walther: Nomogramme zur geneigten Sinuslinie. Forsch.-ber. Nordrhein-Westfalen Nr. 772, 27 S. (1959).

Verf. untersucht die Bewegungsverhältnisse einer Kurvenscheibe, bei der der Übergang von Rast zu Rast durch eine geneigte Sinuslinie erreicht wird. Einige wesentliche Kenngrößen dieses Bewegungsablaufes, wie maximale Geschwindigkeit und maximale Beschleunigung, sind durch Nomogramme einer bequemen und schnellen praktischen Auswertung zugänglich gemacht. Diese Rechentafeln sind als Kreisnomogramme entwickelt.

A. Stammlberger.

● **Karplus, Walter K. and Walter J. Soroka:** Analog methods. Computation and simulation. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company 1959. 483, 13 p.

Carteron, J.: Calcul analogique ou calcul numérique? Conflit ou harmonie? Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 2, 239—247 (1960).

L'A. compare en s'aidant d'exemples empruntés à son expérience personnelle, le calcul analogique et le calcul digital.

[Französ. Zusammenfassung.]

● **Smith, Charles V. L.:** Electronic digital computers. New York: McGraw-Hill Book Company 1959. XI, 443 p. \$ 12,00.

● **Müller, Heinrich:** Die elektronische digitale Rechenmaschine und Grundlagen ihrer Anwendbarkeit unter besonderer Berücksichtigung betriebswirtschaftlicher Aufgabenstellungen. (Betriebswirtschaftliche Forschungen. Bd. 12.) Berlin: Duncker & Humblot 1959. 244 S. DM 28,60.

Deprit, A.: Les machines à calculer digitales en Grande-Bretagne. Revue Questions sci. 131 (V. Sér. 21), 325—345 (1960).

Zak, L. A., T. I. Mil'čenko (Miltsenko) und V. P. Smirjagin: A short description of the most important parameters of the computer BESM-II. Publ. math. Inst. Hungarian. Acad. Sci., Ser. A 5, 171—177, engl. Zusammenfassung 177—178 (1960) [Russisch].

Hocquenghem, A.: Codes correcteurs d'erreurs. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 2, 147—156 (1959).

Eine Arbeit von Hamming verallgemeinernd, entwickelt der Verf. Codes, die es ermöglichen, bei Übertragung binärer bits k Fehler zu korrigieren. [Deutsche Zusammenfassung.]

Ferguson, David E.: Input-output buffering and Fortran. J. Assoc. comput. Machin. 7, 1—9 (1960).

Masterson, Kleber S.: Compilation for two computers with NELIAC. Commun. Assoc. comput. Machin. 3, 607—611 (1960).

● **Jeanel, Joachim:** Programming for digital computers. New York: McGraw-Hill Book Company 1959. VIII, 517 p.

Oules, H.: Sous programmes, programmes de simulation, compilateur. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul. 3, 53—59 (1960).

Description de DPVP, programme interprétatif en virgule flottante double précision, pour I. B. M. 650.

[Französ. Zusammenfassung.]

Wensley, J. H.: A class of non-analytical iterative processes. Computer J. 1, 163—167 (1959).

Exposé de procédés de programmation „chiffre par chiffre“ pour les fonctions élémentaires suivantes (en binaire): p/q , \sqrt{p} , $p^{1/3}$, $p^{2/3}$, $p^{1/4}$, $p^{3/4}$; $\log_2 p$, $\arccos p$, $\operatorname{arctg} p$, intégrale elliptique.
J. Kuntzmann.

Howell, K. M.: A new programming technique for rational fractions. *Computer J.* 1, 176—178 (1959).

Es wird am Beispiel der Ferranti-Pegasus-Rechenanlage eine Rechentechnik für rationale Zahlen beschrieben, die die Primzahlexponenten zugrundelegt. Anwendung: Berechnung der Wignerschen $6j$ - und $9j$ -Symbole der Kernphysik, von denen Tafeln angekündigt werden.
R. Nicolovius.

Sefton, P. and R. Vaillancourt: A simple technique for coding differential equations. *Commun. Assoc. comput. Machin.* 3, 616—617 (1960).

Andrus, Jan F.: Note on eigenvalue computation. *Commun. Assoc. comput. Machin.* 3, 617 (1960).

Éterman, I. I.: Mathematical problems associated with the automatic control of a milling machine. *Automat. Remote Control* 20, 285—290 (1959), Übersetzung von *Avtomat. Telemekh.* 20, 298—303 (1959).

Zum Fräsen einer Kontur muß das Werkzeug entlang einer Äquidistanten geführt werden. Ecken in der verlangten Kurve werden durch Führen des Fräasers auf Verbindungskreisbogen zwischen Teilstücken der Äquidistanten erzeugt. Die gewünschte Kurve liegt in ihren Koordinaten tabellarisch vor. Ein Digitalrechner führt die Umrechnungen auf die Äquidistante durch, wobei insbesondere numerische Differentiationen ausgeführt werden. Die Erzeugung der Steuerimpulse wird zweckmäßigerweise von einer Hilfsrecheneinheit durchgeführt, deren Funktion im wesentlichen darin besteht, die nun vorliegenden Polynome der Äquidistanten sukzessive zu ermitteln, also nur Additionen auszuführen. Eine solche Trennung in zwei Rechengерäte hat sich als wirtschaftlich erwiesen. Angaben über die Leistungsfähigkeit der Rechner werden gemacht. Die mathematische Behandlung berücksichtigt insbesondere die Ecken im Konturenzug und die notwendige Zustellkorrektur bei Abnutzung und anderen virtuellen Abweichungen.
A. Hückler.

Ascher, Marcia and George E. Forsythe: SWAC experiments on the use of orthogonal polynomials for data fitting. *J. Assoc. comput. Machin.* 5, 9—21 (1958).

Um gegebene Stützwerte an den Stützstellen x_1, x_2, \dots, x_m durch ein Polynom n -ten Grades ($n < m$) auszugleichen, wird ein System von Polynomen benutzt, die auf der endlichen Punktmenge x_1, x_2, \dots, x_m orthogonal sind. Die Konstruktion dieses Systems geschieht mit Hilfe der dreigliedrigen Rekursionsformel, die zwischen drei aufeinanderfolgenden Orthogonalpolynomen besteht. Es werden dafür explizite und für die Programmierung auf Automaten geeignete Formeln hergeleitet und numerische Experimente beschrieben. Die Untersuchungen führen außerdem zu folgendem theoretischen Resultat. Es mögen die gegebenen Stützwerte die Werte einer ganzen Funktion $f(z)$ sein und alle Stützstellen sollen etwa im Intervall $(-1, +1)$ liegen. Streben dann m und n unabhängig voneinander gegen unendlich, so strebt das Ausgleichpolynom gegen $f(z)$ für alle Punkte z der komplexen Ebene.

E. Stiefel.

● Gazalé, M. Midhat J.: Les structures de commutation à m valeurs et les calculatrices numériques. (Coll. de logique mathématique. Sér. A. 15). Paris: Gauthier-Villars; Louvain: E. Nauwelaerts 1959. VI, 78 p. 14 NF.

Ce travail représente une Thèse soutenue par l'A. devant la Faculté des Sciences de Paris. La Thèse est consacrée à appliquer les logiques polyvalentes aux calculatrices numériques. La première partie s'occupe des recherches concernant les ensembles fonctionnels et semi-fonctionnels. On dit qu'une structure algébrique (ensemble E et les fonctions y définies) est fonctionnelle, si et seulement si, les combinateurs réalisant ces fonctions constituent un ensemble complet. Un ensemble de

fonctions est semi-fonctionnelle si l'ensemble constitué par cet ensemble et l'ensemble de toutes les constantes est fonctionnel. L'A. établit que l'ensemble d'une somme, d'un produit et d'une identité est semi-fonctionnel, l'ensemble de la somme modulo p et du produit modulo p est semi-fonctionnel. Il a introduit la fonction G qui généralise la fonction de Webb: $G(x, y) = c$ pour tout $x, y \in E$, $x \neq y$, $G(x, y) = x^1$ pour $x = y$, c étant un élément quelconque de E , et x^1 dénotant un cyclage quelconque de x . Il généralise aussi les fonctions de Post, en montrant qu'une condition suffisante pour que l'opération $+$ et un cyclage σ constituent un ensemble fonctionnel est que la distance δ_{01} (par rapport à σ) soit première à m . De nombreux exemples sont donnés pour les théorèmes avec des schémas de réalisation, notamment est étudié le cas d'un additionnateur ternaire complet. Le problème d'introduire les congruences modulo p à l'étude des circuits électriques a été fait aussi par Gr. C. Moisil, spécialement dans le livre „Teoria Algebraica a mecanismelor automate“ București 1959. À la fin de ce livre sont cités aussi d'autres travaux de Gr. C. Moisil et ses collaborateurs, travaux parus plus tôt et qui utilisent cette méthode.

M. Nedelcu.

Brinkerhoff, Jesse R.: Evaluation of preflight risks by means of very high speed digital system simulation. *ARS J.* **30**, 493—495 (1960).

This paper describes briefly the techniques for digital simulation of a Bomarc interceptor. The differential equations for the missile's path and for guidance and control are integrated numerically by Euler's method. Since the required data cannot all be stored, certain functions of two variables are first curve-fitted.

J. P. Vinti.

Epfelbaum, Gilda et Pierre-Jean Laurent: Extension de la table des zéros et des extrêmes de la fonction d'Airy, $Ai(x)$. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul. **2**, 35—37 (1959).

Die Tabellierung der Funktion $Ai(x)$ wird auf das Intervall 51 (1) 100 erweitert.

[Zusammenfassung.]

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Hermes, Hans: Zum Einfachheitsprinzip in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Dialectica* **12**, 317—331 (1958).

Die vorliegende Arbeit berichtet über einige Versuche zur sogenannten „logischen Begründung“ der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ausgangspunkt dieser Versuche war die Begründung der Axiome von Kolmogoroff durch die Theorie der Wetten. Da diese Theorie aber nur bis zu den Axiomen von Kolmogoroff führt, versuchte man zur Gewinnung weiterer Axiome neue einleuchtende Prinzipien heranzuziehen. Ein solches Prinzip ist das sogenannte Einfachheitsprinzip, das etwa wie folgt formuliert wurde: Von zwei gleich starken Aussagen einer vorgegebenen formalisierten Sprache hat diejenige die größere Apriori-Wahrscheinlichkeit, die die einfachere ist. In der oben zitierten Arbeit wird über die von Kiesow und W. Oberschelp angegebene Präzisierung dieses Prinzips berichtet. Wesentliches Resultat dieser Untersuchungen ist eine Begründung der von Carnap formulierten Isomorphieaxiome der Wahrscheinlichkeitstheorie.

H. Kiesow.

Hans, Otto: Reduzierende zufällige Transformationen. *Czechosl. math. J.* **7** (82), 154—158 (1957).

Es wird eine verallgemeinerte zufällige Größe als meßbare Abbildung eines meßbaren Raumes (Ω, s) (= Ereignisraum) in einem metrischen Raum X eingeführt. Eine Transformation T von $\Omega \times Y$ (Y = beliebiger Raum) in X heißt zufällig, wenn sie für jedes feste $y \in Y$ eine verallgemeinerte zufällige Größe ist. Es sei nun X überdies vollständig und separabel und T eine reduzierende zufällige Transformation.

von $\Omega \times X$ in X . Dann wird gezeigt, daß genau eine verallgemeinerte zufällige Größe existiert, die jedem $\omega \in \Omega$ den Fixpunkt der Transformation $T(\omega, \cdot)$ zuordnet. Ein Iterationsverfahren zur Bestimmung dieser zufälligen Größe wird angegeben, und es wird auf die Zusammenhänge mit einem ähnlichen Satz von Špaček [Czechosl. math. J. 5 (80), 462—466 (1955)] eingegangen. Zum Schluß findet sich eine Anwendung auf die Lösung zufälliger Fredholmscher Integralgleichungen.

W. Uhlmann.

Feather, N.: Note on the population of segments of a random series which include the origin. Proc. phys. Soc., Sect. A 70, 226—227 (1957).

Man betrachte einen Poisson-Prozeß von Ereignissen mit Dichte λ auf der Halbgeraden $t > 0$. Es bedeute $\xi(x, l)$ ($0 \leq x \leq l$) die Anzahl der Ereignisse im Intervalle $(\tau, \tau + l)$, wobei τ eine Zufallsveränderliche ist, die im Intervalle $(-(l-x), x)$ gleichverteilt ist. [Gemäß Definition enthält das Teilintervall $(\tau, 0)$ falls $\tau < 0$ ist, keine Ereignisse]. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\xi(x, l)$ wird bestimmt. Z. B. hat $\eta = \xi(0, l)$, [d. h. die Anzahl der Ereignisse im Intervalle $(0, \tau^*)$, wo τ^* im Intervalle $(0, l)$ gleichverteilt ist] die Verteilung

$$p_k = P(\eta = k) = \frac{1}{\lambda l} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(\lambda l)^j e^{-\lambda l}}{j!},$$

was man auch unmittelbar einsehen kann. Es ist bemerkenswert, daß die Folge $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ immer monoton abnimmt, wie man auch λ und l wählt. A. Rényi.

Lehman, R. Sherman and George H. Weiss: A study of the restricted random walk. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 257—278 (1958).

A point is said to execute a restricted (or self-avoiding) random walk on the lattice points of the plane if at any point of the lattice it chooses at random (with the same probability and independently of previous steps) one of the neighbouring lattice points which it has not yet visited and walks to this point. The points is said to be trapped if it is in a position where it can not continue its walk as it has already visited all four neighbouring lattice points. It is proved in the paper that with probability 1 the point will be trapped after a finite number of steps, further that the mean number of steps made until being trapped is finite. It is pointed out that the same holds for the restricted random walk on the lattice points of the r -dimensional space for $r = 3, 4, \dots$ and also for certain other (not rectangular) lattices. Further results of Monte-Carlo-experiments made with the computer ORDVAC are reproduced and discussed. It is known that the number of different self-avoiding paths consisting of n steps starting from a given lattice point is equal to $e^{xn + o(n)}$, but the value of x is unknown. One of the aims of the experiments was to obtain some information about x . The results obtained can be best fitted by e^{xn} with x being near to 1. The other aim of the computations was to obtain information about the mean value of the square of the distance between the two endpoints of a self avoiding random walk of length n . It is reasonable to suppose that the mean value in question is of order n^α with some $\alpha \geq 1$ and it has been conjectured that $\alpha = 3/2$. The experiments seem to support this conjecture. A. Rényi.

Zítek, František: On a theorem of Korolyuk. Czechosl. math. J. 7 (82), 318—319, engl. Zusammenfassung 319 (1957) [Russisch].

Let $\{x(t)\}$ be a stochastic process with stationary independent increments which assume non-negative integers. Let $P\{x(t) - x(0) = k\} = v_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$). The parameter λ and the intensity μ of the process are defined by

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) = \lambda t + o(t) \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k v_k(t) = \mu t$$

respectively. Khintchine in § 11 of his book (Mathematical methods in the theory of queuing, London 1960) formulates the following theorem: The condition

$\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t) = o(t)$ is necessary and sufficient for $\mu = \lambda$. The sufficiency was proved by Korolyuk. The author shows that the necessity is true only if $\mu = \lambda$ is finite and generally fails if $\mu = \lambda = \infty$. L. Takács.

Korezlioglu, Hayri: Extension du théorème de Pinsker. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 523—525 (1959).

The author states the following theorem as an extension of a theorem of Pinsker: Let be given two gaussian processes $\langle x_n \rangle$ and $\langle y_n \rangle$ defined by

$$x_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_n^x(\lambda) d\xi(\lambda) \quad \left(E |d\xi(\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi} \right), \quad y_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_n^y(\lambda) d\eta(\lambda) \quad \left(E |d\eta(\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi} \right),$$

where $\xi(\lambda)$ and $\eta(\lambda)$ are two random functions with uncorrelated increments, then for the average amount of information contained in one of them concerning the other the following formula is valid:

$$\overline{I}(x, y) \geq -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \log(1 - |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2) d\lambda, \quad \text{where} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda = E(d\xi(\lambda), d\overline{\eta}(\lambda)).$$

The author proves this by making use of the following lemma: In case of a gaussian process the conditional entropy of x_n , the past of the process supposed to be known, is given by the formula

$$H(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) = \frac{1}{2} \log 2\pi e |c_{n,n}^x|^2$$

where $|c_{n,n}^x|^2$ is the variance of the error of prediction for x_n , supposed x_{n-1}, x_{n-2}, \dots are known. K. Bognár.

Čistjakov (Čistyakov), V. P.: Generalization of a theorem for branching processes. Teor. Verojatn. Primen. 4, 109—113, engl. Zusammenfassung 113 (1959) [Russisch].

Es wird ein zeitlich homogener Verzweigungsprozeß mit n Teilchensorten T_1, \dots, T_n untersucht. Bezeichnen $f_i(x_1, \dots, x_n)$ die erzeugenden Funktionen des Prozesses, dann wird das Verhalten des Prozesses wesentlich durch die Eigenschaften der Matrix $A = ||a_{ij}||$ bestimmt, wobei $a_{ij} = \partial f_i(1, \dots, 1) / \partial x_j$ ist. Der Eigenwert λ der Matrix A mit dem größten Realteil sei negativ. Einige Grenzwertsätze von M. Jiřina (dies. Zbl. 89, 341) werden auf den Fall verallgemeinert, daß die Zustände nicht nur eine wesentliche Klasse bilden. W. Richter.

Rosenblatt, M.: The multidimensional prediction problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 989—992 (1957).

Suppose x_t ($E x_t = 0$) a weakly stationary n -vector-valued process, having a spectral density function $f(\lambda)$ which is a non-negative definite matrix-valued function of λ . The covariance matrix r_t is for any t equal to the respective Fourier-Stieltjes coefficient of $f(\lambda)$ viz. $r_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda$. If $x_t^* = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} x_{t-k}$ is a predictor of x_t which depends on $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-m}$, the prediction error is $E_m = \min_{C^{(m)}} E (x_t - x_t^*) (x_t - x_t^*)'$ (where a' is the transposed conjugate of a). Following Doob there exists $\lim E_m = E_\infty$ named "the one step prediction error". The author, generalizing results given by Wiener, established the following theorem: The necessary and sufficient condition that x_t has a positive definite prediction error E_∞ is that $\log |f(\lambda)| \in L$, and then

$$|E_\infty| = (2\pi)^n \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \log |f(\lambda)| d\lambda \right\}.$$

The case of a continuous parameter weakly stationary process is obtained by the author with small modifications of the arguments given above. O. Onicescu.

Bespalov, V. I.: On the fluctuations of the parameters of certain linear systems. *Soviet Phys., Doklady* **2**, 494—497 (1958), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **117**, 209—212 (1957).

Probleme bezüglich des Einflusses der zufälligen Abweichungen der Parameter auf die Charakteristiken eines linearen Systems führen in gewissen Fällen auf die Untersuchung eines Systems

$$(I) \quad Y_j(n) = \sum_{k=1}^L A_{jk}(n) Y_k(n-1) \quad (j = 1, 2, \dots, L)$$

linearer Differenzengleichungen, wobei die $A_{jk}(n)$ Zufallsveränderliche sind, die von n abhängen. Infolgedessen ist auch $Y_j(n)$ ein stochastischer Prozeß. Verf. gibt die allgemeine Lösung von (I) durch sukzessive Approximationen und eine Methode zur Berechnung von Momenten und Korrelationsfunktion von $Y_j(n)$. Beispiele werden u. a. aus der Vierpoltheorie gebracht. *P. Medgyessy.*

McLachlan jr., Dan: Description mechanics. *Inform. and Control* **1**, 240—266 (1958).

By description mechanics the author means a descriptive process suitable for many of the fields related to information theory as in communication theory, thermodynamics, statistical mechanics, pattern recognition, literature searching, etc. It consists of dividing the domain of description into cells whose size is determined by the resolution, and of filling the cells with occupants according to certain restraints where the number of kinds of occupants is determined by the accuracy of distinguishing between them. The grand descriptive capacity W_G is defined as the number of descriptions or patterns that can be arranged by placing M distinguishable occupants in N cells without regard of the number per cell, $W_G = N^M$. In a number of examples it is shown how the descriptive capacity is reduced as one restraint after another is induced upon the system. If sufficient restraints are placed upon the system so that one and only one configuration of occupants in the cells satisfies the conditions of restraint, then the description is complete. *A. Perez.*

Kochen, Manfred: Circle networks of probabilistic transducers. *Inform. and Control* **2**, 168—182 (1959).

Consider a circle network of n transducers, labeled $1, 2, \dots, i, \dots, n$ in a clockwise direction. Let t denote a count of the number of equal time intervals from the start of operations when $t = 0$. Let $x_i(t)$ be a two-valued variable, with value 0 and 1, representing the signal "transmitted" from i to $i + 1$ during the t th time interval. We shall assume that the behavior of the i th transducer is completely specified by the following two conditional probabilities:

$$(1) \quad a_i \doteq P\{x_i(t) = 1 | x_{i-1}(t-1) = 1\}, \quad c_i = P\{x_i(t) = 1 | x_{i-1}(t) = 0\}$$

for $i = 2, \dots, n$, with n taking the place of $i - 1$ when $i = 1$. Let $p_i(t)$ be the

probability that $x_i(t) = 1$. Under the condition $\prod_{i=1}^n (a_i - c_i) \neq 1$, Theorem 1 gives an expression for $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, on the basis of $p_i(0)$ and the system of a_i 's and c_i 's. It follows that the $p_i(t)$'s are asymptotically independent of the $p_i(0)$'s, the initial condition of the net, if and only if the above condition is valid. Theorem 2 then says that, if $a_i = 1 - c_i$ for $i = 1, \dots, n$ and if $c_i \neq 0$ or 1 for at least one value of i , then $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = \frac{1}{2}$ for $i = 1, \dots, n$. A concrete version of this

model is a sequential circuit of imperfect relays. A possible application to the determination of certain reliability parameters is given. The relation to a model for statistical mechanics by Kac is shown. *A. Perez.*

Newell, Gordon F.: The effect of left turns on the capacity of a traffic intersection. *Quart. appl. Math.* **17**, 67—76 (1959).

Continuing his previous work [Quart. appl. Math. 13, 353—369 (1956)] the author gives a model for the traffic flow through an intersection with a light signal on a two-lane highway, where left-turns are permitted. The optimal length of the cycle of the traffic light is calculated under certain conditions. *A. Rényi.*

Uematu, Tosio: On the traffic control at an intersection controlled by the repeated fixed-cycle traffic lights. Ann. Inst. statist. Math. 9, 87—107 (1958).

It is supposed that at a crossing of two streets (e. g. in east-west and north-south directions) a traffic light is operating periodically so that by showing green light to the east-west direction it allows the traffic to flow in this direction for a period of length T , after this it shows red light to the east-west direction and green to the north-south direction for a period of length $C - T$, and so on. In order to find the optimal value of T if C and the average flow of traffic in the two directions is prescribed, the author wants to calculate the average time in which the waiting lines in the two directions reach some prescribed upper bounds. A method for the solution of this question is given, which treats the waiting lines as random walks, and uses matrix calculus. The method is applicable e. g. in the case when arrivals of vehicles in both directions are Poisson processes. A numerical example is also discussed. *A. Rényi.*

Bailey, Norman T. J.: Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 326—333 (1957).

Let, in a simple single-server queue, the customers arrive according to a Poisson process with parameter λ (at $t = 0$ there are a customers) and the service time have exponential distribution with parameter $\mu = 1$. If $p_r(t)$ is the probability that the number ξ_t of customers present at time t (including the one being served) is equal to r then dp_j/dt ($j = a, a + 1, \dots$) can be expressed by Bessel functions I_n [this was first shown by Ledermann and Reuter, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 246, 321—369 (1954)]. Author gives expressions for $p_j(t)$, $q_j(t) = \sum_{i=j}^{\infty} p_i(t)$ and $E(\xi_t)$ [e. g. for $\lambda = 1$ $p_j(t) = e^{-2t}(I_{a-j}(2t) + I_{a+j+1}(2t))$]. Asymptotic expressions for $E(\xi_t)$, $E(\xi_t^2)$ are also given. Finally the density function of the time τ that elapses before the queue length first reaches the value $b < a$ and related problems are investigated, based on former methods of the author (see this Zbl. 58, 348). *P. Medgyessy.*

Mertens, R. und J. Neureiter: Zur Mathematik der Fahrstuhlverteilungen. Unternehmensforsch. 2, 176—184 (1958).

Es seien in einem Hochhaus n Etagen; die Anzahl der Personen die den Fahrstuhl zur gleichen Zeit benutzen können, sei k . Man nehme an, daß der Fahrstuhl zu einer gegebenen Zeit nur dazu benutzt wird, daß Leute damit von unten auf eine der Etagen hinauffahren, und daß bei Abfahrt der Fahrstuhl immer voll ist. Es sei vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person an einer der Etagen aussteigt, gleich $1/n$ ist für alle Etagen und alle Personen, und daß die Personen unabhängig voneinander aussteigen. Unter diesen Bedingungen gilt für die mittlere Steighöhe $H(n, k)$ offenbar $H(n, k) = n - \frac{1}{n^k} \sum_{h=1}^{n-1} h^k$; die durchschnittliche Anzahl

$M(n, k)$ der Halte während eines Aufzuges wird in der Arbeit auch betrachtet und die Werte von $M(n, k)$ durch Rekursion für $1 \leq n \leq 25$, $1 \leq k \leq 10$ tabuliert. Die einfache Formel $M(n, k) = n(1 - (1 - 1/n)^k)$ scheint den Verfassern nicht bekannt zu sein. Falls v die Aufzugsgeschwindigkeit (Etage pro Zeiteinheit) und α die Aufenthaltsdauer auf einer Etage bezeichnet, so ist die mittlere Laufzeit $2H(n, k)/v + M(n, k)\lambda$. Das Problem wird auch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen untersucht. *A. Rényi.*

Winsten, C. B.: Geometric distributions in the theory of queues. J. roy. statist. Soc., Ser. B 21, 1—22, discussion 22—35 (1959).

Zunächst wird ein einfacher Schlangenbildungs-Prozeß untersucht, bei dem genau zur Zeit $t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ je 1 Kunde eintrifft und die Bedienungszeit s jedes Kunden (unabhängig) negativ exponential ($\lambda e^{-\lambda s} ds$) verteilt ist. Da bekanntlich Pascalisierung eines einfachen Poisson-Prozesses auf negative Exponentialverteilung führt, folgert Verf., daß die Abgänge der in einem Zeitpunkt wartenden Kunden in sukzessiven Punkten einer Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Parameter λ erfolgen. Die diskrete Variable q_a = Anzahl der Wartenden kurz vor der Ankunftszeit a bildet eine homogene Markoff-Kette, die im Falle $\lambda > 1$ auf die geometrische Grenzverteilung $P(q = j) = \pi_j = (1 - \pi) \pi^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) mit π = Lösung von $\pi \cdot e^\lambda = e^{\lambda \pi}$ führt. Ausdehnung dieses seit D. V. Lindley (dies. Zbl. 46. 355) und F. G. Foster (dies. Zbl. 51, 106) bekannten, aber vom Verf. auf völlig neuem Wege und letztlich aus den Eigenschaften der Übergangsmatrix hergeleiteten Resultats auf allgemeinere Fälle mit abgeänderter (ergodischer) Übergangsmatrix erklärt das häufige Auftreten (bedingter) geometrischer Grenzverteilungen bei Schlangenbildung. Die gleiche Methode wendet Verf. an auf Schlangenbildung bei negativ exponential verteilter Bedienungszeit und Verspätung der Kunden, charakterisiert durch die Verteilungsfunktion $F(\tau)$ mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ der für alle Kunden unabhängig und identisch verteilten Verspätungszeit τ , um die der festgelegte Ankunftszeit a überschritten wird. Die Grenzverteilung der diskreten Schlangenlänge q_a ist geometrisch $P(q = r) = \pi_r = \pi_1 \pi^{r-1}$ mit π wie oben und

$$\frac{1 - \pi_0}{\pi} = \frac{\pi_1}{\pi(1 - \pi)} = \int_0^1 \exp(\lambda \tau) dF(\tau) \bigg/ \int_0^1 \exp(\lambda \pi \tau) dF(\tau);$$

aus der ebenfalls geometrischen Grenzverteilung $\pi_r = \pi_1 \pi^{r-1}$ ($r \geq 1$) mit

$$\pi_1 = \pi(1 - \pi) \int_0^1 \exp(\lambda \tau) dF(\tau) \int_0^1 \exp[-\lambda(1 - \pi)\tau] dF(\tau) \bigg/ \int_0^1 \exp(\lambda \pi \tau) dF(\tau)$$

der Schlangenlänge zur wirklichen Ankunftszeit $a + \tau$ ergeben sich durch sorgfältige Abschätzung untere und obere Grenzen für den Erwartungswert der Wartezeit jedes Kunden, die im besten (alle Kunden pünktlich) bzw. schlimmsten Fall ($\tau = [1 + \exp(\lambda \pi/2)]^{-1}$ = Wahrscheinlichkeit für Verspätung 1, $1 - \tau$ = Wahrscheinlichkeit für Verspätung 0) erreicht und vom Verf. für $\lambda = 1, 25$ (0,25) 2,0; 2,5; 3; 4; 5 tabuliert werden. Der allgemeinere Fall übergreifender Verspätungszeiten [$F(1) < 1$] wird erörtert, setzt aber der allgemeinen und vollständigen Lösung noch Schwierigkeiten entgegen. — Es folgen ergänzende Diskussionsbemerkungen von D. V. Lindley, D. M. G. Wishart, F. G. Foster, L. Takács u. a. (J. Kiefer, T. Lewis, R. R. P. Jackson, B. W. Conolly, C. L. Mallows). *M. P. Geppert.*

Mack, C., T. Murphy and N. L. Webb: The efficiency of n machines uni-directionally patrolled by one operative when walking time and repair times are constants. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 166—172 (1957).

Mack, C.: The efficiency of n machines uni-directionally patrolled by one operative when walking time is constant and repair times are variable. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 173—178 (1957).

N machines are patrolled by a repairman in a fixed cyclic order. Let us denote by k_i the walking-time from the $(i - 1)$ -st machine to the i -th machine and by k the average walking-time $\left(\sum_{i=1}^N k_i = Nk \right)$. Let be the additional time necessary to repair and restart a stopped machine a constant c . Let further be $\gamma \Delta t + o(\Delta t)$ the probability of stopping of a working machine in the interval $(t, t + \Delta t)$ and let us introduce the notations $a \equiv \exp(\gamma c)$ and $b \equiv \exp(\gamma Nk)$. Considering the states of the system at the instants of arrival at the machines (by state we understand, which of the machines are working or not, resp.), these form an inhomogeneous Markov-chain, namely the matrix of the onestep transition probabilities depends on

the machine at which the repairman is staying. Authors determine the probability of repairing R ($0 \leq R \leq N$) machines during one tour, making use of some symmetric properties of cyclic servicing. This probability is

$$P(R) = \prod_{j=0}^{R-1} (a^j b - 1) \left/ \left(1 + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (a^j b - 1) \right) \right.$$

and the average number of the machines found stopped during a round

$$\sum_{R=0}^N R P(R) \binom{N}{R} = N \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \prod_{j=0}^k (a^j b - 1) \left/ \left(1 + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (a^j b - 1) \right) \right.$$

The paper gives in the following the running efficiency ρ of the machines explicitly and its tabulated values as functions of γc and $\gamma N k$ ($0 \leq N \leq 28$; $0 \leq \gamma c \leq 20$; $0 \leq \gamma N k \leq 0,25$). The results imply as a special case the results of H. Ashcroft (this Zbl. 37, 364), concerning constant repair times. — In the second paper the author solves the problem for identically distributed repair times c (for every machine). In this case instead of the explicit expression of the previous paper an equation-system is obtained, the solution of which gives the required results. *G. Székely.*

Caregradskij (Tsaregradsky), I. P.: On the capacity of a stationary channel with finite impression. *Teor. Verojatn. Primen.* 3, 84—96, engl. Zusammenfassung 96 (1958) [Russisch].

Let (A, v_x, B) be a channel without prediction and with finite memory (for definition see the paper of A. Ja. Chintschin, *Arbeiten zur Informationstheorie*, I., cf. this Zbl. 83, 143, s. 26—85) where A and B are the (finite) alphabets of the sender resp. the receiver, and v_x is the conditional probability distribution of the received message when the message $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ has been transmitted. The author proves that the ergodic and stationary capacity of such a channel are equal; by other words if the rate of transmission of information of the channel is denoted by $R(x)$, then the least upper bound C_e of $R(x)$ for all ergodic stationary processes x is equal to the least upper bound C_s of $R(x)$ for all stationary processes x . *A. Rényi.*

Tanner, J. C.: A simplified model for delays in overtaking on a two-lane road. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 20, 408—414 (1958).

A simple mathematical model of the following situation is given: on a two-lane road a car is travelling with a speed greater than that of the other vehicles travelling in the same direction. The car in question tries to overtake the slower vehicles, but this can be done only if the next vehicle approaching on the other lane in the opposite direction is not too near; otherwise the car has to slow down and let the vehicle coming from the opposite direction pass, only after this can it accelerate and overtake. The delay caused by this is calculated under certain assumptions on the traffic. Especially it is supposed that all cars travelling in the same direction have the same speed and their positions in a coordinate system which moves with the same speed form a stationary Poisson process. *A. Rényi.*

Sakaguchi, Minoru: Notes on statistical applications of information theory. IV. *Rep. statist. Appl. Res., Un. Japan. Sci. Engineers* 6, 54—57 (1959).

[Part I—III see *Rep. statist. Appl. Res., Un. Japan. Sci. Engineers* 1, Nr. 4, 27—31 (1952); 4, 57—68 (1955); 5, 9—16 (1957)]. — In this note we shall discuss some relation between the Shannon's capacity of dichotomous experiments and the Kullback-Leibler's information numbers. Exponential family of distributions characterizing the experiment is used because of its theoretical and practical importance. *Zusammenfassung.*

Siraždinov, S. Ch.: Ein lokaler Grenzwertsatz für eine Markovsche Kette mit stetiger Zeit. *Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat.* 1958, Nr. 6, 83—86 (1958) [Russisch].

Let $x(t)$ be a stationary Markoff-process with continuous time and with a finite number S of states which belong to a simple ergodic class. Let $\xi_k(t)$ denote the length of time the process is spending in the k -th state during the time interval

$(0, t)$, and let ω_k be the limit of the mean value of $\xi_k(t)/t$ for $t \rightarrow +\infty$. The asymptotic expansion according to powers of $1/\sqrt{t}$ of the density function of the joint distribution of the random variables $[\xi_k(t) - \omega_k t]/\sqrt{t}$ ($k = 1, 2, \dots, S$) is given. *A. Rényi.*

Skorochod (Skorohod), A. V.: Limit theorems for Markov processes. *Teor. Verojatn. Primen.* **3**, 217—264, engl. Zusammenfassung 264 (1958) [Russisch].

General results of a previous paper [*Teor. Verojatn. Primen.* **1**, 289—319 (1956)] are applied to the special case of Markov processes. One considers here problems of limit distributions of a type of continuous functionals defined on a sequence of processes when the finite distributions of the processes converge. The second part of the paper is devoted to stating conditions for this convergence of finite distributions in terms of infinitesimal operators of the processes. *F. Zitek.*

Mešalkin (Meshalkin), L. D.: Limit theorems for Markov chains with a finite number of states. *Teor. Verojatn. Primen.* **3**, 361—384, engl. Zusammenfassung 385 (1958) [Russisch]; *Berichtigung Ibid.* **4**, 120 (1959).

Let there be given a sequence of series of random variables such that the n -th series consists of n variables forming a homogeneous Markov chain with s states; the transition probability matrix may depend on n . Let μ_n be the number of steps at which the n -th chain enters into the first state, provided it was there at time zero. Then, for $n \rightarrow \infty$, there are given, in terms of characteristic functions, all possible non-singular limit laws of μ_n (when suitably normed). For $s = 2$ the same problem was already solved by Dobrušin (this *Zbl.* **52**, 141). Several concrete examples are given; the correction rectifies a slight error in one of them. *F. Zitek.*

Volkonskij (Volkonsky), V. A.: A multidimensional limit theorem for Markov chains with a countable set of states. *Teor. Verojatn. Primen.* **2**, 230—255, engl. Zusammenfassung 255 (1957) [Russisch].

A homogeneous recurrent irreducible Markov chain with a countable set of states, e_0, e_1, \dots is considered. The limit distributions for $n \rightarrow \infty$ of the random vector $N_n = (N_n^0, \dots, N_n^r)$ are investigated, where N_n^r is the number of strikes during n units of time in state e_r . It is assumed that the distribution function $F(x)$ of the time for returning to the fixed state satisfies the condition that for any $c > 0$

$$(1) \quad [1 - F(cx)]/[1 - F(x)] \rightarrow c^{-\alpha}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

for some $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$. In this case it holds true that for some definite choice of affine transformations of an $(r+1)$ -dimensional Euclidean space the distributions of vectors $A_n N_n$ converge to the undergenerate distribution on the $(r+1)$ -dimensional space. The norming transformation A_n and the characteristic functions of the limit distribution can be written.

Author's Summary.

Postnikov, A. G.: A test for a quite uniformly distributed sequence. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **120**, 973—975 (1958) [Russisch].

In Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. *Zbl.* **88**, 351) und in Übernahme der dortigen Bezeichnungen wird das folgende Theorem bewiesen: Für die Folge $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ reeller Zahlen in $[0, 1]$ möge bei geeignetem $c > 0$ gelten $\lim_{p \rightarrow \infty} N_p(\Delta_s)/p < c |\Delta_s|$ für jeden s -dimensionalen Teil-Quader Δ_s des Einheitswürfels; $|\Delta_s|$ = Inhalt von Δ_s . Dann ist α gleichmäßig in $[0, 1]$ verteilt.

H. Richter.

Borovkov, A. A.: Limit theorems on the distributions of maximum of sums of bounded latticed random variables. I. *Teor. Verojatn. Primen.* **5**, 137—171, engl. Zusammenfassung 171 (1960) [Russisch].

Let ξ_1, ξ_2, \dots be a sequence of independent, identically distributed, bounded, latticed random variables. Let

$$s_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad \bar{s}_n = \max_{0 \leq v \leq n} s_v \quad (s_0 = 0).$$

The author gives asymptotically (with $n \rightarrow \infty$) formulas for $P(s_{n-1} < x, s_n \geq x)$, $P(\eta_x = n)$ in the following cases: (1) $x = O(n)$, (2) $x \sim \alpha n$, $0 < \alpha < m$.

(3) $x \sim m n$, $m n - x \rightarrow \infty$ (m denotes the maximal jump of ξ_k). The author gives also the formulas for two first moments of the random variable η'_x , where η'_x is distributed as follows: $P(\eta'_x = n) = P(\eta_x = n)/P(\eta_x < \infty)$. L. Kubik.

Fisz, M.: On necessary and sufficient conditions for the validity of the strong law of large numbers expressed in terms of moments. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 221—225 (1959).

The author proves the two following theorems: 1. For sequences of independent, symmetric random variables satisfying relations $|X_i| < i$ ($i = 1, 2, \dots$) there do not exist necessary and sufficient conditions for the validity of the strong law of large numbers expressed in terms of the variances of X_i . 2. Let r be an arbitrary given natural number. For arbitrary sequences of independent random variables there do not exist necessary and sufficient conditions for the validity of the strong law of large numbers expressed in terms of the moments m_{i1}, \dots, m_{ir} ($m_{ij} = E X_i^j$). Let us observe that the paper of Ju. V. Prochorov (this Zbl. **89**, 139) is devoted to the same problem of expressing the necessary and sufficient conditions for the validity of the strong law of large numbers in terms of moments. This paper appeared at the same time as the present paper of M. Fisz. L. Kubik.

Siraždinov, S. Ch. und A. M. Kagan: Über die Bedingung von H. Cramér. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR **1958**, Nr. 12, 5—7 (1958) [Russisch].

Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ be independent random variables with the common distribution function $F(x)$ and having the mean value 0 and variance 1. It is known that if the distribution function $F(x)$ satisfies Cramér's condition, that is $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{hx} dF(x)$

exists for $|h| \leq A$ where $A > 0$, then denoting by $F_n(x)$ the distribution function of $\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}}$ and putting $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$, the relation

$$(1) \quad \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \exp \left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \left(1 + o \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

holds where $\lambda(u)$ is a power series in u which converges in a circle about $u = 0$. It is shown by a counterexample that (1) is in general no longer valid if instead of Cramér's condition only the weaker condition, that all moments $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) exist, is supposed. A. Rényi.

Weiss, Lionel: Spacings generated by mixed samples. Ann. math. Statistics **29**, 316—318 (1958).

x_{i1}, \dots, x_{in_i} sei eine Menge identisch verteilter zufälliger Variabler mit der Dichte f_i , welche die vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. **68**, 121) angeführten Eigenschaften erfüllt, $i = 1, \dots, k$. Alle x_{ij} seien unabhängig. Es sei $\sum_{i=1}^k n_i = N$ und $n_i/N = r_i$. $R_N(t)$ habe dieselbe Bedeutung wie loc. cit., doch ist n durch N zu ersetzen und die y_i sind nun die allen x_{ij} entsprechenden geordneten Größen. Mit $S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^k r_i f_i(x) e^{-t \sum_{i=1}^k r_i h_i(x)} dx$ gilt dann eine der in diesem Zbl. loc. cit. formulierten entsprechenden Aussagen über stochastische Konvergenz. Eine Anwendung auf einen k -Stichprobenrangtest wird gestreift. Vgl. hierzu auch Blum und Weiss, dies. Zbl. **87**, 146. L. Schmetterer.

Khatrı, C. G.: On certain properties of power-series distributions. Biometrika **46**, 486—490 (1959).

Verf. geht von folgender Definition einer durch Potenzreihen darstellbaren Verteilung aus: $P(\xi = x) = a_x Z^x / f(Z)$, $x = 0, 1, 2, \dots$, wobei $a_x Z^x \geq 0$, a_x ge-

gebene Funktion von x oder konstant, $f(Z) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x Z^x$ konvergent für $|Z| \leq r$.

Vorerst werden die Rekursionsbeziehungen für die Kumulanten und faktoriellen Kumulanten aufgezeigt und daraus gefolgert, daß Verteilungen, die durch Potenzreihen mit nur einem freien Parameter Z darstellbar sind, durch die beiden ersten Kumulanten (oder Momente) eindeutig bestimmt werden. Dagegen ist eine solche Verteilung durch zwei andere aufeinanderfolgende Momente keineswegs eindeutig festgelegt. Die Aussage gilt auch für abgestutzte Verteilungen dieser Art. Es werden Beispiele mit der positiven und der negativen Binomialverteilung gegeben und an Hand der polynomialen Verteilung die Übertragung auf mehrdimensionale Verteilungen besprochen.

H. Jecklin.

Linnik, Ju. V. (Yu. V.): On "determining statistics"; a generalization of the problem of moments. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 974—976 (1957) [Russisch].

Es sei $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ eine zufällige Stichprobe, d. h. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ seien unabhängige Zufallsveränderliche mit derselben Verteilungsfunktion $F(x)$. Es sei $Q = Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ eine Stichprobenfunktion, d. h. eine reellwertige Funktion der Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Falls für $F(x) \in \mathfrak{F}$ (wo \mathfrak{F} eine Klasse von Verteilungsfunktionen ist) aus der Verteilungsfunktion $F_Q(x) = P(Q < x)$ der Stichprobenfunktion Q die unbekannte Verteilungsfunktion $F(x)$ sich eindeutig bestimmen läßt, dann nennt Verf. Q eine bestimmende Stichprobenfunktion. Verf. beschäftigt sich mit „definiten“ Stichprobenfunktionen, d. h. solchen, für welche für jedes c die Gleichung $Q = c$ eine beschränkte, teilweise glatte, sternförmige Fläche bestimmt. Es werden drei Sätze ausgesprochen, welche Bedingungen angegeben dafür, welche definite Stichprobenfunktionen für gewisse Klassen F bestimmend sind. Als Spezialfall folgt aus Satz 3, daß jede definite Stichprobenfunktion für die Normalverteilung bestimmend ist in der Klasse aller Verteilungen mit symmetrischen Dichtefunktionen von beschränkter Schwankung in der Umgebung von $x = 0$. Das Problem kann im gewissen Sinne als Verallgemeinerung des Momentenproblems betrachtet werden, wie man durch Betrachtung von linearen Statistiken $Q = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$ wo $\alpha_k > 0$ ist ($k = 1, 2, \dots, n$) leicht einsieht.

A. Rényi.

Laha, R. G.: On a class of distribution functions where the quotient follows the Cauchy law. Trans. Amer. math. Soc. 93, 205—215 (1959).

Anschließend an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 89, 140) konstruiert der Verf. eine Klasse von Verteilungsfunktionen $F(t)$, die endliche Momente bis zu einer gewissen ganzzahligen Ordnung haben, und für welche der Quotient x/y eine Cauchysche Verteilung besitzt, sobald x und y die Verteilungsfunktion $F(t)$ haben. Der Hauptsatz der Arbeit kann folgendermaßen formuliert werden: Es sei

$$\cosh \frac{\pi z}{2} = \prod_{r=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i \alpha_r}\right) e^{z/i \alpha_r} \quad \text{mit } \alpha_{\pm r} = \pm \alpha_r, \quad \alpha_r = 2r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Weiter sei die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen in zwei fremde Mengen (r) und (s) unterteilt, so daß (r) mit den Zahlen $0, 1, 2, \dots, m-1$ und (s) mit der Zahl m anfängt, also $(r) = (0, 1, 2, \dots, m-1, \dots) = (r_1, r_2, \dots)$, $(s) = (m, \dots) = (s_1, s_2, \dots)$, $(r) \cup (s) = (0, 1, 2, \dots)$. Weiter bezeichne

$$P(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i \alpha_{r_j}}\right) e^{z/i \alpha_{r_j}} \quad \text{und} \quad Q(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i \alpha_{s_j}}\right) e^{z/i \alpha_{s_j}};$$

$$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iz \log|t|) dF(t).$$

Wenn $\Phi(-z) = 1/P(-z)Q(z)$ gilt, dann hat $F(t)$ endliche Momente bis zur Ordnung $2m$ und gehört zur obengenannten Klasse.

B. Penkov.

Kahane, Jean-Pierre: Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 184—186 (1959).

Verf. knüpft an eine Arbeit von Dvoretzki an, dies. Zbl. 74, 123. Die Bezeichnung dieses Referates wird hier übernommen. Aus $1 > a_1 \geq a_2 \dots$ und $(1) \lim_{t \rightarrow \infty} \left((\log t)^{-1} \sum_{a_n > t^{-1}} a_n \right) > 1$ folgt, daß der ganze Kreisumfang mit Wahrscheinlichkeit 1 überdeckt wird. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge a_n , welche (1) mit $1 - \varepsilon$ anstatt 1 erfüllt und für welche der Satz falsch ist. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n \log \log n > 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Überdeckung des ganzen Kreisumfanges mit Wahrscheinlichkeit 1. L. Schmetterer.

Guttman, Irwin: On a problem of L. Moser. Canadian math. Bull. 3, 35—39 (1960).

Das Problem von L. Moser (dies. Zbl. 77, 296) wird unter allgemeinen Bedingungen besprochen. Es handelt sich um folgendes: Im Intervall $a \leq x \leq b$, wo eventuell auch $a = -\infty$, $b = +\infty$ sein kann, werde eine beliebige Zahl gezogen. Die Zahl werde entweder beibehalten, womit die Wahl ein Ende hat, oder zurückgelegt. Höchstens n Wahlen seien möglich. Es sei vorgegeben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$. Nun werde die mathematische Erwartung E_n , also hier ein Wert, der mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ bei den tatsächlich durchgeführten Wahlen, deren Anzahl $\leq n$ ist, erreicht oder übertroffen wird, gesucht. Für E_n gilt die Differenzgleichung

$$E_{n+1} = \int_{E_n}^b x f(x) dx + E_n \int_a^{E_n} f(x) dx.$$

Nun bespricht Verf. die Fälle: (1) $f(x) = f_1(x) =$ identisch Eins in $[0, 1]$. (2) $f(x) = f_2(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$ in $[-\infty, +\infty]$. (3) In demselben Intervall $f(x) = f_3(x) = (1/\sqrt{12/\sqrt{2\pi}}) \exp\{-6(x - 1/2)^2\}$. Die bezüglichen Größen $E_1^{(n)}$, $E_2^{(n)}$, $E_3^{(n)}$ werden tabuliert. L. Holzer.

Statistik:

Halperin, M. and G. L. Burrows: The effect of sequential batching for acceptance-rejection sampling upon sample assurance of total product quality. Technometrics 2, 19—26 (1960). Correction. Ibid. 3, 131 (1961).

In einem Produktionsprozeß fallen die Elemente der Produktion in Teilproduktionen, genannt Losen, unterschiedlicher Größe an. Die Qualität der Produktion, d. i. der Prozentsatz der einwandfreien Elemente, schwankt von Los zu Los. Die Prüfung, ob ein Element einwandfrei oder defekt ist, führt zu seiner Zerstörung. Verf. steht vor der Aufgabe, durch ein Stichprobenverfahren schlechte Lose auszusortieren und für die Qualität der übrigen Lose, die zu einer Lieferung zusammengestellt werden, eine Garantie nach Wahrscheinlichkeitsgesichtspunkten zu übernehmen. Zur Lösung des Problems leitet Verf. eine Formel her, in die neben den Parametern des Stichprobenverfahrens auch die verlangte Mindestqualität der Lieferung und die zugestandene Irrtumswahrscheinlichkeit α eingehen. Durch Auswertung der Formel ist es möglich, die Parameter des Stichprobenverfahrens so zu bestimmen, daß mit $(100 - \alpha)\%$ Wahrscheinlichkeit nicht mehr als $p\%$ defekte Elemente in der Lieferung enthalten sind. O. Leiberich.

Geisser, Seymour and Samuel W. Greenhouse: An extension of Box's results on the use of the F distribution in multivariate analysis. Ann. math. Statistics 29, 885—891 (1958).

Die Resultate von Box bezüglich der näherungsweise Verteilung der Quotienten bei der mehrfachen Varianzanalyse (G. E. P. Box, dies. Zbl. 55, 373; 56, 366), wenn die üblichen Voraussetzungen nicht alle erfüllt sind, werden auf weitere Fälle ausgedehnt. F -Tests „auf der sicheren Seite“ werden gegeben. O. Ludwig.

Rao, P. V.: On the construction of some partially balanced incomplete block designs with more than three associate classes. *Calcutta statist. Assoc. Bull.* **9**, 87—92 (1960).

On sait que, étant donnés une „balanced matrix“ avec S entiers $1, 2, \dots, S$ et S (BIBD) avec des matrices d'incidence N_1, N_2, \dots, N_S telles que N_p et N_q soient associables pour tous les $p, q = 1, 2, \dots, S$, on peut construire un (BIBD) partiel avec trois classes associées en remplaçant l'entier p dans la „balanced matrix“ par la matrice d'incidence N_p du $p^{\text{ième}}$ (BIBD), pour $p = 1, 2, \dots, S$. Dans ce papier une matrice partiellement „balanced“ avec S entiers est définie et il est montré que de telles matrices peuvent être utilisées de la même manière que les matrices „balanced“ pour construire des (PBIBD) avec $2m + 1$ classes associées. *A. Sade.*

Tukey, John W.: Variances of variance components. I: Balanced designs. II: The unbalanced single classification. III: Third moments in a balanced single classification. *Ann. math. Statistics* **27**, 722—736 (1956); **28**, 43—56, 378—384 (1957).

A method is given for computing the variances of variance components for random samples, based on the polykeys (see Tukey, J. W., *Ann. math. Statistics* **27**, 37—54 (1956)). — In part I. this method is applied specifically to balanced single and double classifications, to latin squares and to balanced incomplete blocks. — In Part II. the variances of variance components are presented in the case of unbalanced single classifications. — In part III. the method is applied to third moments of variance components in a balanced single classification. *E. Csáki.*

Kramer, Clyde Young and Ralph Allan Bradley: Intra-block analysis for factorials in two associate class group divisible designs. *Ann. math. Statistics* **28**, 349—361 (1957); *Addenda. Ibid.* **29**, 933—935 (1958).

Diskussion von Versuchsplänen mit zwei Faktoren, wo jedes Behandlungskombinationspaar λ_1 -mal bzw. λ_2 -mal in einem Block auftritt, je nachdem ob die Stufe des ersten Faktors in den beiden Kombinationen gleich oder verschieden ist. *K. Sarkadi.*

Stuart, Alan: The efficiency of the records test for trend in normal regression. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* **19**, 149—153 (1957).

It is shown that the asymptotic relative efficiency of the records test is zero with respect to rank correlation tests and rank serial correlation tests but that the difference sign test and turning point test have zero asymptotic relative efficiency with respect to the records test. These results are based on computations in this article and also articles by A. Stuart (cf. this Zbl. **55**, 133; **71**, 134). *D. R. Whitney.*

Elteren, Ph. van: The asymptotic distribution for large m of Terpstra's statistic for the problem of m rankings. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **60**, 522—534 (1957).

Let $x^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) be random vectors with n components $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)}$ being the results of measurements on n objects. Then Terpstra's statistic T is

$$T = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \left(\frac{\sum_{\alpha} z_{i,j}^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sum_{\alpha} \left(z_{i,j}^{(\alpha)} \right)^2, \quad \text{where } z_{i,j}^{(\alpha)} = \text{sgn} (x_i^{(\alpha)} - x_j^{(\alpha)}).$$

The nullhypothesis H'_0 considered herein states that for each α the components $x_1^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)}$ are a permutation of $t_1^{(\alpha)}$ values $u_1^{(\alpha)}, t_2^{(\alpha)}$ values $u_2^{(\alpha)}, \dots, t_{g_\alpha}^{(\alpha)}$ values $u_{g_\alpha}^{(\alpha)}$ ($u_1^{(\alpha)} < u_2^{(\alpha)} < \dots < u_{g_\alpha}^{(\alpha)}$) where all possible permutations have the same probability and that the vectors $x^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) are independent, where the numbers g_α and $t_h^{(\alpha)}$ are assumed to be known constants. This involves the usual nullhypothesis H_0 that the vectors $x^{(\alpha)}$ are independent and for each α the components of $x^{(\alpha)}$ are independent with the same continuous distribution. — The asymptotic distribution of statistic T is determined under the hypothesis H'_0 for bounded n and $m \rightarrow \infty$ and it is shown that this is the linear combination of two χ^2 -distrib-

buted random variables. — The exact and asymptotic distributions are compared for $n = 3, 4, 5, 6$ and $g_n = 3$. It is pointed out that the statements remain valid (with some modifications of definitions and assumptions) if some observations are omitted at positions chosen at random. *E. Csáki.*

Miles, R. E.: The complete amalgamation into blocks, by weighted means, of a finite set of real numbers. *Biometrika* 46, 317—327 (1959).

Die Arbeit steht in engem Zusammenhang mit den Untersuchungen von Bartholomew (s. dies. Zbl. 87, 142 und folgendes Referat), deren Kenntnis jedoch nicht vorausgesetzt wird. Gegeben ist ein n -Tupel von reellen Größen x_i (welche als Stichprobe aus einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefaßt werden können) und n positiven reellen Gewichten w_i . Gewisse einschränkende Voraussetzungen werden gemacht, im wesentlichen daß $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$. Bezüglich der x_i und w_i wird eine Zufallsanordnung $[n]$ definiert. Sodann wird ein eindeutiger Prozeß beschrieben zur Verschmelzung einer Anordnung $[n]$ in Blöcke nach sinkendem gewichtetem Mittelwert. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anordnung $[n]$ nach Verschmelzung k verschiedene Blöcke enthalte, ist gegeben durch $P(k, n) = (n!)^{-1} S_n^k$, wobei S_n^k Stirlingsche Zahlen erster Art bedeuten. Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten besteht Rekursionsmöglichkeit. *H. Jecklin.*

Bartholomew, D. J.: A test of homogeneity for ordered alternatives. II. *Biometrika* 46, 328—335 (1959).

Es handelt sich um eine Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (s. Teil I. dies. Zbl. 87, 142). Gegeben ist eine Reihe von k Zufallsvariablen x_i , $i = 1, 2, \dots, k$, mit den Mittelwerten m_i und den Standardabweichungen σ_i . Es werden modifizierte χ^2 - und F -Tests eingeführt zur Prüfung der Hypothese H_0 , daß alle Mittelwerte einander gleich sind, mit der Gegenhypothese H_2 , daß $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$, wobei zumindest ein Gleichheitszeichen gelten soll. Wenn die Varianz der k Variablen bekannt ist, hängt die Verteilung des mit χ^2 benannten Kriteriums von der χ^2 -Verteilung ab und von gewissen Wahrscheinlichkeiten $P(l, k)$, daß bei k Beobachtungsvariablen nur $l \leq k$ verschiedene Mittelwerte existieren. Für den allgemeinen Fall mit ungleichen σ_i ist deren Berechnung nicht geglückt, für den Spezialfall gleicher Standardabweichungen jedoch ist sie auf Grund einer Arbeit von R. E. Miles (s. vorstehendes Referat) nach Rekursionsverfahren möglich. Verf. gibt für diesen Fall eine Tabelle von P -Werten der χ^2 -Verteilung für $3 \leq k \leq 12$. Aus der Berechnung der Momentenverhältnisse β_1 und β_2 geht hervor, daß die Verteilung außerordentlich schief ist, selbst für recht große k . Verf. betrachtet sodann den Fall einer Hypothese H_3 , wobei Ordnung der ungleichen m_i vorausgesetzt, aber unbekannt ist, ob diese mit m_1 beginnende Wertereihe steigend oder fallend ist. *H. Jecklin.*

Steel, Robert G. D.: A multiple comparison sign test: Treatments versus control. *J. Amer. statist. Assoc.* 54, 767—775 (1959).

Es sei $(X_{0j}, X_{1j}, \dots, X_{kj})$ eine Beobachtung. Getestet werden soll die Hypothese H_0 : „alle Differenzen $X_{1j} - X_{0j}, \dots, X_{kj} - X_{0j}$ haben eine Verteilung mit Mittelwert Null“ gegen die Alternativhypothese H_1 : „wenigstens eine Komponente hat einen von Null verschiedenen Mittelwert“. Es werden n Beobachtungen ausgeführt ($j = 1, \dots, n$) und daraus (r_1, \dots, r_k) gebildet, worin r_i die Anzahl der positiven Vorzeichen der entsprechenden Differenzen bedeutet. Für min r_i werden Verteilungen angegeben für $k = 2, n = 4, 5, \dots, 10$ und $k = 3, n = 4, 5, \dots, 7$. Es wird weiter bemerkt, daß $2(\min r - n/2)/\sqrt{n}$ nach der t -Verteilung von Dunnet (dies. Zbl. 66, 126) verteilt ist. *F. Wever.*

Pitcher, T. S.: Positivity in H-systems and sufficient statistics. *Trans. Amer. math. Soc.* 85, 166—173 (1957).

Let G be a separable locally compact unimodular group, $H = H(G)$ its H -system (cf. T. S. Pitcher, this Zbl. 58, 103) and W the weakly closed ring of operators generated by left convolution operators in H . For $x \in G$ let $l(x)$ denote the opera-

tion of left translation by x . Theorem 1.1. Let π be a non-zero central projection in W sending the set of non-negative elements of H into itself. Let K be the set of $x \in G$ such that $l(x)\pi = \pi$. Then K is compact normal and for bounded f we have $\pi f(x) = \int_K f(xk) dk$ a. e. (dk normalized). This is applied to give a result in the

theory of sufficient statistics: Theorem 2.1. Let M be a dominated invariant set of probability measures on G and $K(M)$ the set of x such that $l(x)m = m$ holds identically for $m \in M$. Then $K(M)$ is compact normal and the Borel sets A not moved by any $k \in K(M)$ constitute a best sufficient subfield for M ; the corresponding conditional expectation for bounded measurable f is just πf as above.

J. G. Wendel (M. R. 18, 910).

Csáki, Endre: On two modifications of the Wilcoxon-statistic. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 4, 313—319, russ. und engl. Zusammenfassung 319 (1959) [Ungarisch].

Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ und $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ zwei unabhängige Stichproben von derselben stetigen Grundgesamtheit. Es bezeichne $V_1/4$ bzw. $V_2/4$ die Anzahl der Zahlenquadrupel (i, j, k, l) , für welche $\xi_i < \xi_k < \eta_j < \eta_l$ bzw. $\xi_i > \xi_k > \eta_j > \eta_l$, ferner $W_1/2$ bzw. $W_2/2$ die Anzahl der Zahlentripel (i, j, k) , für welche $\eta_j < \eta_i < \xi_i$ bzw. $\xi_i < \xi_k < \eta_j$ besteht. Die Kriterien von Lehman (dies. Zbl. 45, 409) und Rényi [Publ. Inst. Math. appl. Acad. Sci. Hongrie 2, 243—265 (1954)]: $V = (V_1 + V_2) / \left[\binom{n}{2} \binom{m}{2} \right]$ und $W = W_1 / \left[n \binom{m}{2} \right] + W_2 / \left[m \binom{n}{2} \right]$ sind Verallgemeinerungen des Wilcoxonschen Kriteriums und sind bezüglich beliebiger Gegenhypothese konsistent. Verf. beweist den folgenden einfachen Zusammenhang: $V = 2W - 1$. Ferner berechnet er die Streuung von V : $D^2(V) = (n + m + 1)(n + m - 2) / \left[45 \binom{n}{2} \binom{m}{2} \right]$.

K. Sarkadi.

Guerrieri, Giuseppe: Considerazione sui diagrammi razionali nell'analisi statistica. Univ. Stud. Bari, Ann. Ist. Statist. 29, 33—46 (1959).

L'A., dopo aver messo in luce alcuni noti errori che si possono commettere ricorrendo all'uso della rappresentazione cartesiana di un fenomeno statistico, prende in esame il saggio assoluto e relativo di variazione di una funzione $y = f(x)$, saggi che coincidono rispettivamente con la derivata e la derivata logaritmica della funzione. Fra le varie scale che si possono usare nelle rappresentazioni cartesiane, indica quelle che permettono di dedurre dai grafici la costanza di tali saggi e in tal caso di valutarli approssimativamente, in base al loro significato geometrico. *G. Leti.*

Linhart, H.: Techniques for discriminant analysis with discrete variables. *Metrika* 2, 138—149 (1959).

Es wird das folgende Diskriminanzproblem behandelt: Irgendwelche Elemente, die als Merkmale die diskreten Zufallsgrößen k, l, m, n, \dots tragen, sollen den Klassen i aus einer Gesamtheit I zugeordnet werden, so daß der erwartete Verlust ein Minimum wird. Der Verlust einer Fehlklassifikation ist durch die Verlustmatrix (c_{ij}) gegeben, die als bekannt angenommen wird. (c_{ij} ist der Verlust bei einer Fehlklassifikation eines Elementes der Klasse i in die Klasse j .) Die optimale Klassifikation kann exakt bestimmt werden, wenn die Wahrscheinlichkeiten π_{iklmn} , daß ein Element die Merkmale k, l, m, n trägt und zur Klasse i gehört, bekannt sind; und zwar schlägt Verf. vor, die zu den verschiedenen möglichen Klassifikationen eines Elements k, l, m, n, \dots gehörigen Beiträge zum erwarteten Gesamtverlust in eine Mehrfeldertafel einzutragen und daraus das Minimum auszusuchen. Wenn für die Wahrscheinlichkeiten nur Häufigkeitsschätzwerte vorliegen, kann dieses einfache Klassifikationsschema ebenfalls angewandt werden, wird allerdings nur annähernd zu einer optimalen Klassifikation führen. Eine weitere Diskussion dieser Frage wird vom Verf. nicht vorgenommen. Er demonstriert das Verfahren an einem Beispiel

und zeigt dabei, daß es auch mit der üblichen Diskriminanzanalyse für stetige Merkmale kombiniert werden kann.

B. Schneider.

Hannan, E. J.: The variance of the mean of a stationary process. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 282—285 (1957).

Die Streuung des Mittels von n aufeinanderfolgenden Beobachtungen aus einem stationären Prozeß x_t ist bekanntlich

$$\sigma_{\bar{x}^2} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{j=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \varrho_j,$$

worin ϱ_j den j -ten Korrelationskoeffizienten und σ^2 die Streuung von x_t bedeutet. — Es wird eine Schätzfunktion für $\sigma_{\bar{x}^2}$ angegeben, die noch mit einer von der Spektraldichte von x_t abhängigen Gewichtsfunktion versehen ist. Die verschiedenen Gewichtsfunktionen werden miteinander verglichen und an einem Beispiel erläutert.

F. Wever.

Dorogovcev (Dorogovtsev), A. Ja. (A. Y.): Statistical analysis of a difference stochastic equation. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1959, 120—124, russ. und engl. Zusammenfassung 124 (1959) [Ukrainisch].

The author considers a random process x_t (where t is an integer) satisfying the difference equation

$$x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + a_0 = b_0 \xi_t + b_1 \xi_{t-1} + \dots + b_p \xi_{t-p},$$

where a_i and b_i are unknown parameters and ξ_t are independent variables with a mean equal to zero and a variance equal to unity. The parameters a_i , b_i are estimated by a sequence of observations x_1, x_2, \dots, x_N of the process. The case of biased estimates is discussed, and estimates of the a_i -parameters are given, these estimates being consistent and their joint distribution tending toward the normal law when $N \rightarrow \infty$.

Zusammenfassung des Verf.

Bass, J.: Sur la définition temporelle des fonctions aléatoires. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 6, 199—211 (1957).

Le Mémoire a un riche contenu de considérations relatives aux relations entre les données expérimentales et les fonctions ou systèmes de fonctions qui les représentent. Le problème central qui intéresse l'A. c'est de décider sur la manière dont une seule épreuve sur une fonction aléatoire permet de caractériser cette fonction. Le problème mathématique auquel sont ramenées les différents problèmes c'est de savoir dans quelles circonstances expérimentales ou théoriques on peut considérer l'intégrale

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(z_1 u(t) + z_2 w(t))} dt$$

ou sa limite quand $T \rightarrow \infty$ comme une fonction caractéristique d'une distribution superficielle. Un théorème de Jessen et Wintner affirme que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(z_1 u(t) + z_2 w(t))} dt$

est une fonction caractéristique, quand $u(t)$ et $w(t)$ sont deux fonctions presque périodiques. Dans ce cas l'A. démontre que, en général, il existe des domaines d'aire finie dans lesquels la fermeture de la courbe $\xi = u(t)$, $\eta = w(t)$ est superficiellement positive. On pourrait donc considérer, d'après l'A., $\varphi(z_1, z_2)$ comme une véritable fonction caractéristique d'une repartition superficielle et en déduire les moments des différents ordres. Du point de vue pratique certaines courbes $\xi = u(t)$, $\eta = w(t)$ comme celles pour lesquelles u et w sont les composants de la vitesse d'un fluide turbulent semblent satisfaire aux conditions de densité ci dessus. D'autre part, certaines équations linéaires aux dérivées partielles admettent pour solution des fonctions presque périodiques. Elles sont donc susceptibles du traitement statistique qu'envisage l'A. La dernière partie du Mémoire est consacrée à l'équation non-linéaire utilisée par J. M. Burgers pour les fluides visqueux et qui possèdent des solutions périodiques ou presque périodiques.

O. Onicescu.

Block, H. D.: Estimates of error for two modifications of the Robbins-Monro stochastic approximation process. *Ann. math. Statistics* 28, 1003—1010 (1957).

Consider a one-parameter family of random variables $Y(x)$, the parameter space being the real line, and assume that the expected value $EY(x) = f(x) < \alpha$ for $x < \theta$, $f(x) > \alpha$ for $x > \theta$, where α is specified and θ is to be estimated. This defines the Robbins-Monro problem in stochastic approximation: under suitable conditions the sequence of random variables X_n defined by (α) $X_{n+1} = X_n - a_n \cdot [Y(X_n) - \alpha]$ is known to converge to θ in some sense. Assuming for each value of the parameter x that $E[Y(x) - f(x)]^2 \leq \sigma^2 < \infty$ and that (β) $0 < m \leq g(x) = [f(x) - \alpha]/[x - \theta] \leq M < \infty$, the author cites and slightly extends a result given on page 53 of the paper by Dvoretzky reviewed this Zbl. 72, 347 on the optimal choice of the constants a_n : in case (γ) $V^2 = E(X_1 - \theta)^2 \leq 2\sigma^2 m^{-1} (M - m)^{-1}$, the constants $a_n = m V^2 (\sigma^2 + m^2 V^2 n)^{-1}$ guarantee that $E(X_{n+1} - \theta)^2 \leq V^2 \sigma^2 (\sigma^2 + m^2 V^2 N)^{-1}$, whereas in case V^2 does not satisfy the inequality (γ) , the constants $a_n = 2[M + (2n - 1)m]^{-1}$ guarantee that

$$E(X_{N+1} - \theta)^2 \leq [(M - m)^2 V^2 + 4N\sigma^2] \cdot [M + (2N - 1)m]^{-2};$$

these values of a_n are optimal in that for any other sequence of a_n the function $g(x)$ (see (β)), which characterizes the family of random variables $Y(x)$, may be chosen in such a way that, all other things being equal, the inequalities for $E(X_{N+1} - \theta)^2$ do not hold. The author's independent proof of this result is simple and straightforward. It should be emphasized that in order to apply these results as well as the new results derived by the author, it is evidently necessary to know the values of σ^2 , m , M . The author furthermore generalizes the process (α) by taking more than one (n_k , say) observations at X_k , and using the average of these observations in determining X_{k+1} :

$$(\delta) \quad X_{k+1} = X_k - a_k \cdot [n_k^{-1} \{Y_1(X_k) + Y_2(X_k) + \dots + Y_{n_k}(X_k)\} - \alpha],$$

the idea being that "it may cost less to take several observations at one point than the same number of observations at different points". By a method of proof, which is closely related to that used by the author in his proof of the above-mentioned result, it is found that if $1 \leq Q = 2\sigma^2 \cdot m^{-1} (M - m)^{-1} V^{-2}$ and if the n_k satisfy

$$n_1 \leq Q, \quad n_k \leq Q + 2m \cdot (M - m)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} n_i \quad (k = 2, \dots, p) \text{ and } \sum_{k=1}^p n_k = N,$$

then the constants $a_k = m n_k V^2 \cdot [\sigma^2 + m^2 V^2 (n_1 + n_2 + \dots + n_k)]^{-1}$ ($k = 1, \dots, p$) guarantee that $E(X_{p+1} - \theta)^2 \leq V^2 \sigma^2 (\sigma^2 + m^2 V^2 N)^{-1}$. Thus it is true indeed that one need take observations at only p instead of N different points X_k , saving money or labor, or, alternatively, that one may speed up convergence by taking n_k instead of one observation at each point X_k (provided that n_k satisfy the above-mentioned inequalities). Finally the author proves that it is possible to choose p and the a_k ($k = 1, \dots, p$) in such a way that all a_k are equal (this would enhance "simplicity in performing the experiment"), yet keep $E(X_{p+1} - \theta)^2 \leq V^2 \sigma^2 (\sigma^2 + m^2 V^2 N)^{-1}$. The only trouble with this result is that the formula defining n_k in this case does not necessarily yield integer values for n_k ($k = 1, \dots, p$). The author expects, however, that if one chooses the n_k as the nearest integer, the inequality for $E(X_{p+1} - \theta)^2$ would not be very much in error, especially if N is large. In an concluding remark a generalization of the results to processes in a Hilbert space is indicated.

H. R. van der Vaart.

Silvey, S. D.: The Lagrangian multiplier test. *Ann. math. Statistics* 30, 389—407 (1959).

Das Schätzen eines s dimensionalen Parameters θ , der r Nebenbedingungen $h(\theta) = 0$, $r \leq s$, genügt, wurde von Aitchison-Silvey [Ibid. 29, 813—828 (1958)] als Maximum-Likelihood-Problem mit Nebenbedingungen behandelt: Lagrange-Multi-

plikatoren $\hat{\lambda}$. $\hat{\lambda}_n$ = Schätzgröße für λ auf Grund von n unabhängigen Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n zur Verteilung $F(X, \theta)$, $\hat{\theta}_n$ = Schätzung für θ . Verf. diskutiert nun unter geeigneten Regularitätsannahmen in analoger Weise das Testen der Hypothese $H: h(\theta) = 0$: Annahme von H , wenn $\hat{\lambda}_n(X)$ hinreichend nahe 0 ist. Die asymptotische gemeinsame Verteilung von $(\hat{\theta}_n, \hat{\lambda}_n)$ sowie Aussagen über die Güte des Testes werden hergeleitet. Vergleiche dieses Multiplikator-testes mit dem Likelihood-Quotiententest und dem Test von Wald (Annahme von H , wenn die Maximum-Likelihood-Schätzung ohne Nebenbedingungen die Gleichungen $h(\theta) = 0$ hinreichend gut erfüllt) sowie Erweiterungen auf den Fall einer singulären Informationsmatrix bzw. daß Realisierungen mehrerer Zufallsgrößen, und zwar in verschiedener Anzahl vorliegen, werden angegeben. *H. Witting.*

Cohen, Arthur: Tables for the sign test when observations are estimates of binomial parameters. *J. Amer. statist. Assoc.* **54**, 784—793 (1959).

Es sei x_i das Verhältnis der „Erfolge“ in m_i Bernoulli-Versuchen, y_i in n_i weiteren Versuchen, je mit der Wahrscheinlichkeit p_i . Es bedeute $G(m_i, n_i, p_i) = P(x_i > y_i) + \frac{1}{2} P(x_i = y_i) - \frac{1}{2}$ für alle i und weiter $D(m_i, n_i) = \sup_{p_i} |G(m_i, n_i, p_i)|$. — Es wird eine Tabelle mitgeteilt für $n = 1, 2, \dots, 8$, $m = 2, 3, \dots, 8$ und $m \rightarrow \infty$, jeweils für $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,4 \dots$, ebenso für die zugehörigen $D(m, n)$. Es wird ein Test beschrieben, mit dem entschieden werden kann, ob zwei Serien von Bernoulli-Versuchen zur gleichen Wahrscheinlichkeit gehören. Der Test wird an einem Beispiel erläutert. *F. Wever.*

Moranda, P. B.: Comparison of estimates of circular probable error. *J. Amer. statist. Assoc.* **54**, 794—800 (1959).

x, y seien mit der Dichte $p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2 - y^2)/2\sigma^2}$ verteilt; σ^2 soll unbekannt sein. Es werden verschiedene Schätzfunktionen für den „Wahrscheinlichen Fehler“ (Circular probable error, d. h. Radius des Kreises, in dem 50% der Treffer liegen) angegeben und miteinander verglichen. In Tabellen werden für Stichprobenumfänge bis zu $n = 21$ die Streuungen der Schätzfunktion, ihre Wirksamkeiten und ihr Bias mitgeteilt. — In der Anwendung wird an die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers von Schußwaffen aus Versuchen geringen Umfanges gedacht. *F. Wever.*

Kitagawa, Tosio: Successive process of statistical inference associated with an additive family of sufficient statistics. *Bull. Inst. internat. Statist.* **36**, Nr. 3, 26—36, (1959).

Verf. definiert eine additive Klasse unabhängiger erschöpfender Schätzfunktionen für einen Parameter, und eine mit dieser Klasse verbundene relative Stichprobenfunktion. Hierzu werden einige Sätze ohne Beweis angegeben, die die Brauchbarkeit dieser Definitionen bei wichtigen Schätz- und Testproblemen erweisen und einen neuen Zugang zur Fiduzialtheorie geben sollen. In diesem Zusammenhang werden auch Funktionalgleichungen zur Charakterisierung der Normal- und F -Verteilung und der sequentielle Quotiententest erörtert. *O. Ludwig.*

Dunn, Olive Jean: Estimation of the medians for dependent variables. *Ann. math. Statistics* **30**, 192—197 (1959).

There is given a method for obtaining simultaneous confidence intervals (based on sample order statistics) for the medians of a bivariate population with continuous marginal distributions, the confidence level being bounded (from below) by the level of the same interval for independent variables. For the case of normal variates, the method is compared with analogous methods of simultaneous confidence intervals for means, elaborated by the same author [Ibid. **29**, 1095—1111 (1958)]. *F. Zitek.*

Boyd, A. V.: Bounds for Mills' ratio for the type III population. *Ann. math. Statistics* **29**, 926—929 (1958).

Die von Des Raj (dies. Zbl. 50, 359) gegebenen oberen und unteren Grenzen für Mills' Verhältnis bei Pearson-Type-III-Verteilungen werden mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung verbessert. (Druckfehler in den Nennern der Formeln für $\mu_3(x)$ und $\mu_7(x)$).
O. Ludwig.

Durbin, J.: A note on the application of Quenouille's method of bias reduction to the estimation of ratios. *Biometrika* 46, 477—480 (1959).

Data una stima t_1 , basata su un campione di n unità, la cui distorsione sia $c n^{-1} + O(n^{-2})$ (c costante), se t_2 e t_3 sono stime calcolate da due campioni di $n/2$ unità, ottenuti dividendo in due parti uguali il campione di n unità, il Quenouille (questo Zbl. 35, 92) ha mostrato che la stima $t = 2t_1 - \frac{1}{2}(t_2 + t_3)$ ha distorsione di ordine n^{-2} al massimo. L'A. mostra che, per le stime mediante rapporto della forma y/x (nell'ipotesi che la regressione di y a x sia lineare e che x sia distribuita normalmente), l'applicazione del metodo di Quenouille oltre a portare la riduzione dell'ordine della distorsione conduce anche alla diminuzione della varianza. Se la x ha come funzione di densità $x^{m-1} 2^{-x}/\Gamma(m)$, l'applicazione del metodo di Quenouille porta ad un leggero aumento della varianza della stima, ma ad una riduzione dello scarto quadratico medio della distorsione.
G. Leti.

Castoldi, Luigi: Inversione delle formule di Bayes per la determinazione di probabilità condizionali dirette. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 29, 26—31 (1959).

L'A. ricava dalla formula di Bayes l'espressione delle probabilità condizionali dirette, che usa poi per la determinazione di un parametro, che serve ad indicare per una data nazione, il rapporto fra „status“ economico della popolazione attiva e quello degli studenti universitari.
G. Leti.

Gjeddebaek, N. F.: Contribution to the study of grouped observations. IV: Some comments on simple estimates. *Biometrics* 15, 433—439 (1959).

In Fortsetzung früherer Studien (N. F. Gjeddebaek, dies. Zbl. 41, 465; 84, 152) untersucht Verf. die Effizienz von Schätzern bei nicht notwendig äquidistanter Klasseneinteilung bei normaler Grundgesamtheit, d. h. das Verhältnis der Varianzen der einfachen Schätzer ohne gegen mit Klasseneinteilung. Da die Schätzer nicht konsistent sind, strebt die so definierte Effizienz gegen Null für $N \rightarrow \infty$. Es wird gezeigt, daß, wenn Mittelwert und Varianz unbekannt sind, für kleine und mittlere Stichprobenanzahlen und äquidistante Klassen die einfachen Varianzschätzer mit Sheppard-Korrektur praktisch ebenso gut sind wie die plausibelsten (maximum likelihood) Schätzer.
O. Ludwig.

Klock, T. and L. B. M. Mennes: Simultaneous equations estimation based on principal components of predetermined variables. *Econometrica* 28, 45—61 (1960).

In einem Simultan-System von linearen stochastischen Gleichungen sollen die $(m \times 1)$ - und $(l \times 1)$ -Koeffizienten-Spalten-Vektoren γ , β einer seiner Struktur-Relationen: $y = Y \cdot \gamma + X_1 \cdot \beta + u$ geschätzt werden auf Grund von je T Beobachtungen an einer zu erklärenden Variablen (Spaltenvektor y), an m gegenseitig und von y stochastisch abhängenden Variablen ($T \times m$ -Matrix Y) und an l fixierten Variablen ($T \times l$ -Matrix X_1), wobei u der Spaltenvektor der entsprechenden Störvariablen sei. Bei großer Anzahl A der fixierten Variablen des Systems (von welchen die Einzelgleichung nur l enthält) ist zwar wegen $A \geq m + l$ die Gleichung identifizierbar, es entstehen aber Schwierigkeiten bei der Schätzung der Momente der Störungen der Gleichungen in reduzierter Form, wie sie u. a. bei zweistufigen Schätzern auf Grund des Prinzips der kleinsten Quadrate erforderlich sind. Als zwar in diesem Sinne nicht optimalen, aber eindeutigen Ausweg empfiehlt Verf. die Verwendung aller oder k nach verschiedenen Auswahlprinzipien bevorzugter Hauptkomponenten der aus der Gleichung ausgeschlossenen fixierten Variablen ($T \times (A - l)$ -Matrix X_2) oder der Hauptkomponenten der Reste der (nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate be-

stimmten) linearen Regressionen der X_2 bez. der X_1 . — Das Verfahren wird an Kleins Modell I erläutert und in allen seinen Varianten numerisch durchgeführt.

M. P. Geppert.

Bush, K. A. and I. Olkin: Extrema of quadratic forms with applications to statistics. *Biometrika* 46, 483—486 (1959).

Bei manchen statistischen Problemen stellt sich die Aufgabe, Extremwerte von quadratischen Formen oder von Verhältniszahlen quadratischer Formen zu bestimmen, wobei gelegentlich noch gewisse einschränkende Bedingungen zu beobachten sind. Gewöhnlich wird die Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung, geometrischen Methoden oder Lagrangeschen Multiplikatoren bewältigt. An Hand verschiedenartiger Beispiele zeigt Verf., daß die Aufgabe auf zwei typische Ungleichungen zwischen quadratischen Formen zurückgeführt werden kann. Nutzanwendungen ergeben sich beispielsweise bei Bestimmungen von Maßzahlen der Hotelling-Student-Verteilung oder der Mehrfachkorrelation.

H. Jecklin.

Fréchet, Maurice: Les tableaux de corrélation dont les marges et des bornes sont données. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* 20, 13—31 (1957).

Zu gegebenen Rändern N_i ($i = 1, \dots, q$) und N'_1, N'_2 mit $N'_1 + N'_2 = \sum_i N_i = N$ einer 2-zeiligen Kontingenztafel sollen Besetzungszahlen n_{ij} (≥ 0 und ganz) mit $\sum_{j=1}^2 n_{ij} = N_i$, $\sum_{i=1}^q n_{ij} = N'_j$ und $n_{ij} \leq m_{ij}$ bestimmt werden, wo m_{ij} mit $0 \leq m_{ij} \leq N_i$, N'_j gegebene Schranken seien. Verf. beweist völlig elementar: Notwendig und hinreichend für die Existenz von Lösungen ist die Bedingung $\sum_j m_{ij} \geq N_i$, $\sum_i m_{ij} \geq N'_j$. Wenn diese erfüllt ist, ergeben sich sämtliche Lösungen $n_{i1} = a_i$, ($i = 1, \dots, q$) durch sukzessive Erfüllung der Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} N'_1 - (m_{q1} + \dots + m_{i+1,1}) - (a_1 + \dots + a_{i-1}) \\ N_i - m_{i2} \end{aligned} \right\} \leq a_i$$

$$\leq \left\{ \begin{aligned} N'_1 - (N_q + \dots + N_{i+1}) + m_{q2} + \dots + m_{i+1,2} - (a_1 + \dots + a_{i-1}) \\ m_{i1} \end{aligned} \right.$$

Die Größe $s_i = a_1 + \dots + a_i$ liegt für jede Lösung zwischen den Grenzen $s'_i \leq s_i \leq s''_i$ mit

$$s'_i = \text{Max} \{N'_1 - (m_{q1} + \dots + m_{i+1,1}), N_1 - m_{12} + \dots + N_i - m_{i2}\},$$

$$s''_i = \text{Min} \{N'_1 - (N_q - m_{q2}) - \dots - (N_{i+1} - m_{i+1,2}), m_{11} + \dots + m_{i1}\},$$

die sich, da es stets Lösungen (a'_1, \dots, a'_q) mit $s_i = s'_i$ und solche (a''_1, \dots, a''_q) mit $s_i = s''_i$ ($i = 1, \dots, r$) gibt, nicht verengern lassen. Für die Einzigkeit der Lösung ist notwendig und hinreichend, daß entweder $\sum_i m_{ij} = N'_j$ für $j = 1$ oder $j = 2$, oder daß $\sum_j m_{ij} = N_i$ für wenigstens $r - 1$ Werte i . Die Verteilungsfunktion $h_{ij} = \sum_{\alpha \leq i} \sum_{\beta \leq j} n_{\alpha\beta}$ jeder Lösung erfüllt die Ungleichung $k_{ij}^0 \leq h_{ij} \leq k_{ij}^1$ mit

$$k_{i2}^0 = k_{i2}^1 = f_i = \sum_{\alpha \leq i} N_\alpha, \quad k_{i1}^0 = s'_i, \quad k_{i1}^1 = s''_i,$$

wobei die Grenzen k_{ij}^0 bzw. k_{ij}^1 selber Verteilungsfunktionen der Lösungen a'_i bzw. a''_i , ($i = 1, \dots, r$) sind. Ein Beispiel zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt.

M. P. Geppert.

Constantine, A. G. and A. T. James: On the general canonical correlation distribution. *Ann. math. Statistics* 29, 1146—1166 (1958).

Verff. geben eine neue Herleitung eines Ergebnisses von Bartlett (M. S. Bartlett, dies. Zbl. 32, 295) bezüglich der Verteilung der kanonischen Korrelationskoeffizienten. Es werden eine „abhängige“ Vektorvariable mit p Komponenten und eine „unabhängige“ mit q ($\geq p$) Komponenten betrachtet und Stichproben genommen, wobei die abhängige Vektorgröße normalverteilt und die unabhängige a) normal-

verteilt, b) fest ist. Die ursprünglichen Verteilungen werden so transformiert, daß man kanonische Korrelationen und andere Variable erhält und dann die letzteren ausintegriert. Momente, die in den Potenzreihenentwicklungen der Verteilungen als Koeffizienten auftreten, werden auf einem neuen Wege berechnet und die (zusätzlich gewonnenen) Ergebnisse im Anhang übersichtlich zusammengestellt.

O. Ludwig.

Gini, Corrado: Sui limiti della invertibilità delle relazioni statistiche. *Metron* 18, Nr. 3—4; 1—14 und 2 Tafeln (1957).

L'A. riprende l'importante argomento dell'invertibilità della relazione statistica, relativamente al quale nel 1954 (questo Zbl. 67, 113) aveva rilevato che condizione necessaria e sufficiente affinché una relazione tra due variabili statistiche x e y sia statisticamente invertibile e che la linea di regressione di x su y coincida con la linea di regressione di y su x . L'A. mostra che tale condizione può essere soddisfatta solo per la parte centrale delle due linee di regressione ma non per gli estremi di queste ed indica quali sono i limiti di tale parte centrale. Tale limitazione era implicita nelle condizioni sufficienti di invertibilità statistica già enunciate dall'A. (questo Zbl. 45, 226) e non contrasta con l'asserita inversione del teorema di Bernoulli nell'ipotesi dell'equiprobabilità delle cause.

G. Leti.

Pawlik, K.: Der maximale Kontingenzkoeffizient im Falle nichtquadratischer Kontingenztafeln. *Metrika* 2, 150—166, Druckfehlerberichtigung 256 (1959).

Verf. beweist: In einer Kontingenztafel mit r Zeilen und k Spalten ($r \leq k$) nimmt der Kontingenzkoeffizient $CC = \sqrt{\chi^2/(N + \chi^2)}$ genau dann sein Maximum an, wenn in jeder der k Spalten genau ein Feld mit einer Häufigkeit $O_{ij} > 0$ besetzt ist, so daß jeder der den k Spalten zugeordneten Merkmalwerte mit genau einem der den r Zeilen zugeordneten Merkmalwerte gekoppelt ist. Der Wert des maximalen Kontingenzkoeffizienten beträgt: $CC_{\max} = \sqrt{(r-1)/r}$. Verf. schlägt vor, in Zukunft einen normierten Kontingenzkoeffizienten $CC_{\text{corr}} = CC/CC_{\max}$ zu verwenden, der bei voller Unabhängigkeit den Wert 0 und bei voller Abhängigkeit (im oben angegebenen Sinne) den Wert 1 annimmt und sonst zwischen diesen beiden Grenzen liegt. Abschließend geht er auf den Zusammenhang zwischen diesem CC_{corr} und einem Kontingenzmaß CC' , das von Gebelein im Zusammenhang mit der „Maximal-korrelation“ eingeführt wurde, ein und zeigt, daß stets gilt: $CC' \leq CC_{\text{corr}}$.

B. Schneider.

• **Tafeln der Verteilungsfunktionen und der Verteilungsdichten von Student.** [Tablicy funkciij raspredelenija i plotnostej raspredelenija Stjudenta.] Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1960. 125 S. R. 1,15 [Russisch].

Grenzgebiete und Anwendungen:

Nikolaeva, T. M.: Constructing the algorithm of an independent grammatical analysis of the russian language. *Soviet Phys., Doklady* 5, 477—478 (1960), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* 132, 1049—1050 (1960).

Madansky, Albert: Determinantal methods in latent class analysis. *Psychometrika* 25, 181—198 (1960).

Es sei π_σ die als bekannt angenommene Wahrscheinlichkeit, daß eine aus einer Population zufällig ausgewählte Person eine Auswahl von σ Fragen (eines Fragebogens mit K Fragen) mit „ja“ beantwortet. Die Population zerfalle in m Klassen, deren Wesen man analysieren will (latent classes). Bezeichnet V_α die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgewählte Person zur Klasse α gehört, und λ_σ^α die Wahrscheinlichkeit der Antwort „ja“ auf alle σ Fragen unter der Bedingung, daß die Person zur Klasse α gehört, so ergibt sich nach der Regel der totalen Wahrschein-

lichkeit

$$(1) \quad \pi_{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^m \nu_{\alpha} \lambda_{\sigma}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \nu_{\alpha} \prod_{\sigma_i \in \sigma} \lambda_{\sigma_i}^{\alpha}.$$

Die Zahlen ν_{α} und $\lambda_{\sigma}^{\alpha}$ sind unbekannt (latent parameters). Es stellt sich die Frage, ob sie durch das Gleichungssystem (1) eindeutig bestimmt sind (problem of identifiability). Es genügt nicht, die Zahl der Unbekannten und die Zahl der Gleichungen abzuzählen. Frühere Bedingungen für die Eindeutigkeit, die von T. W. Anderson [Psychometrika 19, 1–10 (1954)] und von W. A. Gibson (dies. Zbl. 74, 145) gefunden wurden, erweisen sich als hinreichend, aber nicht als notwendig. Auf der Suche nach exakten Bedingungen findet der Verf. eine Reihe von bald notwendigen, bald hinreichenden Bedingungen, die in Sonderfällen exakt sind. *E. Batschelet.*

Schucker, R. E.: A note on the use of triads for paired comparisons. Psychometrika 24, 273–276 (1959).

Die gegenseitige Einstufung (Skalierung, scaling) von N verschiedenen Reizen erfordert nach dem klassischen Verfahren $\binom{N}{2}$ paarweise Vergleiche, d. h. Urteile $A < B$ für je zwei Reize A, B . Der Umfang des Beobachtungsmaterials läßt sich auf ein Drittel reduzieren, wenn an Stelle von Reizpaaren jeweils Reiztriaden A, B, C beurteilt werden: $A < B < C$, und zwar derart, daß jeder Reiz genau in r Triaden und jedes Reizpaar genau in einer Triade auftritt. Mit $k = 3$ und $\lambda = 1$ liegt dann ein Versuch in b ausgewogenen (balancierten), unvollständigen Blöcken vor. Aus den für diesen bekanntlich geltenden notwendigen (aber nicht hinreichenden) Bedingungen $\lambda(N-1) = r(k-1)$, $Nr = bk$ folgt $r = \frac{1}{2}(N-1)$, also N ungerade. Lösungen für $N =$ ungerades Vielfaches von 3 sind aus der Literatur bekannt; Verf. zeigt an Beispielen ($N = 9; 15$), wie sich aus einem Grund-Versuchsplan jeweils durch zyklische Vertauschungen in Schritten von 1 oder 2 weitere Triaden-Versuchspläne herleiten. *M. P. Geppert.*

Gulliksen, Harold: Comparatal dispersion, a measure of accuracy of judgment. Psychometrika 23, 137–150 (1958).

Nimmt man an, daß n zu skalierenden (qualitativen) Reizen paarweise binormal verteilte Variablen ξ_i ($i = 1, \dots, n$) mit $\text{var } \xi_i = \sigma_i^2$, $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$ entsprechen, deren Mittelwerte $E(\xi_i)$ als wahre Skalenwerte durch paarweise Beobachtungen der Form $x_i < x_j$ bzw. $x_i > x_j$ ermittelt werden sollen, so kann man für jedes Variablenpaar i, j die Wahrscheinlichkeit

$$P(\xi_i < \xi_j) = \Phi([E(\xi_j) - E(\xi_i)] / \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j})$$

mit

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$$

durch die beobachtete Häufigkeit p_{ij} von Urteilen der Art $x_i < x_j$ schätzen und hierauf, sofern die Vergleichs-Dispersion (comparatal dispersion) $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j}$ bekannt, die Schätzung $s_i - s_j = z_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j}$ für die Skalenwertdifferenz $E(\xi_i) - E(\xi_j)$ gründen, bei welcher z_{ij} die zu p_{ij} gehörige Normaldeviate ist. An Hand eines Versuches mit paarweisen Vergleichen, bei welchem die N Probanden nicht nur alle Paare i, j von Einzelreizen beurteilen (Komplexitätsgrad 2), sondern auch jedes Reizpaar i, j mit jedem anderen g, h (Kompl. 4) sowie mit jedem Einzelreiz (Kompl. 3) vergleichen, untersucht Verf. durch Gegenüberstellung der auf Grund von Vergleichen verschiedener Komplexität ermittelten entsprechenden Skalenwerte mit Hilfe von Pitmans Test (zum Vergleich von Varianzen gepaarter Beobachtungen), wie sich die Vergleichs-Dispersion mit dem Komplexitätsgrad ändert. — Ferner entwickelt Verf. ein auf dem Prinzip der kleinsten Quadrate beruhendes Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung optimaler Skalenwerte s_1, \dots, s_n und der ihnen in den Vergleichen vom Komplexitätsgrad g zu erteilenden Gewichte w_g . *M. P. Geppert.*

Éltető, Ödön and Károly Sarkadi: On the statistical problems arising in microbiological examination of tomato purées. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 2, 219—225, russ. und engl. Zusammenfassung 225—226 (1958) [Ungarisch].

Versandte Lieferung von Tomatenpüree werden vom Käufer zurückgewiesen, wenn in der zufälligen Probe die sogenannte „Howard-Zahl“ eine gegebene Grenze übertrifft. Es wird gefragt, was für ein vorausgehendes Kontrollverfahren (welche Grenze) dem Verkäufer sichert, daß die versandten Lieferungen mit großer Wahrscheinlichkeit übernommen werden. Unter Annahme der Normalverteilung der Howard-Zahlen im Posten, mit bekannter konstanter Streuung (nötigenfalls nach einer homoscedastischen Transformation) wird dieses Problem von verschiedenen Gesichtspunkten aus gelöst: 1. Wenn erfordert wird, daß die Wahrscheinlichkeit der Zurückweisung des Käufers nach Annahme durch die vorausgehende Kontrolle auch im ungünstigsten Falle eine gegebene Größe nicht übertrifft. 2. Dasselbe Erfordernis, unter Annahme, daß auch der Erwartungswert der Proben der einzelnen Posten eine normal verteilte Zufallsveränderliche ist, mit bekannten Parametern. 3. Es wird die Minimax-Lösung gegeben, falls die verursachten Schäden bei Annahme in der vorausgehenden Kontrolle und Zurückweisung bei der Übernahmskontrolle, sowie bei Zurückweisung in der vorausgehenden Kontrolle, wenn die Annahme bei der Endkontrolle erfolgen würde, bekannt sind. [Siehe auch *Biometrics* 16, 339—347 (1960)]. E. Vas.

Mode, C. J. and H. F. Robinson: Pleiotropism and the genetic variance and covariance. *Biometrics* 15, 518—537 (1959).

Pleiotrope Genwirkung bedeutet, daß eine einzige Erbanlage verschiedene Merkmale beeinflusst. Zum Beispiel besitzt die *Drosophila* ein Gen, das gleichzeitig auf die Borsten, die Flügel und die Fruchtbarkeit wirkt. Solche Gene kann man sowohl in der quantitativen Genetik als auch in der qualitativen Genetik betrachten. Verff. gehen von zwei Merkmalen X und Y aus, zu denen die genotypischen Werte X_{ij} und Y_{ij} gehören. Zunächst werden die Begriffe eingeführt, die später benötigt werden. Die wichtigsten davon sind die Komponenten der genetischen Varianz und Kovarianz, aus denen einige Parameter gebildet werden, die zur Erkenntnis des zugrundeliegenden genetischen Mechanismus geeignet sind. Solche Parameter sind zum Beispiel der genetische, der genotypische und der phänotypische Korrelationskoeffizient. Den theoretischen Werten stehen ihre Schätzwerte gegenüber, deren Zuverlässigkeit von den Verfassern diskutiert wird. Ein praktisches Beispiel wird an Hand des Versuchsplanes I von Comstock und Robinson [*Biometrics* 4, 254—265 (1948)] durchgerechnet. G.Reißig.

Tedeschi, Bruno: Sull'investimento „ottimo“ dal punto di vista della matematica finanziaria. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 21, 57—71 (1959).

In questa Nota mi occupo del problema „dell'investimento ottimo“ di un capitale con riferimento al suo reddito e al suo valore di rimborso, nel senso che verrà meglio precisato appresso. Pongo in evidenza il legame di questo problema con i problemi di un „massimo vincolato“ e metto in rilievo i casi nei quali la funzione da rendere massima sia lineare e quindi si possa risolvere il problema con i metodi della „programmazione lineare“ (dal riassunto dell'Autore). A. Pistoia.

Pistoia, A.: Dirichlet transforms applied to interest functions. *Skand. Aktuarietidskr.* 1958, 167—171 (1959).

Verf. löst die Differenzen-Gleichung $\sum_{n=0}^p \alpha_n y(t+p-n) = A(t)$ ($\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sind Zinsfunktionen unabhängig von t) mit Hilfe der Dirichletschen Transformierten $D(F(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{-sn} F(n)$ ($k, s > 1$). W. Saxer.

Frisknecht, M.: Approximative Reservenberechnung mit Hilfe der linearen Programmierung. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. **60**, 101—113 (1960).

Zunächst skizziert Verf. die Aufgabenstellung der linearen Programmierung (Maximierung einer linearen Funktion von n Variablen x_1, \dots, x_n mit gegebenen Koeffizienten unter k in den x_1, \dots, x_n linearen Bedingungs-Ungleichungen) und die Simplexmethode als deren Lösung durch Einführung von k Schlupfvariablen, die die Ungleichungen in Bedingungs-Gleichungen überführen, und illustriert sodann das Verfahren an einem versicherungstechnischen Problem, der approximativen Reservenberechnung nach t Jahren in einem Versicherungsbestand, dessen altersmäßige Struktur nicht bekannt ist. Mittels linearer Programmierung wird ein zuverlässiger Approximativ-Wert eingegabelt zwischen Maximal- und Minimalwerten, und zwar 1. bei alleiniger Kenntnis des Totals der Versicherungssummen (1 Bedingungs-gleichung), 2. bei zusätzlicher Kenntnis des Totals der Bruttoprämien (2 Bedingungs-gleichungen), 3. bei Hinzunahme der Summenverteilung des letzten Eintrittsjahrganges.

M. P. Geppert.

Németi, Ladislau: Les méthodes de l'analyse mathématique dans la planification socialiste. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Studii Cerc. Mat. **8**, 369—389, russ. und französ. Zusammenfassung 389—390 (1958) [Rumänisch].

Nikaidô, Hukukane und Hirofumi Uzawa: Stability and non-negativity in a Walrasian tâtonnement process. Internat. econom. Review. **1**, 50—59 (1960).

Verff. behandeln Existenz- und Stabilitätsfragen eines Wettbewerb-Gleichgewichts. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten beziehen sie die ökonomisch sinnvolle Forderung mit ein, daß die Preise q_i von n Gütern nicht negativ sein können. Der Gleichgewichtsvektor $\hat{q} = \{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n\}$ ist durch die Forderung festgelegt, daß für ihn keine Überschußnachfrage besteht, oder daß der Preis des betreffenden Gutes verschwindet. Im Verlauf des Anpassungsprozesses an das Gleichgewicht wird der Preis eines Gutes in der $(t+1)$ -ten Planungsperiode aus dem Preis der t -ten Periode durch Addition eines der Überschußnachfrage proportionalen Terms errechnet; ist diese Summe negativ, so wird der Preis 0 gesetzt. Im kontinuierlichen Fall ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, das in der Arbeit dimensionsfalsch geschrieben und in undurchsichtiger Weise hergeleitet wird. Die Existenz einer Lösung ist mit der Existenz eines Gleichgewichts identisch. Fordert man, daß die Überschußnachfrage für das i -te Gut $E_i(q)$ stetig von q abhängt, homogen vom 0-ten Grade ist und den folgenden Bedingungen genügt,

$$\sum_{i=1}^n q_i E_i(q) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \hat{q}_i E_i(q) > 0,$$

so folgt die Existenz einer Lösung aus dem Peanoschen Existenzsatz und die Stabilität des Gleichgewichts im Großen auf Grund der bekannten Sätze von Ljapunov.

K. Kirchgässner.

Arrow, Kenneth J. and Leonid Hurwicz: Some remarks on the equilibria of economic systems. Econometrica **28**, 640—646 (1960).

The purpose of this note is to amplify and correct some points made in two earlier papers on the stability of competitive equilibrium [cf. the authors, this Zbl. **84**, 156 and the authors and H. D. Block, Econometrica **27**, 82—109 (1959)] published in this journal. Einleitung.

Houthakker, H. S.: The influence of prices and incomes on household expenditures. Bull. Inst. internat. Statist. **37**, Nr. 2, 9—22 (1960).

Verf. behandelt die für den Ökonometer interessante Frage, wie die von Haushalten nachgefragten Gütermengen von deren Einkommen abhängen. Die vom Verf. vorgeschlagene Nachfragefunktion eignet sich besonders für internationale Vergleiche, wo die Einkommenselastizitäten ihrerseits vom Einkommen abhängen. Neben einigen vom Verf. hervorgehobenen Vorteilen wird die gute Übereinstimmung der Nachfragefunktion mit dem vorhandenen statistischen Material an Hand eines Beispiels erhärtet.

K. Kirchgässner.

Cowles, Alfred: A revision of previous conclusions regarding stock price behavior. *Econometrica* 28, 909—915 (1960).

This paper reports results which verify the general proposition that, where each unit of a time series is an average of points within that unit, the effect of such averaging will be to introduce a positive first-order serial correlation in the first differences of such a series even where the original series is a random chain. (Aus der Zusammenfassung.)

Working, Holbrook: Note on the correlation of first differences of averages in a random chain. *Econometrica* 28, 916—918 (1960).

In the study of serial correlations in prices series it is important to bear in mind that the use of averages can introduce correlations not present in the original series (vgl. den vorstehend angezeigten Bericht). I consider here the effect of averaging successive groups of items in a random chain, which is the simplest sort of stochastic series to which stock prices and certain commodity prices have a close resemblance. (Einleitung.)

● **Metzger, R. W.:** Elementary mathematical programming. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1958. IX, 246 p. \$ 5,95.

Künzi, H. P.: Lineare Programmierung. *Elemente Math.* 16, 1—12 (1961).

Shubik, Martin: Bibliography on simulation, gaming, artificial intelligence and allied topics. *J. Amer. statist. Assoc.* 55, 736—751 (1960).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Kleinfeld, Erwin: Finite Hjelmslev planes. *Illinois J. Math.* 3, 403—407 (1959).

Die vom Ref. (dies. Zbl. 57, 126, 66, 142) eingeführten Hjelmslev-Ebenen (die l. c. „Ebenen mit Nachbarelementen“ genannt wurden), sind eine Verallgemeinerung der projektiven Ebene in dem Sinne, daß nicht mehr die Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier verschiedener Geraden (und, dual dazu, nicht die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte) gefordert wird. Jedoch sorgen die Axiome einer Hjelmslev-Ebene π' dafür, daß noch folgendes gilt: Wenn man in π' zwei Punkte benachbart nennt, wenn sie mehr als einer Geraden angehören, und wenn man zwei Geraden benachbart nennt, wenn sie mehr als einen Punkt gemeinsam haben, dann ist diese Nachbarrelation eine Äquivalenzrelation, durch die die Punkte von π' und ebenso die Geraden von π' so in Klassen eingeteilt werden, daß diese Klassen, mit der natürlichen Inzidenzrelation, eine (eindeutige) projektive Ebene π (im gewöhnlichen Sinne) bilden. π heißt Restklassenebene von π' , die natürliche Abbildung von π' auf π ist ein Homomorphismus. Eine Hjelmslev-Ebene ist genau dann eine (gewöhnliche) projektive Ebene, wenn jeder Punkt und jede Gerade nur zu sich selber benachbart ist. Verf. untersucht nun die endlichen Hjelmslev-Ebenen. Für jedes indizierende Paar: Punkt P , Gerade k definiert er die Zahlen $s = s(P, k) =$ Anzahl der Punkte von k , die nicht benachbart sind zu P , und $t = t(P, k) =$ Anzahl der Punkte von k , die benachbart sind zu P . In einer gewöhnlichen projektiven Ebene ist offenbar $t = 1$ und $s =$ Ordnung der Ebene. Theorem 1: „Sei π' eine endliche Hjelmslev-Ebene. (i) Die Zahlen $s = s(P, k)$ und $t = t(P, k)$ sind unabhängig von P und k . (ii) Die Gesamtzahl der Punkte und die Gesamtzahl der Geraden von π' ist $s^2 + st + t^2$. (iii) t teilt s . (iv) Die Restklassenebene π von π' hat die Ordnung s/t . (v) Falls $\pi \neq \pi'$, so $s \leq t^2$.“ Im Verlauf des Beweises wird für jede Gerade k die (nicht notwendig ganze) Zahl $\lambda = \lambda(k)$ eingeführt als die durchschnittliche Anzahl der Schnittpunkte, die k mit den zu k benachbarten, aber von k verschiedenen Geraden hat. In einer gewöhnlichen projektiven Ebene ist natürlich $\lambda = 0$. π' wird uniform genannt, wenn es eine Gerade k gibt so, daß $\lambda = \lambda(k)$ ganz und > 0 ist. Theorem 2: „Sei π' endlich und uniform. Dann ist $\lambda(k)$ unabhängig von k , und zwar gilt (i) $\lambda = t$. (ii) $s = t^2$. (iii) Die Inzidenzmatrix von π' ist ein gruppenteilbarer, re-

gularer Blockplan mit zwei assoziierten Klassen und mit den Parametern $v = t^1 + t^3 + t^2$, $n = t^2$, $m = t^2 + t + 1$, $r = t^2 + t$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = t^2$.“ (Vgl. zum Begriff des Blockplans mit zwei assoziierten Klassen: R. C. Bose, W. H. Clatworthy, and S. S. Shrikande, *Tables of partially balanced designs with two associate classes*, North Carolina agricult. Exper. Station techn. Bull. 107, 1954). — Im allgemeinen sind die endlichen Hjelmslev-Ebenen jedoch nicht uniform, das zeigen schon Beispiele von pascalschen Hjelmslev-Ebenen, wie sie Ref. 1. c. angegeben hat, sowie Beispiele, wie Verf. sie im letzten Abschnitt diskutiert. Nach einigen Bemerkungen zum Problem der Existenz von endlichen Hjelmslev-Ebenen mit vorgegebenen Zahlen s und t zeigt Verf. in Beantwortung einer vom Ref. aufgeworfenen Frage: Theorem 3: „Es gibt endliche, desarguessche Hjelmslev-Ebenen, die nicht pascalsch sind.“ Dagegen ist bekanntlich jede endliche, desarguessche projektive Ebene pascalsch. Die vom Verf. angegebenen Beispiele sind uniform mit $t = p^n$, $s = p^{2n}$. Falls speziell $p = 2$, $n = 1$, so erhält man einen Blockplan, der sich bereits in der Literatur findet: J. W. Archbold and N. L. Johnson, dies. Zbl. 72, 366.

W. Klingenberg.

Cowell, W. R.: *Loops with adjoints*. Canadian J. Math. 12, 134—144 (1960).

Ein Gewebe \mathcal{G} kann durch Hinzufügen einer Punktmenge L als neuer Geraden zu einem Quasigewebe erweitert werden, wenn L mit jeder Geraden von \mathcal{G} genau einen Punkt gemeinsam hat. Ist \mathcal{G} ein 3-Gewebe, so läßt sich eine derartige Menge L in der zu \mathcal{G} gehörigen Loop G durch eine solche Permutation σ von G darstellen, für die durch $x + x\tau = x\sigma$ (für alle $x \in G$) eine Permutation τ von G definiert wird. Permutationen σ einer Loop G , die diese Eigenschaft besitzen, werden daher Adjunkten von G genannt. Mengen von Adjunkten mit gewissen Eigenschaften werden nun zur Erweiterung von \mathcal{G} verwandt und die entstehenden Quasigewebe näher untersucht (unter Zusatzvoraussetzungen über G). Ist G eine abelsche Gruppe, so handelt es sich bei dem entstehenden Quasigewebe um eine Translationsebene, wenn es eine affine Ebene ist.

G. Pickert.

Loewner, Charles: *On some transformation semigroups invariant under Euclidean or non-Euclidean isometries*. J. Math. Mech. 8, 393—409 (1959).

In der Gruppe G der (direkten und inversen) Isometrien eines euklidischen Raumes gibt es nur die Untergruppe der Translationen und diejenige aller direkten Isometrien, welche in G invariant sind und von infinitesimalen Transformationen von G erzeugt werden können; im nichteuklidischen Raume sind jene Bedingungen nur von der Untergruppe der direkten Isometrien befriedigt. Hier wird folgende allgemeinere Frage behandelt. V_m ist der m -dimensionale euklidische oder nicht-euklidische Raum und G ist die Gruppe der Isometrien von V_m in sich selbst; es wird ein System s von infinitesimalen Transformationen von V_m mit folgenden Eigenschaften gesucht: a) s ist ein geschlossener konvexer Kegel (der sich auf die einzige Identität nicht reduziert), d. h. die Summe $\xi_1 + \xi_2$ von zwei Elementen von s und das Produkt $a\xi$ eines Elements von s mit einem Skalar $a \geq 0$ gehören immer dem System s an; b) s ist in G invariant; c) die Dimension von s ist eine endliche; d) s ist minimal, d. h. es gibt kein Untersystem von s mit den Eigenschaften a), b). — Im euklidischen Falle, und für $m > 1$, sind die einzigen Lösungen die infinitesimalen Translationen; für $m = 1$ hat man ein unendliches Kontinuum von Lösungen (darunter auch die infinitesimale Translation). — Der nichteuklidische Fall wird nur für $m = 1, 2$ behandelt. Im elliptischen Raum gibt es, für $m = 1, 2$, eine abzählbare Menge von Lösungen. Dasselbe gilt in der hyperbolischen Ebene; auf der hyperbolischen Geraden ist die Gruppe der Isometrien mit derjenigen der euklidischen Geraden ähnlich. — Einige der gefundenen Lösungen erzeugen Untergruppen von G ; andere dagegen erzeugen Halbgruppen von direkten Isometrien.

E. Togliatti.

Elementargeometrie:

● Johnson, Roger A., under the editorship of John Wesley Young: **Advanced euclidean geometry.** (Formerly titled: **Modern geometry.**) An elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1929. New York: Dover Publications, Inc. 1960. XIII, 319 p. \$ 1,65.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. des Werkes in J.-buch Fortschr. Math. 55 (1929), 979.

Deaux, R.: **Sur la cubique de MacCay.** Mathesis 68, 263—265 (1959).

Verf. hat rechnerisch bewiesen, daß die Asymptoten der Kubik von MacCay, die zum Drehpunkt den Umkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC haben, im Schwerpunkt G von ABC zusammenlaufen [Mathesis 58, 229 (1949)]. Dasselbe beweist er jetzt ohne Rechnung.

M. Zacharias.

Cavallaro, Vincenzo G.: **Equibrocadiani.** Archimede 12, 256—258 (1960).

Toscano, Letterio: **Triangoli con particolare angolo di Brocard.** Archimede 12, 259—264 (1960).

Krejeer, G. P. und G. I. Tjurin: **Die Eulerschen Kugeln des orthozentrischen Simplex.** Mat. Prosvesčenie 2, 187—194 (1957) [Russisch].

The paper deals with an orthocentric tetrahedron P . Two spheres S_1 and S_2 belonging to P are described. On S_1 there lie the centres of gravity of the sides of P , the foots of heights and the points dividing the distance between orthocentrum and vertices in the ratio 1:2. S_2 contains the circles of nine points of all sides of P . In the last part of the paper the results above are generalized for the n -dimensional orthocentric simplex. Note: The results concerning S_1 are dealt with in general case e. g. in Thébault: Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace, this Zbl. 64, 397.

M. Sekanina.

Thébault, V.: **Cône associé à un tétraèdre.** Mathesis 68, 269—271 (1959).

Die Umkugel (O) vom Radius R und die Kugel der 12 Punkte mit dem Mittelpunkt (O') eines Tetraeders $T = ABCD$, dessen Kanten BC, DA, CA, DB, AB, DC die Längen a, a', b, b', c, c' haben, entsprechen sich in einer Homothetie ($M, 3$), die zum Zentrum des Mongeschen Punkt M hat, und sind einem geraden Kegel (K) mit der Spitze M eingeschrieben, der ein wirklicher Kegel oder eine Ebene oder imaginär ist, je nachdem (O) und (O') außerhalb voneinander liegen, oder einander berühren, oder eine von ihnen innerhalb der andern liegt. Verf. untersucht die Eigenschaften von (K) für ein beliebiges Tetraeder und für ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt. Vergleiche Victor Thébault, Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (dies. Zbl. 64, 397), p. 32.

M. Zacharias.

Matschinski, Matthias: **Polytopes réguliers des séries du cube (PC) et du décahexaèdre (PD).** Exemples de polytopes: a. contenant un espace „euclidien“ fermé et b. correspondant à un espace à courbure constante non fermé. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 717—720 (1957).

In Fortsetzung einer früheren Note [ibid. 243, 1595—1598 (1956)] untersucht Verf. das reguläre Petrie-Polygon, das von Hyperkuben begrenzt wird. Graphische Darstellungen erläutern das verwendete Konstruktionsverfahren.

J. J. Burckhardt.

Matschinski, Matthias: **Sur la classification des polytopes saturés.** C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2461—2464 (1957).

Verf. legt sich die Frage vor (s. vorstehendes Referat), wann ein Polytop mit N Ecken in einem Raum der Dimension $n - 1$ durch die Ecken bereits bestimmt ist. z. B. für $N = n - 1$ das Simplex. Die Anzahlen der verbindenden Teilräume werden angegeben und tabelliert.

J. J. Burckhardt.

Matschinski, Matthias: De la géométrie combinatoire et de la construction combinatoire des polytopes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 543—568 (1957).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (s. vorstehendes Referat) befaßt sich Verf. nach einigen Vorbemerkungen über die kombinatorischen Methoden in der Mathematik mit den folgenden Körpern im n -dimensionalen Euklidischen Raum: (a) Simplex, (b) Würfel, (c) Oktaeder. Zum Schluß werden Netze auf verschiedenen Flächen betrachtet, z. B. auf dem Torus.

J. J. Burckhardt.

Matschinski, Matthias: Remarques sur les polytopes saturés. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 528—531 (1958).

Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit: In Verallgemeinerung eines „polygon saturé“, d. h. eines N Ecks, das durch $N - 3$ Diagonalen in $N - 2$ Dreiecke zerteilt ist, werden die „polytopes saturés“ untersucht und Anzahlformeln für die Teilräume angegeben.

J. J. Burckhardt.

Matschinski, Matthias: De la géométrie sur la surface d'un polyèdre et dans l'hypersurface d'un polytope. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 78—101 (1959).

Nach einer Zusammenfassung seiner früheren Arbeiten (siehe die vorstehenden Referate) befaßt sich der Autor mit dem Problem der Geometrie auf der Oberfläche eines Polytopes. Die Methode der Parallelverschiebung eines Vektors von Levi-Civita kann im allgemeinen wegen der Unstetigkeit der Oberfläche nicht angewandt werden. Verf. stellt Funktionale auf, die gegenüber Parallelverschiebung invariant sind.

J. J. Burckhardt.

Chelazzi, Mirko: La determinazione grafica degli angoli. Archimede 12, 102—105 (1960).

Eves, Howard: Philo's line. Scripta math. 24, 141—148 (1959).

In dieser Behandlung zeigt der Verf. zwei charakteristische Eigenschaften der Philoschen Linie, ihren Zusammenhang mit der Verdoppelung des Würfelraum-inhalts und einige Verallgemeinerungen des Problems der Philoschen Linie.

J. Šimek.

Nunziante-Cesàro, Carlo: Coni di minima superficie laterale o totale circoscritti ad un dato cilindro. Archimede 12, 244—253 (1960).

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Recenti prospettive nella teoria delle corrispondenze. Bull. Soc. math. France 86, 355—372 (1959).

In diesem Vortrag bringt Verf. eine zusammenfassende Darstellung von Problemen und Lösungsmethoden der klassischen algebraischen Geometrie; denn die klassische Richtung sei, obwohl sich das heutige Interesse mehr einer allgemeineren abstrakten Richtung zuwende, noch weit entfernt davon, eine auch nur einigermaßen abgeschlossene Theorie zu bilden; dagegen sei sie auch heute noch von unerschöpfter Lebenskraft und Fruchtbarkeit, so daß viele Anregungen von ihr ausgehen. — Verf. bespricht zunächst birationale Transformationen im allgemeinen, insbesondere Cremonatransformationen, deren eventuelle Zerlegbarkeit in Dilatationen und Kontraktionen, die fundamentalen und exzeptionellen Varietäten und die neueren Ergebnisse darüber (in diesem Zusammenhang darf auch auf eine frühere Arbeit des Ref., dies. Zbl. 18, 330, verwiesen werden). Weitere Untersuchungen liegen vor über Möbiustransformationen zwischen euklidischen Räumen und über topologische Cremonatransformationen zwischen Ebenen; die ersten sind durch die Eigenschaft charakterisiert, daß Volumina in konstantem Verhältnis transformiert werden, die zweiten gründen sich auf die Existenz von homaloidischen Kurvennetzen ohne reelle Fundamentalpunkte in einer reellen Ebene. Werden diese Kurven

als Geraden der Ebene gedeutet, so erhält man Geometrien, die, wie ein Beispiel zeigt, auch so beschaffen sein können, daß in ihnen der Desarguessche Satz nicht gilt.

W. Gröbner.

Mizuno, Hirobumi: Sur les correspondances algébriques. Proc. Japan Acad. **34**, 657—660 (1958).

Einige der Hauptsätze der für Kurven wohlbekannten Theorie der algebraischen Korrespondenzen werden auf höherdimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen. Es seien V , V' zwei projektive Mannigfaltigkeiten ohne Singularitäten; eine „Korrespondenz“ zwischen V und V' wird definiert als ein Zyklus X des Produkts $V \times V'$. Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die Dimension von X gleich der Dimension n von V ist. X heißt „ausgeartet“, wenn die Projektion von X auf V eine Dimension $< n$ besitzt. Jede Korrespondenz X läßt sich eindeutig darstellen in der Form $X = X_0 + X_1 + V \times b$, wobei: b ein Zyklus der Dimension 0 auf V' ist, X_1 eine ausgeartete Korrespondenz, und X_0 die Eigenschaft besitzt, daß sie keine ausgeartete Komponente und keine Komponente der Form $V \times b$ enthält. Es wird $\bar{X} = X_0 + V \times b$ gesetzt. Gegenstand der Untersuchung ist die Abbildung $P \rightarrow X(P)$ (für $P \in V$), welche durch die Formel $\bar{X}(P \times V') = P \times X(P)$ definiert ist. $X(P)$ ist also ein Zyklus der Dimension 0 auf V' . Durch Linearität wird $X(m)$ für einen beliebigen Zyklus m der Dimension 0 auf V erklärt. — Satz: Es seien $\varphi: V \rightarrow A$ und $\varphi': V' \rightarrow A'$ die kanonischen Abbildungen von V bzw. V' in die zugehörigen Albanesischen Mannigfaltigkeiten. Dann gehört zu jeder Korrespondenz X zwischen V und V' ein Homomorphismus $\varrho_X: A \rightarrow A'$ und ein Punkt a' von A' derart, daß

$$\varphi'(X(m)) = \varrho_X(\varphi(m)) + \text{Grad}(m) \cdot a'$$

für jeden 0-dimensionalen Zyklus m von V . Falls X rational äquivalent ist zu einem Zyklus der Form $Y_1 + V \times c$ mit ausgeartetem Y_1 (dann schreibt man: $X \cong 0$), so ist $\varrho_X = 0$. — Man schreibt $X \equiv Y$, wenn $\varrho_X = \varrho_Y$; dies ist also eine Vergrößerung der rationalen Äquivalenz. (Falls V und V' Kurven sind, so stimmen die Äquivalenzbegriffe \cong und \equiv überein.) Der Modul $\mathfrak{C}(V, V')$ der Korrespondenzklassen (bezüglich der Äquivalenz \equiv) wird durch die Abbildung $X \rightarrow \varrho_X$ monomorph in den Modul $\text{Hom}(A, A')$ abgebildet. Daraus folgt insbesondere, daß $\mathfrak{C}(V, V')$ eine endliche Basis über den ganzrationalen Zahlen besitzt, denn dies ist für $\text{Hom}(A, A')$ bekannt. Falls V, V' Kurven oder abelsche Mannigfaltigkeiten sind, so ist die Abbildung $\mathfrak{C}(V, V') \xrightarrow{\varrho} \text{Hom}(A, A')$ sogar ein Isomorphismus, jedoch ist dies im allgemeinen Falle nicht zu erwarten.

P. Roquette.

Etayo Miqueo, Jose Javier: Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten. Revista mat. Hisp.-Amer. **19**, 155—198 (1959) [Spanisch].

Movendo da una precedente Memoria di P. Abellanas (questo Zbl. **80**, 144) sulla teoria aritmetico-geometrica delle superficie algebriche, l'A. si occupa, con la medesima impostazione, delle varietà superiori algebriche, richiamando ed estendendo convenientemente nozioni e metodi. In particolare, negli ultimi sviluppi del lavoro, si incontra una notevole estensione di classici risultati di F. Enriques sulle superficie algebriche irregolari con irregolarità $q = 1$ oppure di genere geometrico $p_g = 0$.

V. E. Galafassi.

Godeaux, Lucien: Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques. I, II. Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. **45**, 52—58, 59—68, 188—196 (1959).

Une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^1 = P_2 = 3$ possède un réseau irréductible de courbes bicanoniques de genre 7 et degré 8, un système ∞^6 de courbes tricanoniques de genre 13 et degré 18 permettant d'en donner un modèle projectif dans S^6 . Ce modèle appartient à un nombre $k \geq 2$ de quadriques indépen-

dantes. L'étude des courbes i -canoniques ($i \leq 6$) permet de montrer que parmi les courbes 6-canoniques il peut y en avoir formées de trois courbes bicanoniques et de deux tricanoniques: ∞^1 si $k = 2$, nombre fini si $k = 3$, zéro si $k = 4$. Deux cas sont alors possibles: quatre courbes c_1, c_2, c_3, c_4 , telles que $c_1 + c_2, c_3 + c_4$ bicanoniques; $2c_1 + c_3, 2c_2 + c_4$ tricanoniques — ou 6 courbes c_i telles que $c_1 + c_2, c_3 + c_4, c_5 + c_6$ bicanoniques, $c_1 + c_3 + c_5, c_2 + c_4 + c_6$ tricanoniques (N. I). Dans la note II, l'A. étudie le second cas: alors les six courbes sont isolées de genre 3 et degré 2 se coupant deux à deux en 2 points. Il en existe une septième de même caractère, dont le double est bicanonique. Un cas particulier de surfaces de ce type a déjà été donné par l'A. (ce Zbl. 35, 103): image d'une involution cyclique d'ordre 8 sans points unis sur une surface régulière de genre 7, $P_2 = 24$, $p^1 = 17$. Dans la note I, l'A. montre en outre que le plan double de Campedelli (ce Zbl. 4, 161, 363) dont la courbe de diramation est formée d'une quartique touchant trois coniques en leurs points de contact deux à deux est le cas le plus général des courbes de diramation $C_{10}(A^3 A'^3)$. B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur le système des surfaces cubiques passant par une quartique gauche de seconde espèce. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 28, 193—197 (1959).

F. Enriques und G. Fano haben eine stetige Gruppe von birationalen Transformationen gefunden, welche alle kubischen, durch eine biquadratische Kurve zweiter Art gehenden Flächen reproduzieren. Verf. stellt sich in diesem Zusammenhang die folgende Aufgabe: Wenn man zu der biquadratischen Raumkurve noch einen Kegelschnitt hinzunimmt, welcher die Quartik in vier Punkten schneidet, entsteht die Basis für eine kubische Cremona-Transformation im Raume. Ist es möglich, die vorher genannte stetige Gruppe von Transformationen auf diesem Wege neu aufzufinden? Nach genauer Nachprüfung zeigt sich, daß die Antwort negativ ist. J. Metelka.

Tallini, Giuseppe: Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di $S_{3,q}$. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 26, 484—489, 644—648 (1959).

Mit $\mathfrak{F}(k)$ bezeichnet Verf. die Klasse der k -elementigen Punktmengen F im dreidimensionalen projektiven Raum $S_{3,q}$ über dem endlichen Körper $GF(q)$ ($3 < q \equiv 1 \pmod{2}$) mit den folgenden Eigenschaften: Jede Gerade, die mit F mehr als drei Punkte gemeinsam hat, ist ganz in F enthalten. F besteht nicht nur aus Geraden durch einen gemeinsamen Punkt und enthält keine Ebene und keine Quadrik. Trifft jede Gerade durch den Punkt $p \in F$ die Menge F in höchstens einem weiteren Punkt, so heißt p ein Doppelpunkt von F . Unter Benutzung des Satzes von B. Segre (dies. Zbl. 65, 134), daß in einer projektiven Ebene ungerader Charakteristik jedes Oval ein Kegelschnitt ist, beweist Verf.: Hat $F \in \mathfrak{F}(k)$ für $k \geq q^2 + q + 1$ drei kollineare Doppelpunkte oder für $k \geq q^2 + 3q + 1$ vier unabhängige Doppelpunkte oder für $k \geq q^2 + 4q + 1$ drei unabhängige Doppelpunkte, so ist F eine kubische Fläche. Für k gilt dann jedesmal das Gleichheitszeichen (vgl. L. A. Rosati, dies. Zbl. 73, 381). H. Salzmann.

Green, H. G. and L. E. Prior: Some involution and incidence properties of the twisted cubic. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 73, 235—244 (1959).

Auf einer kubischen Raumkurve Γ sei eine ∞^3 -Involution 4. Grades gegeben: die ∞^2 Gruppen der Involution, die einen Punkt P von Γ enthalten, werden auf Γ durch die Ebenen eines Bündels ausgeschnitten; das Zentrum des Bündels (Frégier-Punkt, oder kürzer F-Punkt) beschreibt eine Gerade, wenn P die Kurve Γ durchläuft. — Es seien dann auf Γ sieben Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gegeben. Man kann aus ihnen auf 30 verschiedenen Arten sieben Gruppen von je vier Punkten wählen, so daß zwei beliebige Vierer der Gruppe einen einzigen der sieben Punkte weglassen. Eine der 30 Möglichkeiten ist z. B. die folgende: 1235, 1246, 1347, 2367, 1567, 2457, 3456; durch 1235, 1246, 1347, 2367 z. B. kann man eine ∞^3 -Involution

4. Grades definieren, und also die den Punkten 1, 2, 3 entsprechenden F-Punkte zusammen mit der entsprechenden F-Geraden. Jede Gruppe liefert so 28 Punkte, 28 Geraden und gewisse 28 Ebenen. Es entsteht eine bemerkenswerte Konfiguration, die hier untersucht wird. Die Projektion von Γ aus einem der sieben Punkte auf eine Ebene zeigt, daß die betrachtete Konfiguration mit derjenigen des Pascalschen Sechsecks eng verbunden ist. Der Konfiguration gehören auch gewisse durch Γ hindurchgehende Quadriken an.

E. Togliatti.

Spampinato, Nicoló: Sulla rappresentazione finita di elementi differenziali dell' S_r complesso. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, Ser. IV 25, 16—30 (1959).

Man findet hier verschiedene hyperräumliche Abbildungen der Linienelemente E_1 und E_2 der Ordnungen 1 und 2. — Die Linienelemente 1. Ordnung (x, u) einer Ebene können zunächst auf die Schnitt- V_3^6 der Segreschen V_4^6 : $X_{ij} = x_i u_j$ eines S_8 , durch die Hyperebene $\sum u_i x_i = 0$ abgebildet werden; oder auf die ∞^3 Geraden der Quadrik $\sum u_i x_i = 0$ des Raumes S_5 , die die zwei windschiefen Ebenen (x) und (u) treffen. — Um die Linienelemente E_1 des Raumes S_r abzubilden, kann man in einem Raume S_{2r+1} zwei windschiefe und homographische Räume S_r und S'_r wählen; den Elementen (Pr) , die im S_r von P ausgehen, kann man dann die Ebenen zuordnen, welche P mit den zu r durch die gegebene Homographie zugeordneten Geraden r' von S'_r verbinden. Man kann auch in einem Raume S_{3r+2} drei homographische Räume S_r , S'_r , S''_r wählen, und den Elementen (Pr) die Räume $Pr'\mu''$ der Dimension 4 zuordnen; usw. — Die Gruppen $Pr\mu$, wo die Ebene μ durch die Gerade r und die Gerade r durch P hindurchgehen, können auf die Räume $Pr'\mu''$ der Dimension 5 abgebildet werden. Die in $Pr\mu$ enthaltenen Elemente 2. Ordnung führen im S_{3r+2} zu einer komplizierteren Abbildung durch gewisse quadratische Kegel V_2^3 jener Räume S_5 . — Alles das ist mit verschiedenen Abbildungen im komplexen Gebiete der Systeme geeigneter hyperkomplexen Zahlen, die Verf. in anderen Arbeiten entwickelt hat, verbunden.

E. Togliatti.

Severi, Francesco: Alcune osservazioni sopra la caratterizzazione topologica delle superficie algebriche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 16, 161—169 (1957).

Vgl. die Besprechung der englischen Fassung in diesem Zbl. 57, 132.

Wallace, Andrew H.: Sheets of real analytic varieties. Canadian J. Math. 12, 51—67 (1960).

Con impostazione analoga a quella di una precedente ricerca relativa alle varietà algebriche reali (questo Zbl. 81, 378) si considerano qui le varietà analitiche reali immerse in uno spazio E_n euclideo reale, cioè i sottoinsiemi di questo spazio che, localmente, sono gli insiemi degli zeri di un numero finito di funzioni analitiche reali. Introdotta per una siffatta varietà V la nozione di dimensione locale e quindi quella di dimensione di V quale massimo delle dimensioni locali, si distinguono i punti di V in regolari (o semplici) e singolari (o non regolari) mettendo in evidenza, con un esempio appropriato, che l'insieme di questi ultimi non è necessariamente una sotto-varietà analitica di V . — Si enuncia quindi un teorema notevole concernente l'approssimazione, su V , di una curva C composta (opportunamente) con un numero finito di archi analitici mediante un unico arco analitico e, dopo alcune considerazioni generali, si fornisce una dimostrazione del teorema la quale richiede sviluppi laboriosi e talora delicati. Si traggono quindi numerose conseguenze, e si confrontano altresì singoli risultati con quelli della ricerca precedente.

V. E. Galafassi.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Mihailovič, D.:** Elemente der Vektoranalysis, der Differentialgeometrie und der Feldtheorie. [Elementi vektorske analize diferencijalne geometrije i teorije polja.] (Matematička Biblioteka. 15.) Beograd: Zavod za Izdavanje Udžbenika. Narodne Republike Srbije 1960. 182 S. 300 Dinara [Serbo-kroatisch].

Es handelt sich um eine Ergänzung zu dem einführenden Lehrbuch „Elemente der Vektoralgebra und analytische Geometrie im Raume“ (dies. Zbl. 88, 134). Es enthält den Stoff, der programmäßig für die technischen Fakultäten vorgesehen ist.

Singh, H. D.: The second extension of a covariant differentiation process. *Rivista Mat. Univ. Parma* 8, 397—404 (1957).

Suppose the components of a tensor $T_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ to be functions of n variables x^α and their derivatives $x'^\alpha, x''^\alpha, \dots, x^{(m)\alpha}$ with respect to the parameter; the author (this Zbl. 82, 149) has introduced a covariant differentiation process in obtaining a tensor of one higher covariant order. The present paper deals with a second extension of the process. Besides the notations such as $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \gamma \end{smallmatrix} \right\}, T^{*\beta}_{\gamma}, \left| \begin{smallmatrix} \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right|$ and $A_{\alpha\gamma}^\beta$ adopted in the former paper the following are utilized:

$$Q^\beta(x, x', x'', x''') = x'''^\beta + T^{*\alpha}_{\gamma} \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} + T^{*\beta}_{x^\delta} x'^\delta + T^{*\beta}_{x^\delta} x''^\delta, \\ \left| \begin{smallmatrix} \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right| = Q_{x^\gamma}^\beta - Q_{x'^\alpha}^\beta \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \end{smallmatrix} \right\} \cdot Q_{x'^\alpha}^\beta \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \end{smallmatrix} \right\} + Q^\alpha A_{\alpha\gamma}^\beta.$$

The process is then defined as

$$T_{\gamma \dots}^{\alpha \dots} x^{(m-3)\beta} - (m-2) T_{\gamma \dots}^{\alpha \dots} x^{(m-2)\delta} \left\{ \begin{smallmatrix} \delta \\ \beta \end{smallmatrix} \right\} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} T_{\gamma \dots}^{\alpha \dots} x^{(m-1)\delta} \left| \begin{smallmatrix} \delta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right| \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} T_{\gamma \dots}^{\alpha \dots} x^{(m)\delta} \left| \begin{smallmatrix} \delta \\ \beta \end{smallmatrix} \right| \quad (m \geq 4). \quad \text{Su Buchin.}$$

Müller, Hans Robert: Zur Kinematik der ebenen affin-veränderlichen Felder. *Math.-Nachr.* 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband 136—160 (1958).

Eine affine Transformation der Ebene hängt von 6 Koeffizienten ab, sie kann in der Form $x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_1, x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_2$ oder mit Matrizen in der Form $\xi' = \mathfrak{C}\xi + \mathfrak{c}$ geschrieben werden. Sonderfälle ergeben sich für $c_{11} = c_{22}, c_{21} = -c_{12}$ (Ähnlichkeiten) und für $c_{11} = c_{22} = \cos \gamma, c_{21} = -c_{12} = \sin \gamma$ (Bewegungen). Für $c_{jk} = c_{jk}(t), c_i = c_i(t)$ kommen einparametrische (A_I) Affinitätsvorgänge und für $c_{jk} = c_{jk}(u, v), c_i = c_i(u, v)$ zweiparametrische (A_{II}) Affinitätsvorgänge heraus. Bei den A_I kommen, wenn wir ξ in der Gangebene ε, ξ' in der Rastebene ε' annehmen, wie bei den Bewegungen Pole und Polbahnen heraus, die aufeinander abrollen ohne zu gleiten. Bei den A_{II} wird durch $u(t), v(t)$ eine A_I herausgehoben, wobei zu $du = \dot{u} dt, dv = \dot{v} dt$ die Pole gehören. Halten wir u, v fest und ändern wir $du:dv$, dann ist der Ort der zu den verschiedenen Richtungen durch u, v gehörigen Pole in ε und in ε' je ein Kegelschnitt, der bei den Ähnlichkeiten zu einem Kreis, bei den Bewegungen zu einer Geraden (Polachse) wird. Zur Ausrechnung werden alternierende Differentialformen herangezogen. Ein zweiter Weg geht von der Überlegung aus, daß ein Punkt ξ der Gangebene bei A_{II} im allgemeinen in der Rastebene ein Flächenelement beschreibt. Der vorher erhaltene Kegelschnitt bei gegebenem u, v ist der Ort der Punkte der Gangebene, bei denen das Flächenelement den Inhalt null hat (kurvenläufige Punkte der Gangebene). H. Schatz.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Eisenhart, Luther Pfahler:** A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1909. New York: Dover Publications, Inc. 1960. XIV, 474 p. \$ 2.75.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. des Werkes in *J.-buch Fortschr. Math.* 40 (1909), 657.

Stavroulakis, Nicias: Points de rebroussement des surfaces et théorème de Gauss-Bonnet. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1112—1114 (1957).

Es wird eine Erweiterung des Theorems von Gauß-Bonnet für Flächen gegeben, welche Rückkehrpunkte (points de rebroussement) haben. Ein Rückkehr-

punkt ist ein Punkt O der Fläche, in dem alle Flächenkurven, die in O enden, eine gemeinsame Halbtangente OT haben. Unter Benutzung einer geeigneten Darstellung der Fläche werden die Ortsvektoren in der Umgebung von O nach Potenzen von u in eine Reihe entwickelt, welche die Form $\bar{x}(u, v) = u \bar{r} + u^{r+1} s(u, v)$ (r Einheitsvektor in Richtung OT , s senkrecht zu \bar{r}) erhält. Nach Ausrechnung der Fundamentalgrößen erster und zweiter Art kommt die Formel $\int_F \frac{ds}{R_g} + \iint_A K dS = 0$ heraus

(Γ ist eine geschlossene Kurve um O und A der umschlossene Bereich). Als Beispiel wird eine einfache Drehfläche konstruiert und darauf die gewonnene Formel angewendet.
H. Schatz.

Delande, Georges: Sur une extension des surfaces minimales adjointes d'Ossian Bonnet. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 49—51 (1960).

Certains résultats de L. Koschmieder (ce Zbl. **13**, 417) relatifs à l'extension du théorème d'O. Bonnet dans E_4 , peuvent s'interpréter dans la technique des champs géodésiques. Toutefois, contraire à ce que semble affirmer l'A., ces résultats sont essentiellement de caractère local.
Th. Lepage.

Kurita, Minoru: A note on umbilics of a closed surface. Nagoya math. J. **15**, 219—223 (1959).

Verf. beweist mit differentialgeometrischen Methoden triviale topologische Sätze über den Index der Krümmungslinien an Nabelpunkten einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes.
K. Leichtweiß.

Drăgîlă, Pavel: Sur les couples de surfaces harmoniques conjuguées. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **45**, 726—733 (1959).

Wie schon M. Vincensini bemerkte, sind die beiden „konjugierten harmonischen“ Flächen $S: x = u, y = v, z = P(u, v)$ und $\bar{S}: x = v, y = -u, z = Q(u, v)$ (P und Q = konjugierte harmonische Funktionen) des dreidimensionalen euklidischen Raumes durch parallele Normalen aufeinander bezogen. Verf. zeigt, daß darüber hinaus die Parameterkurven von S und \bar{S} im Sinne einer früher von ihm angegebenen Definition „quasiparallel“ sind (P. Drăgîlă; dies. Zbl. **89**, 378), und schließt daran verschiedene Bemerkungen über die Beziehung gewisser einander entsprechender Kurvenscharen auf S und \bar{S} und über die Kongruenz der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von S und \bar{S} .
K. Leichtweiß.

Grotemeyer, K. P.: Zur Flächentheorie im Großen. I: Über die Abbildung durch parallele Normalen. II: Einfache Bemerkungen zur Poincaréschen Indexmethode. III: Flächenstücke mit Kanten. Arch. der Math. **9**, Festschrift Hellmuth Kneser, 117—122, 382—388 (1958); **10**, 216—220 (1959).

I. Es wird eine für $U > 0$, $U^2 \geq 4V > 0$ definierte stetige Funktion $F(U, V)$ betrachtet, die in beiden Variablen gleichsinnig monoton ist, und zwei Flächen im Raum mit positiver Gaußscher Krümmung, die durch parallele Normalen aufeinander bezogen sind, und bei denen $F(R_1 + R_2, R_1 R_2)$ in Punkt und Bildpunkt denselben Wert hat (R_i = Hauptkrümmungsradien). Aus Sätzen von A. D. Aleksandrov [neuere Darstellung z. B. in Vestnik Leningradsk. Univ. **11**, Nr. 19, 5—17 (1956)] folgt, daß sich zwei derartige geschlossene Flächen nur um eine Translation unterscheiden. Verf. betrachtet das Problem im Falle von Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, die als einfach zusammenhängend und beschränkt angenommen werden. Mit Hilfe einer einfachen Integralformel wird gezeigt: Wenn die Randkurven translationsgleich sind, so sind auch die Flächen translationsgleich.—II. Auf einem Flächenstück sei ein symmetrischer Tensor L_{ij} gegeben, dessen Ableitungen den Codazzischen Gleichungen genügen. Ferner existiere ein symmetrischer positiv definiter Tensor S^{ij} mit $S^{ij} L_{ij} = 0$. Unter Heranziehung der Theorie ver-

allgemeinerter Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungssysteme wird gezeigt: Entweder ist $L_{ij} \equiv 0$; oder die Nullstellen von L_{ij} sind isoliert, und der Index einer Singularität des Kurvennetzes $L_{ij} du^i du^j = 0$ ist negativ. Auf der Kugel folgt aus der Poincaréschen Indexsummenformel $L_{ij} \equiv 0$. Durch Spezialisierung von S^2 , L_{ij} erhält man (1) den Cohn-Vossenschen Beweis des Kongruenzsatzes für isometrische Eiflächen, (2) den Beweis von H. Hopf, daß unter allen Flächen vom topologischen Typ der Kugel die Kugeln die einzigen geschlossenen Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind, (3) die infinitesimale Starrheit der Eiflächen. Im letzten Fall sind die Nullstellen von L_{ij} die Singularitäten der vom Drehvektor der infinitesimalen Verbiegung beschriebenen Fläche. — III. Verf. betrachtet im Raum orientierte stückweise differenzierbare Flächenstücke mit Kanten. Für zwei isometrische Flächen mit Rand gilt die Integralformel von Herglotz (in symmetrischer Form). Es wird gezeigt, daß sich die Beiträge der Kanten zum Randintegral wegheben, vorausgesetzt, daß in entsprechenden Punkten die Kantenwinkel (einschließlich Vorzeichen) gleich sind. Entsprechendes gilt bei infinitesimaler Verbiegung mit stationären Kantenwinkeln für die Integralformel von Weyl und Blaschke, sowie für die Integralformel für das Minkowski-Problem (Gaußsche Krümmung als Funktion der Normalenrichtung). Daher bleiben alle Kongruenz- bzw. Starrheitssätze gültig, die sich mit den genannten Integralformeln beweisen lassen, wenn man Flächen mit Kanten, aber gleichen bzw. stationären Kantenwinkeln zuläßt.

K. Voss.

Hartman, Philip: Remarks on a uniqueness theorem for closed surfaces. *Math. Ann.* **133**, 426—430 (1957).

In der vorliegenden Arbeit wird in dem, die Parallelabbildung T zwischen zwei orientierten, geschlossenen Flächen F und F betreffenden „Translationssatz“ von K. Voss (dies. Zbl. **73**, 384) die Voraussetzung der Analytizität von F , F und T durch die folgenden schwächeren Voraussetzungen ersetzt: a) F und F sind zweimal stetig differenzierbar, b) in den Punkten, in denen F von einer Parallelen zu dem zu T gehörenden Einheitsvektor e berührt wird, ist e nicht Asymptotenrichtung, c) die durch $en = 0$ (n = Einheitsnormalenvektor von F) auf F definierten Kurven sind zweimal stetig differenzierbar. Dies gelingt Verf. durch Anwendung des zuvor (nach einer Methode von E. Hopf) bewiesenen Maximumprinzips für die Lösungen einer gewissen „singulären“ elliptischen Differentialgleichung. K. Leichtweiß.

Belov, K. M.: Unique definition of positive curvature surfaces having a boundary. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **127**, 239—241 (1959) [Russisch].

L'A. donne la résolution de quelques problèmes relatifs à la détermination unique des surfaces à courbure constante à frontière. Il démontre par ex. que, deux surfaces isométriques à courbure positive, qui ont aux points correspondants de la frontière soit la même torsion géodésique, soit la même différence de la courbure normale et de la courbure moyenne, sont congruentes ou symétriques. Il s'occupe ensuite des cas particuliers de ce théorème.

K. Svoboda.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires. *Bull. Soc. math. Belgique* **10**, 79—88 (1958).

Una superficie (x) determina due sistemi di rigate asintotiche, luoghi di tangenti alle asintotiche di una famiglia nei punti di un'asintotica dell'altra famiglia. L'A. considera qui il caso che le rigate di entrambi i sistemi appartengano a complessi lineari, e, ricorrendo all'interpretazione sulla quadrica di Klein, associa a ciascun punto x una quadrica Φ_2 le cui schiere appartengono rispettivamente ai complessi lineari che contengono le rigate dei due sistemi: le direttrici di Wilczynski di 2^a specie generano allora delle congruenze W trasformate una nell'altra dalla polarità rispetto a Φ_2 .

P. Buzano.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Ryžkov, V. V.: Die affine tangentielle Verbiegung von Flächen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 193—200 (1957) [Russisch].

Soient $x = x(u^i)$, $y = y(u^i)$, $i = 1, \dots, n$, deux variétés en correspondance à n dimensions plongées dans l'espace affine E_N . Alors on peut parler (au sens d'E. Cartan) de la déformation ponctuelle (p.) ou tangentielle (t.) ou encore ponctuellement-tangentielle (p.-t.) d'ordre k de deux variétés, cette déformation étant réalisée par le système des transformations affines (*) $\xi \rightarrow A\xi + b$. On dit que la variété x possède un système conjugué complet si dans chaque espace tangent E_n on a deux p - et $(n-p)$ -directions E_p , E_{n-p} telles que $d_{E_p} d_{E_{n-p}} x$ soit vecteur d' E_n (d_{E_i} étant une différentiation arbitraire dans la direction d' E_i). On démontre: 1. Les variétés qui admettent une déformation t. qui n'est pas une déformation p.-t. [cette déformation étant réalisée par les mêmes affinités (*)] que la déformation t. ou par les affinités normalisées $(\frac{*}{*}) A_1 = [1/(1+\lambda)]A$, $b_1 = (b + \lambda y)/(1 + \lambda)$, possèdent les systèmes conjugués complets. 2. Si la dimension d'espace osculateur de la variété x est $\rho \geq \frac{1}{2}n(n+1) + 2$, alors leurs déformations t. sont au même temps déformations p.-t. ($k > 1$) ou peuvent être réalisées par $(\frac{*}{*})$ ($k = 1$). 3. Deux variétés en déformation t. d'ordre k sont en déformation p. du même ordre. Enfin on donne l'exemple des variétés en correspondance qui est déformation t. et p. d'ordre k mais elle n'est pas une déformation p.-t. d'ordre k (k arbitraire). A. Švec.

Karapetjan (Karapetian), S. E.: Second order Lie surface for ruled surfaces of congruence. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 177—179 (1957) [Russisch].

Verf. betrachtet eine Geradenkongruenz im 3-dimensionalen projektiven Raum und die derselben zugeordnete Tetraederschar 1. Ordnung, welche durch $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^3 = 0$ bestimmt wird, wobei $dA_i = \omega_i^k A_k$ ($i, k, j = 1, 2, 3, 4$) die Ableitungsgleichungen einer Tetraederschar sind; das Tetraeder ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $A_1 A_2$ ist die Kongruenzgerade. Für eine durch $\omega_2^4 = \lambda \omega_1^3$ definierte Regelschar der Kongruenz findet Verf. die Gleichung der zugeordneten Lieschen Flächen; sie lautet

$$2\lambda(x^1 x^4 - \lambda x^2 x^3) - \lambda(\lambda_1 + \lambda \lambda_2) x^3 x^4 + (\lambda^2 \alpha' - 2\lambda \beta' - \gamma') x^4 x^4 + \\ + \lambda(\lambda^2 \gamma + 2\lambda \beta - \alpha) x^3 x^3 = 0.$$

Die Größen α, \dots, λ_2 darin werden durch

$$\omega_4^3 = \alpha \omega_1^3 - \beta \omega_2^4, \quad \omega_1^2 = \beta \omega_1^3 + \gamma \omega_2^4, \quad \omega_2^1 = \gamma' \omega_1^3 + \beta' \omega_2^4, \\ \omega_4^3 = -\beta' \omega_1^3 + \alpha' \omega_2^4, \quad d \log \lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1 \omega_1^3 + \lambda_2 \omega_2^4$$

bestimmt. Verf. beweist einige Sätze über die Liesche Fläche, darunter: 1. Die Lieschen Flächen zweier Regelscharen der Kongruenz besitzen genau dann eine von der Kongruenzgeraden verschiedene gemeinsame Gerade, wenn die Kongruenz eine W -Kongruenz ist. 2. Die Lieschen Regelscharen, welche allen durch eine Kongruenzgerade hindurchgehenden Regelscharen der Kongruenz entsprechen, liegen genau dann in einem linearen Geradenkomplex, wenn die Kongruenz eine W -Kongruenz ist.

B. Petkantschin.

Švec, Alois: Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective. Czechosl. math. J. 7 (82), 96—114 (1957).

Betrachtet wird eine vierfache Mannigfaltigkeit von projektiven Räumen $S_3(z)$, die den Punkten $z = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ eines E_4 entsprechen, durch die Punkte $A_i(z)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) mit $[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1$ aufgespannt und in denen die Geraden $p = p(z) = [A_1 A_2]$ ausgezeichnet sind. In den Gleichungen (*) $dA_i = \omega_{ij} A_j$ (mit $\sum \omega_{ii} = 0$) seien die ω_{ij} in jedem $S_3(z)$ Pfaffsche Formen in den Differentialen du_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Dann stellen die Gleichungen $u_i = u_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) in E_4 einen Kurvenbogen γ dar, der die Punkte z_0 ($t = 0$) und z_1 ($t = 1$) verbindet. Setzt man $\omega_{ij} = p_{ij} dt$, so erhält man aus (*) das Differentialsystem $dA_i/dt = p_{ij} A_j$, dessen

Lösung jedem zu $t = 0$ gewählten Quadrupel $A_i(0)$ von Anfangspunkten in $R_3(0)$ ein bestimmtes System von Punkten $A_i(t)$ bzw. $A_i(1)$ in $R_3(z)$ bzw. $R_3(1)$ zuordnet. Die Beziehungen $A_i(0) \rightarrow A_i(t) \rightarrow A_i(1)$ zwischen den Räumen $R_3(0) \rightarrow R_3(z) \rightarrow R_3(1)$ sind dann Projektivitäten und kennzeichnen den der Arbeit zugrunde liegenden projektiven Zusammenhang der Räume $S_3(z)$. Es gelten dabei die Integrabilitätsbedingungen

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{ik} \omega_{kj}] + R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu} [\omega_{\alpha\mu} \omega_{\beta\nu}] \quad (k = 1, 2, 3, 4; \alpha, \beta = 1, 2; \mu, \nu = 3, 4).$$

Die Arbeit befaßt sich mit den von den Geraden $[A_1 A_2]$ erzeugten Strahlkongruenzen der Geradenräume $R_3(z)$ mit projektivem Zusammenhang, wobei $u_i = u_i(v_1, v_2)$ gesetzt wird. Es werden die Bedingungen für seine planaren Kongruenzen (bei denen jeder Punkt der Erzeugenden $[A_1 A_2]$ Brennpunkt ist) hergeleitet, dann für seine parabolischen Kongruenzen (mit nur einem Brennpunkt A_1 auf $[A_1 A_2]$). Bei diesen erzeugen die Brennpunkte mit ihren Räumen S_3 durch den projektiven Zusammenhang des Linienraumes eine Mannigfaltigkeit der zuerst von R. König studierten Art [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 28, 213—228 (1919)], die als Fokalfläche bezeichnet wird. Die Theorie der nicht parabolischen Kongruenzen (mit zwei verschiedenen Brennpunkten auf den Kongruenzstrahlen) führt dann auf eine Reihe grundlegender Invarianten der Kongruenz, für die geometrische Deutungen gegeben werden. Zur weiteren Untersuchung wird schließlich der Begriff der projektiven Deformation zweiter Ordnung der Geradenkongruenzen eingeführt, der sich als sehr fruchtbar erweist und durch einfache Formeln beschreiben läßt und von dem auch noch eine Verallgemeinerung (schwache projektive Verbiegbarkeit zweier Linienkongruenzen) angedeutet wird.

K. Strubecker.

Švec, Alois: Remarques sur la théorie des déformations des congruences des droites. Czechosl. math. J. 7 (82), 66—72, (1957).

Die Note schließt an eine Arbeit von E. Čech (vgl. dies. Zbl. 89, 377) an, in der drei verschiedene Arten der Korrespondenz zwischen zwei Geradenkongruenzen, nämlich ihre fokale, punktuelle und planare Deformation, eingeführt wurden. Hauptsächliches Studienobjekt ist dabei die lineare Approximation dieser Korrespondenzen in entsprechenden Strahlenpaaren durch Projektivitäten. — In der vorliegenden Note wird zuerst eine Kennzeichnung der planaren Deformationen von Geradenkongruenzen eines projektiven Punktraumes gegeben. Anschließend wird eine neue Charakterisierung dieser Deformationen dargelegt. K. Strubecker.

Švec, Alois: Certaines enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5 . Czechosl. math. J. 7 (82), 57—65 (1957).

Gli involuipi di cui trattasi non sono altro che deformazioni puntuali di complessi di piani per cui i fuochi di ciascun piano formano i lati di un triangolo: una deformazione puntuale fra due siffatti complessi K, K' è una corrispondenza che associa a ogni piano π di K un piano π' di K' di modo che si corrispondano le V_3 sviluppabili e inoltre sia subordinata da una corrispondenza puntuale fra gli spazi ambienti tale che se una curva γ uscente da un punto A di π ha per omologa una curva γ' uscente da un punto A' di π' , esiste un'omografia $H(\pi)$ la quale muta γ in una curva avente con γ' in A' un contatto analitico del 1° ordine. I complessi K' che sono in deformazione puntuale con un dato K sono determinati da un sistema di equazioni la cui soluzione generale dipende da 18 funzioni di una variabile.

P. Buzano.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Schröder, K.: Riemanns Habilitationsvortrag und seine Auswirkungen in Mathematik und Physik — ein historischer Überblick. Begriff des Raumes in der Geometrie, Ber. Riemann-Tagung Forsch.-Inst. Math., 14—26 (1957).

In dieser Arbeit wird die Bedeutung des Habilitationsvortrages „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ und in direkter Verbindung damit

eines Abschnittes in der in Latein verfaßten Abhandlung „*Commentatio mathematica . . .*“ von Riemann für die weitere Entwicklung vieler Gebiete der Mathematik richtig eingeschätzt und geziemend gewürdigt. Aus den Darlegungen ersieht man, daß es sich z. B. bei Riemann nicht etwa nur um eine Verallgemeinerung Gaußscher Gedanken über die Flächentheorie handelt, sondern um eine tiefgehende Begründung des Raumbegriffes im allgemeinen, die sich für viele Gebiete der Mathematik und besonders ihrer Anwendungen als sehr fruchtbar erwiesen hat. Um diesen Tatsachenbestand zu begründen, hat der Verf. zuerst die Kernpunkte der Riemannschen Gedanken betont, um dann zu zeigen, wie diese Entwicklung die Tensorrechnung und Relativitätstheorie ebenso wie auch Weyl's und Finsler's Verallgemeinerungen der Riemannschen Geometrie beeinflußt hat. Obwohl die Größe des Riemannschen Beitrags in der Mathematik im allgemeinen und auf diesem Gebiete besonders wohl jedem Mathematiker geläufig sein muß, hat es der Verf. verstanden, eine fesselnde Darstellung zu geben, die das Ganze der Riemannschen Leistung einheitlich erhellt.

T. P. Angelitch.

Vitner, Čestmír: Außergewöhnliche Punkte auf Kurven in Riemannschen Räumen. Časopis Mat. 84, 433—450, russ. und deutsche Zusammenfassung 450—453 (1959) [Tschechisch].

Unter einem außergewöhnlichen Punkt einer analytischen Kurve $M(t)$ des n -dimensionalen Riemannschen Raumes versteht man einen solchen Punkt, in welchem die absoluten Ableitungen $DM/dt, \dots, D^n M/dt^n$ linear abhängig sind. In dem außergewöhnlichen Punkt sind die Krümmungen κ_i ($i = 1, \dots, n-1$) und die Normalen e_i ($i = 0, \dots, n-1$) der Kurve als rechtsseitige Grenzwerte der gewöhnlichen Krümmungen und Normalen definiert. Wenn $D^{\alpha_1} M/dt^{\alpha_1}$ die erste von Null verschiedene absolute Ableitung im außergewöhnlichen Punkt $t = 0$ ist, so kann man ein System von Zahlen α_i ($i = 1, \dots, n$) definieren derart, daß α_i die kleinste Zahl von der Beschaffenheit bezeichnet, daß die Vektoren $D^{\alpha_1} M/dt^{\alpha_1}, \dots, D^{\alpha_n} M/dt^{\alpha_n}$ für $t = 0$ linear unabhängig sind. Mit deren Hilfe werden die Ergebnisse von W. Blaschke [Math. Z. 6, 94—99 (1920)] für den erwähnten Fall der Krümmungen und Normalen einer analytischen Kurve des Riemannschen Raumes verallgemeinert. Es werden weiter die Frenetschen Formeln für einen außergewöhnlichen Punkt mit endlichen Krümmungen hergeleitet und die Entwicklung der Kurve in der Umgebung eines solchen Punktes nach Potenzen von s^{1/α_1} , wo s die Bogenlänge bedeutet, gegeben. Für die Krümmungen gilt folgende Formel $\kappa_k = \lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\omega_k}{s - s_0}$, wo ω_k der Winkel des k -ten Schmiegrumes $\{e_0, \dots, e_{k-1}\}$ im Punkte $M(s_0)$ mit der $(k-1)_\perp$ -ten Normalen e_{k-1} im Punkte $M(s)$ bedeutet.

K. Svoboda.

Sumitomo, Takeshi: Projective and conformal transformations in compact Riemannian manifolds. Tensor. n. Ser. 9, 113—135 (1959).

Der Hauptgegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der projektiven und konformen Transformationen einer Ricci-symmetrischen Mannigfaltigkeit M , d. h., einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, für die die kovariante Ableitung des Ricci-Tensors verschwindet. Zu diesen Mannigfaltigkeiten gehören natürlich die symmetrischen, ferner aber auch die Einsteinschen Mannigfaltigkeiten. Letztere waren schon in einer früheren Arbeit des Verf. untersucht worden (dies. Zbl. 73, 172). Bezeichne mit $I(M)$, $A(M)$, $H(M)$, $P(M)$, $C(M)$ beziehungsweise die Gruppe der isometrischen, affinen, homothetischen, projektiven und konformen Transformationen M . Der Index 0 bezeichne die mit der Identität zusammenhängende Komponente dieser Gruppen. Nach einer Zusammenstellung bekannter Ergebnisse werden in § 3 die projektiven Transformationen betrachtet: Theorem 3.1: Eine symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit M hat konstante Krümmung [Krümmung ist hier stets verstanden als die (2-dimensionale) Riemannsche Krümmung], oder $P_0(M)$ enthält keine eigentlich projektiven Transformationen. Theorem 3.2: Eine kom-

pakte Ricci-symmetrische Mannigfaltigkeit M ist Einsteinsch oder $P_0(M) = I_0(M)$. Wenn man von M nicht fordert, daß es kompakt ist, kann man nur schließen: $P_0(M) = A_0(M)$. In § 4 werden die konformen Transformationen untersucht. Die ersten drei Theoreme dienen zur Vorbereitung: Theorem 4. 1: Eine lokal homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit M ist lokal euklidisch oder $H_0(M)$ enthält keine eigentlich homothetischen Transformationen. Theorem 4. 2: Eine symmetrische Mannigfaltigkeit M hat verschwindenden Ricci-Tensor oder $H_0(M)$ enthält keine eigentlich homothetischen Transformationen. Theorem 4. 3: Eine lokal homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Dimension ≥ 4 ist konform Euklidisch oder $H_0(M)$ enthält keine eigentlich homothetischen Transformationen. Hieraus wird das Hauptresultat der Arbeit hergeleitet, Theorem 4. 4 und 4. 5: Eine kompakte Ricci-symmetrische Mannigfaltigkeit M ist Einsteinsch mit positiver Skalkrümmung, oder $C_0(M) = I_0(M)$. Falls M insbesondere symmetrisch ist, so hat M konstante Krümmung oder $C_0(M) = I_0(M)$ und gleichzeitig ist M weder Einsteinsch noch konform Euklidisch. Da nach einem wichtigen Resultat von Yano und Naganô (dies. Zbl. 88, 142) in einer vollständigen Einstein-Mannigfaltigkeit M $C_0(M)$ keine eigentlich konformen Transformationen enthält, es sei denn, M hat konstante Krümmung, so ergibt sich hieraus das interessante Resultat, Theorem 4. 6.: Eine kompakte Ricci-symmetrische Mannigfaltigkeit M hat konstante Krümmung, oder $C_0(M) = I_0(M)$. In § 5 wird gezeigt, daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen den charakteristischen Wurzeln des Ricci-Tensors und der Existenz eigentlich konformer Transformationen. Ausgangspunkt ist das folgende Lemma: Sei M Ricci-symmetrisch, konform Euklidisch und $\dim M \geq 4$. Dann hat der Ricci-Tensor nur zwei Eigenwerte, und zwar die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda R(n-1)^{-1} - (R^{ij} R_{ij} - R^2(n-1)^{-1})n^{-1} = 0.$$

Hiermit wird eine Reihe von Ergebnissen über symmetrische Räume hergeleitet, von denen wir nur erwähnen Theorem 5. 4: Wenn M symmetrisch ist und der Ricci-Tensor positiv oder negativ definit, dann hat M konstante Krümmung oder $C(M) = I(M)$. Es erscheint dem Ref., daß ein Teil der Ergebnisse noch an Bedeutung gewinnen würden, wenn man sie kombinierte mit der von Cartan stammenden Klassifizierung der vollständigen symmetrischen Räume und damit dann untersucht, welche symmetrischen Räume den Voraussetzungen der verschiedenen Theoreme, etwa dem zuletzt genannten Theorem 5. 4, genügen.

W. Klingenberg.

Morrey jr., Charles B.: The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 68, 159—201 (1958).

L'A. démontre que toute variété analytique réelle compacte peut être analytiquement plongée comme sous-variété analytique réelle d'un espace euclidien; il utilise des méthodes de géométrie différentielle et de théorie des équations aux dérivées partielles.

F. Norguet.

Wu, Guang-lei: On n -manifolds in Euclidean $2n$ -space. Science Record, n. Ser. 1, Nr. 1, 35—36 (1957).

Im Anschluß an H. Whitney [Ann. of Math., II. Ser. 45, 220—246 (1944)] wird eine vollständig reguläre Abbildung f der geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit M^n in den Euklidischen Raum E^{2n} betrachtet. Zu $f(M)$ gehört einerseits eine Selbstschnittzahl I_f und ein Abbildungsgrad $d = 2I_f$, bzw. $= 0$ für gerades bzw. ungerades n , andererseits eine n -dimensionale charakteristische Cohomologieklassse W^n im Normalenbündel. Verf. führt eine vom Punkt P auf $f(M)$ und von der Tangentialrichtung abhängige Determinante Δ ein und bildet durch Integration von Δ bzw. $|\Delta|$ über die Richtungssphäre in P Differentialinvarianten H bzw. H^* . Dann werden ohne Beweis folgende Aussagen formuliert: 1. Das Integral von $H dV$ über M ist gleich σd [dV = Volumenelement von $f(M)$; σ = Volumen der $(2n-1)$ -Sphäre]. Im Falle von H^* besteht ein Zusammenhang mit der Anzahl I_p der Tangential-

räume parallel zu einem Vektor v des E^{2n} . 2. Ausrechnung von H ergibt für die Differentialform $\sigma^{-1} H dV$ einen expliziten Ausdruck θ . 3. θ repräsentiert die charakteristische Klasse W^n . θ und der Zusammenhang mit W^n wurden bereits von S. S. Chern [Ann. of Math., II. Ser. 46, 674—684 (1945); dies. Zbl. 60, 381] angegeben. K. Voss.

Bucur, I.: Une nouvelle démonstration des formules de dualité des classes de Chern. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 419—422 (1957).

The proof given here that the two definitions of Chern classes (as obstructions, c_{2i} , and as symmetric functions, C_{2i}) coincide, does not make use of the duality formula for the c_{2i} , in contrast to the procedure of A. Borel and J.-P. Serre (this Zbl. 50, 396). It is first shown that the c_{2i} agree with the C_{2i} , up to sign. By considering products of complex manifolds and the Euler characteristic, one shows inductively that $c_{2n} = C_{2n}$ for $U(n)$ -bundles. Using this one shows $c_{2i} = C_{2i}$ for the complex projective spaces, and therefore generally. The duality formula for the c_{2i} follows.

H. Samelson (M. R. 20, 4267).

Kobayashi, Shoshichi: Remarks on complex contact manifolds. Proc. Amer. math. Soc. 10, 164—167 (1959).

L'A. définit la notion de variété de contact complexe, et pour une telle variété M de dimension complexe $2n + 1$, prouve que: i. le groupe de structure du fibré tangent peut être réduit à $U(1) \times (Sp(n) \otimes U(1))$; ii. la classe de Chern de M vérifie une certaine propriété de divisibilité; iii. il existe un fibré principal sur M , avec le groupe de structure $U(1)$, qui est une variété de contact réelle. Les espaces projectifs complexes de dimension complexe impaire, les fibrés projectifs co-tangents des variétés complexes, sont des exemples de variétés de contact complexes. F. Norquet.

Morimoto, Akihiko: Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes. Nagoya math. J. 15, 83—154 (1959).

L'A. démontre d'abord que si un espace fibré holomorphe, ayant pour base un tore T^n et pour fibre C^m , possède une connexion holomorphe, il possède nécessairement une connexion holomorphe intégrable. En utilisant ce théorème et un résultat d'Atiyah, il donne une classification complète des espaces fibrés vectoriels holomorphes admettant des connexions holomorphes sur un tore complexe, lorsque la fibre est de dimension 3 ou 4. Cette classification est basée sur la notion de longueur d'un tel espace fibré, cette longueur pouvant être considérée comme une obstruction analytique. Enfin, l'A. considère des espaces fibrés dont la fibre est de dimension quelconque, et fait quelques remarques sur la classification des espaces fibrés qui n'admettent pas nécessairement une connexion holomorphe. F. Norquet.

Rizza, G. B.: Sulla curvatura delle faccette di una varietà kähleriana. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 47, 81—90 (1959).

Le principal résultat de ce travail est une formule permettant de calculer la courbure d'une facette non caractéristique d'une variété kählérienne en fonction de la courbure ordinaire et de la courbure mixte des facettes caractéristiques d'un système canoniquement associé à la facette considérée; une seconde expression est donnée, dans laquelle interviennent seulement les courbures de quatre facettes caractéristiques du système. L'A. examine plusieurs cas particuliers, et retrouve deux théorèmes de S. Bochner. F. Norquet.

Rizza, G. B.: Alcune disuguaglianze per i numeri di Betti di una varietà kähleriana. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 18, 414—425 (1960).

The multiplicative relations in the theory of harmonic forms of Kähler manifolds are used to derive estimates of the Betti numbers. (Most of the results are

contained in the reviewer's paper, cf. this Zbl. 57, 74). These relations are then inverted to get estimates of the maximal numbers of harmonic vector fields on a Kähler manifold. *H. Guggenheimer.*

Hirzebruch, F. and K. Kodaira: On the complex projective spaces. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 36, 201—216 (1957).

Soit X une variété kählérienne compacte, de dimension complexe n , C^∞ -difféomorphe à l'espace projectif complexe P_n muni de sa structure usuelle. Si n est impair, les AA. montrent que X est homéomorphe à P_n , au sens analytique-complexe. Si n est pair, le théorème est prouvé, moyennant l'hypothèse supplémentaire que la première classe de Chern X soit positive. *F. Norquet.*

Yano, Kentaro: Sur un théorème de M. Matsushima. *Nagoya math. J.* 12, 147—150 (1957).

Two proofs are given for the theorem: A contravariant analytic vector on a compact Einstein-Kähler manifold of positive curvature has a unique decomposition $u = v + Fw$, where v and w are Killing vectors and F is the complex tensor. ($F^2 = -\text{identity}$). *H. Guggenheimer.*

Tachibana, Shun-ichi: On almost-analytic vectors in almost-kählerian manifolds. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 11, 247—265 (1959); Correction. *Ibid.* 12, 479 (1960).

The author's almost kählerian manifolds are the symplectic manifolds of Ch. Ehresmann. The author derives formulae of covariant differentiation on those manifolds along the lines of Yano in his investigations on Curvature and Betti Numbers. These formulae are then applied to properties of closed almost kählerian manifolds. As a result one obtains characterizations of Killing vector fields and certain generalizations of analytic fields by differentiation properties involving curvature, as in the Yano theorems. It is also shown that the Lichnérowicz decomposition theorem on the splitting of the algebra of analytic vectors carries over to almost kählerian structures. [Some of the theorems of sections 3 and 4 of this paper have been given by the reviewer, cf. this Zbl. 57, 74.] *H. Guggenheimer.*

Ishihara, Shigeru: Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 9, 273—297 (1957).

In this paper are studied infinitesimal transformations of almost complex manifolds that conserve "holomorphic" planes. Most results state that this invariance and an additional property (Kähler structure, quaternion structure etc.) imply constancy of some curvature, or even its vanishing. In a second part, the group of such transformations is studied in its connection with the holonomy group of the symmetric almost complex connection, or of half-symmetric connections. The most important results state that "in general" the dimension of that group cannot be too big. The exceptional case is explicitly stated in each case. There are no examples given. *H. Guggenheimer.*

Srinivasacharyulu, Kilambi: Sur certaines familles différentiables de G -structures. *C. r. Acad. Sci., Paris* 250, 1171—1173 (1960).

Several theorems on G -structures (cf. C. Ehresmann, this Zbl. 46, 407) are announced. The exterior differential d is defined connected with the fibre structure, together pure components d' and d'' . A family of quasi-product structures is said to be integrable if $d'd'' = 0$. A quasi Kähler structure on a family of almost complex structures is always integrable. If the unique connexion with curvature form of type (1,1) has that form negative, its low dimensional cohomology groups in the sheaf of germs of holomorphic forms vanish, and there is a commutativity property for the corresponding groups of sub-(structure)-fibre spaces. *H. Guggenheimer.*

Lemlejn (Lemlein), V. G.: Generalization of invariant differentiation in a fractional linear group and splitting of an affine connectivity object. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 128, 672—673 (1959) [Russisch].

On introduit la notion de la différentiation invariante des objets géométriques qui se transforment, par une transformation d'un groupe linéaire fractionnaire, suivant la loi de transformation d'un tenseur. Au lieu de l'objet de la connexion affine Γ_{jk}^p on emploie l'objet $\gamma_{jk}^p = (n+1)^{-1} \delta_j^p \partial(\log a)/\partial x^k + (n+1)^{-1} \partial(\log a)/\partial x^j$ (a étant un scalaire de puissance 1), dont la loi de transformation par rapport aux transformations linéaires fractionnaires coïncide avec celle de l'objet de la connexion affine. On a $\Gamma_{jk}^p = \gamma_{jk}^p + G_{jk}^p$, l'objet G_{jk}^p remplissant par rapport à la différentiation invariante le même rôle que l'objet de la connexion affine par rapport à la différentiation ordinaire. K. Svoboda.

Lemlejn (Lemlein), V. G.: Local centro-projective spaces of a differentiable manifold and the γ_{jk}^p object which defines an invariant differentiation in a fractional linear group. Doklady Akad. Nauk SSSR 129, 254—256 (1959) [Russisch].

A chaque point d'une variété différentiable V_n on fait correspondre un espace centro-projectif P_n de manière qu'une transformation donnée des coordonnées locales dans V_n détermine une transformation centro-projective des coordonnées dans P_n . L'objet γ_{jk}^p qui définit la différentiation invariante dans un groupe linéaire fractionnaire peut se réduire, par une transformation centro-projective, à 0 dans un point quelconque de la variété V_n . Dans ce système de coordonnées la différentiation invariante coïncide avec la différentiation ordinaire. K. Svoboda.

Takizawa, Seizi: On the induced connexions. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 30, 105—118 (1957).

Der Prozeß der Induktion eines Zusammenhangs einer Mannigfaltigkeit auf eine Untermannigfaltigkeit wird so verallgemeinert, daß er auf Zusammenhänge in differenzierbaren Hauptbündeln Anwendung finden kann. Die Theorie wird bis zu den verallgemeinerten Gleichungen von Gauss-Codazzi-Ricci durchgeführt. Es folgen Anwendungen auf die kanonischen Zusammenhänge von universellen Bündeln, die charakteristischen Klassen von Stiefel-Whitney- und Cartansche Zusammenhänge. W. Rinow.

Frölicher, Alfred and Albert Nijenhuis: Invariance of vector form operations under mappings. Commentarii math. Helvet. 34, 227—248 (1960).

The notion of an induced mapping does not apply to mixed tensors defined in tangent spaces of differentiable manifolds. The authors use the induced mappings defined by a C^∞ mapping F to introduce a notion of " F -relatedness" of mixed tensors. It is shown that A , \mathcal{A} and $[\]$ are invariant under F -relatedness. Restrictions and extensions of field are treated, and the formulae necessary to work in the authors' theory of vector valued forms are developed. As an application, Frölicher's theorems on complex structures are re-proved in a rapid and easy way. Other applications on deformations of complex structures are promised for another paper.

H. Guggenheimer.

Topologie:

Groot, J. de: Some special metrics in general topology. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 283—286 (1958).

Ein neuer Beweis des bekannten Satzes, daß ein topologischer Raum, welcher Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, metrisierbarer Teilräume ist, metrisiert werden kann. — Außerdem einige „scheinbar nicht zu schwere Probleme“.

G. Nöbeling.

Stone, A. H.: Metrisability of unions of spaces. Proc. Amer. math. Soc. 10, 361—366 (1959).

Let a topological space S be the union of a family of subspaces S_i each of which is metrizable. The author studies the conditions which imply the metrizability of S , and obtains the following results: Each of the following conditions I to IV

are sufficient for S to be metrizable. (In I, II and III the index set $\{\alpha\}$ is assumed to consist of all natural numbers): I. S is collectionswise normal and locally countably compact, and each S_n is closed; II. S is regular, and each S_n is an open set with a compact frontier; III. S is normal and each S_n is an open F_σ -set; IV. S is regular, $\{S_\alpha\}$ is point-countable, and each S_α is locally separable. In case $\{\alpha\}$ consists of two elements 1, 2 and S_1, S_2 are open, it is proved that the condition that $F_r(S_1), F_r(S_2)$ can be enclosed in disjoint open sets is necessary and sufficient for S to be metrizable. Since a collectionswise normal space which is the union of countably many paracompact closed subspaces is easily shown to be paracompact, the proof for case I follows directly from a theorem of Smirnov, but the author gives a direct proof. His proofs for cases II and III are also direct, although paracompactness of S is deduced from known results by simple arguments. *K. Morita.*

McDougle, Paul: Mapping and space relations. Proc. Amer. math. Soc. 10, 320—323 (1959).

Let f be a continuous mapping of a topological space X onto another topological space Y . The author proves the following theorems. I. In case X is an M, E space and f is quasi-compact, Y is an M space (resp. an M, E space) if and only if f is semi-closed (resp. semi-closed and P_1). II. In case X is a metric space and f is a closed mapping or a compact mapping, Y is a metric space if and only if f is P_2 . Here a topological space X is called an M space if each sequence in X converges to at most one point, and X is called an E space if every set in X has sequences converging to each of its limit points. A mapping $f: X \rightarrow Y$ is called compact if $f^{-1}(C)$ is compact for each compact set C in Y . The definitions of P_1 mappings, P_2 mappings and semi-closed mappings are given in the author's previous paper (this Zbl. 89, 176).

K. Morita.

Anderson, R. D.: The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms. Amer. J. Math. 80, 955—963 (1958).

Es sei G eine Gruppe stetiger Abbildungen eines Raumes X in sich. Erfüllt X gewisse Homogenitätsbedingungen (in welche G i. a. eingeht), so ist G algebraisch einfach, und zwar gilt genauer: sind $g, h \in G$, h nicht die Einheit, so ist g das Produkt von höchstens 6 Konjugierten von h und h^{-1} . Diese Bedingungen sind in folgenden Fällen erfüllt: 1. G die Gruppe aller Homöomorphismen von X und X das Cantorsche Diskontinuum, die Universalkurve, der Raum aller rationalen Zahlen, oder der Raum aller irrationalen Zahlen; 2. G die Gruppe aller orientierungstreuen Homöomorphismen und X die ebene Universalkurve, die S^2 oder die S^3 . *G. Nöbeling.*

Smirnov, Ju. M.: Der Satz von P. S. Aleksandrov über wesentliche Abbildungen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 14, Nr. 5, 43—48 (1960) [Russisch].

Der Satz, daß $\dim R = n$ (R = normaler Raum) genau dann ist, wenn man R wesentlich auf ein n -Simplex, aber nicht wesentlich in ein m -Simplex ($m > n$) abbilden kann, wird ohne Zuhilfenahme eines Approximationsatzes der kombinatorischen Topologie (also rein mengentheoretisch) bewiesen. Der Beweis ist ziemlich lang und wird in einer ganzen Reihe von Einzelschritten geführt. Folgende Sätze seien davon erwähnt: (1) Es ist $\dim R < n$ genau dann, wenn jede Überdeckung, die aus $n + 1$ Elementen besteht, eine Verfeinerung vom Grade $< n + 1$ enthält. (2) Jede beschränkte, nicht negative stetige reelle Funktion f auf einer abgeschlossenen Teilmenge Φ einer G_δ -Menge eines normalen Raumes R , kann derart auf R fortgesetzt werden, daß f auf $R - \Phi$ nirgends 0 wird. (3) Sei $\varphi: R \rightarrow T$ (= Simplex) eine stetige Abbildung; es ist φ unwesentlich genau dann, wenn es eine stetige Abbildung von $R \rightarrow \text{Rd } T$ (= Rand von T) gibt, die mit φ auf $\varphi^{-1}(\text{Rd } T \cap \text{Bild } \varphi)$ zusammenfällt.

F. W. Bauer.

Slye, John Marshall: Collections whose sums are two-manifolds. Duke math. J. 24, 275—298 (1957).

Ein lokal zusammenhängender Raum S sei Vereinigung einer oberhalbstetigen Kollektion \mathcal{G} von Bogen (resp. einfach geschlossenen Kurven); der zugehörige Zerlegungsraum (also der Raum der Bogen resp. der Kurven) sei ein Bogen. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß S homöomorph ist zur 2-Zelle (resp. zum Kreisring, dem Möbiusschen Band oder dem Kleinschen Schlauch).

G. Nöbeling.

Rosen, Ronald H.: On tree-like continua and irreducibility. Duke math. J. 26, 113—122 (1959).

Sei K ein metrisches Kontinuum. Eine endliche, offene Überdeckung $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ von K , deren Mengen Durchmesser $< \varepsilon$ haben, heißt baumartig (mit k Zweigen), wenn der Nerv von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ ein Baum (mit k Endpunkten) ist. K heißt baumartig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine baumartige Überdeckung $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ von K gibt; existiert ein k derart, daß $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ mit k Zweigen gewählt werden kann, und ist k die kleinste derartige Zahl, so heißt K baumartig mit k Zweigen. Verf. beweist: Existiert eine monotone Abbildung des baumartigen Kontinuums K auf das metrische Kontinuum K' , so ist auch K' baumartig. Ist K baumartig mit k Zweigen, so ist K irreduzibel über einer Menge von k Punkten von K .

G. Nöbeling.

Tanaka, Tadashi: Correction to "On locally connected continua which are not separated by any arc". (This journal vol. 20 (1956), pp. 61—63.) J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 23, 377 (1960).

Vgl. die in diesem Zbl. 73, 180 besprochene Arbeit des Verf.

Franz, Wolfgang: Der Eulersche Polyedersatz und seine neueren Verallgemeinerungen. Bull. Soc. math. Grèce 31, 34—40 (1959).

Übersicht vom Eulerschen Satz bis zu den Spurformeln für Fix- und Koinzidenzpunkte.

Lee, Ke-chun: Über die Eindeutigkeit von einigen kombinatorischen Invarianten endlicher Komplexe. Science Record, n. Ser. 1, 279—281 (1957).

Let K be any n -dimensional simplicial complex and let $a^i(K)$ denote the number of i -dimensional simplexes of K . In the first part of the note, the author gives a simple proof of a theorem due to W. Mayer (this Zbl. 61, 403) which states that every combinatory invariant of the form $\delta(K) = \sum_{i=0}^n r_i a^i(K)$, where the r_i 's are real numbers, must be equal to the Euler-Poincaré characteristic $\chi(K)$ multiplied by a constant k . In the second part of the note, a more complicated theorem about the combinatory invariants of K is proved.

Sze-tsen Hu (M. R. 20, 6089).

Lefschetz, Solomon: On coincidences of transformations. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 2, 16—25 (1957).

Die bekannte Bedingung des Verf. für die Existenz eines Fixpunktes einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ bzw. eines Koinzidenzpaars zweier Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ zwischen Polyedern wird in mehreren Richtungen verallgemeinert: An Stelle der eindeutigen Abbildungen f, g sind mehrdeutige zugelassen (mit kompakten Graph F bzw. G), an Stelle der in der klassischen Formel auftretenden Wechselsumme, deren Nichtverschwinden die Existenz eines Fixpunktes bzw. Koinzidenzpaars garantiert, tritt eine Matrix von solchen Wechselsummen mit der Eigenschaft, daß das Nichtverschwinden eines einzigen Elementes dieser Matrix die Existenz eines Koinzidenzpaars nach sich zieht. Schließlich wird die zunächst für Polyeder entwickelte Theorie auf absolute Umgebungsretrakte übertragen.

H. Seifert.

Kan, Daniel M.: Adjoint functors. Trans. Amer. math. Soc. 87, 294—329 (1958).

Seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} Kategorien und $S: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $T: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ Funktoren. Wenn es eine natürliche Äquivalenz $\alpha: \text{Hom}(SX, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, TZ)$ ($X \in \mathcal{X}$, $Z \in \mathcal{Y}$) gibt, so nennt Verf. die Funktoren S und T adjungiert (S linksadjungiert zu T , T rechtsadjungiert zu S). Beispiele: Die Einhängung von topologischen Räumen ist zur Bildung des Schleifenraumes linksadjungiert, die geometrische Realisierung von

c. s. s. Komplexen ist zur Bildung des singulären Komplexes von topologischen Räumen linksadjungiert. In Kap. I untersucht Verf. die Beziehungen zwischen adjungierten Funktoren allgemein. Es wird gezeigt, daß jeder der beiden Funktoren S und T den anderen bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig bestimmt, und es werden natürliche Transformationen $\kappa: X \rightarrow T S X$, $\mu: S T Z \rightarrow Z$ konstruiert, die sich in den erwähnten Beispielen auf bekannte Abbildungen reduzieren. Der Begriff der Adjungiertheit wird in naheliegender Weise auf Funktoren von mehreren Variablen verallgemeinert. Beispielsweise ist das Tensorprodukt in der Kategorie der abelschen Gruppen zum Funktor Hom linksadjungiert. In Kap. II wird die Theorie auf direkte und inverse Limites angewandt. Es zeigt sich, daß diese Bildungen, falls sie in den betreffenden Kategorien existieren, als Links- bzw. Rechtsadjungierte zu gewissen anderen Funktoren, die immer existieren, aufgefaßt werden können. Kap. III enthält Verfahren, mit denen man aus einem gegebenen Paar adjungierter Funktoren neue gewinnen kann. Als Spezialfälle ordnen sich hier die verschiedenen Möglichkeiten unter, das Tensorprodukt bei abelschen Gruppen mit Operatoren (Moduln) als linksadjungiert zu Hom anzusehen. Zum Schluß wird für eine beliebige Kategorie \mathcal{Q} der Zusammenhang zwischen der Existenz von direkten Limites in \mathcal{Q} einerseits und eines Linksadjungierten von $\text{Hom}: \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}$ (\mathcal{M} = Kategorie der Mengen) andererseits untersucht. Konkrete Anwendungen dieser allgemeinen Betrachtungen finden sich in einer unmittelbar anschließenden Arbeit des Verf. (s. nachstehendes Referat).

D. Puppe.

Kan, Daniel M.: Functors involving c. s. s. complexes. Trans. Amer. math. Soc. **87**, 330—346 (1958).

Die Theorie der adjungierten Funktoren (s. vorstehendes Referat) wird hier auf einige Spezialfälle im Zusammenhang mit topologischen Räumen, c. s. s. Komplexen und Kettenkomplexen angewandt. Neben bereits bekannten Begriffen und Resultaten (z. B. geometrische Realisierung und singulärer Komplex) ergibt sich ein Funktor \mathfrak{K} von Kettenkomplexen zu c. s. s. abelschen Gruppen (vom Verf. im Rahmen seiner Systematik mit $H^V(I,)$ bezeichnet) mit folgenden Eigenschaften: (1) Bezeichnet $C_N K$ den normalisierten Kettenkomplex eines c. s. s. Komplexes K , so ist der Funktor C_N linksadjungiert zu \mathfrak{K} . (2) Bezeichnet MG für eine c. s. s.

abelsche Gruppe G den Kettenkomplex mit $(MG)_n = \bigcap_{i=1}^n \text{Kern } \partial_i$ und dem Randoperator ∂_0 , so sind die zusammengesetzten Funktoren $\mathfrak{K} M$ und $M \mathfrak{K}$ (für positive Kettenkomplexe) zu den jeweiligen identischen Funktoren natürlich äquivalent. Für irgendeinen positiven Kettenkomplex A folgt dann $H_n(A) \cong H_n(M \mathfrak{K} A) \cong \cong \pi_n(\mathfrak{K} A)$. Ist (π, n) der Kettenkomplex, der in der Dimension n die Gruppe π hat und sonst verschwindet, so ist $\mathfrak{K}(\pi, n)$ der (minimale) Eilenberg-MacLanesche Komplex vom Typ (π, n) . In einem Anhang geht Verf. auf die von einem c. s. s. Komplex K erzeugte c. s. s. freie abelsche Gruppe FAK ein und zeigt, daß der Funktor FA mit der Zusammensetzung $\mathfrak{K} C_N$ äquivalent ist, woraus $\pi_n(FAK) \cong \cong \pi_n(\mathfrak{K} C_N K) \cong H_n(C_N K) = H_n(K)$ folgt. Die natürliche Injektion $K \rightarrow FAK$ induziert den Hurewiczschen Homomorphismus $\pi_n(K) \rightarrow H_n(K)$. Der Funktor \mathfrak{K} und die Resultate darüber wurden (in etwas anderer Form) auch von A. Dold angegeben (dies. Zbl. **82**, 377). Dort wird außerdem ein direkter Zusammenhang zwischen den Funktoren M und C_N hergestellt, der die Theorie noch übersichtlicher macht.

D. Puppe.

Nakaoka, Minoru: Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups. Ann. of Math., II. Ser. **71**, 16—42 (1960).

Verf. behandelt folgenden Zerlegungssatz für die Homologiegruppen der symmetrischen Gruppe $S(m)$ vom Grade m :

$$H_q(S(s); G) \approx \sum_{m=1}^s H_q(S(m), S(m-1); G)$$

und entsprechend für die Kohomologie. Aus diesem Satz zieht er die Folgerungen: 1. Sei $u_\infty \in H^n(Z, n; Z)$ die Fundamentalklasse ($n \equiv 0 \pmod{2}$), dann ist der Homomorphismus $* \cup u_\infty: H^q(Z, n; G) \rightarrow H^{q+n}(Z, n; G)$ ein Monomorphismus und entsprechend für die Homologie. 2. $H_q(S(m-1); G) \approx H_q(S(m); G)$ (entspr. für Kohomologie) ($q < \frac{1}{2}m$). Beim Beweis von 1. benutzt man, daß das m -fache symmetrische Produkt eines Komplexes K nichts anderes ist als der „orbit space“ der Gruppe $S(m)$ auf K^m , und daß nach dem Satz von Thom und Dold $SP^\infty(S^n)$ (das unendliche symmetrische Produkt der n -Sphäre) ein $K(Z, n)$ ist. *F. W. Bauer.*

Steenrod, N. E. and Emery Thomas: Cohomology operations derived from cyclic groups. *Commentarii math. Helvet.* **32**, 129—152 (1957).

The authors improve results of N. E. Steenrod (this Zbl. **77**, 167), giving a smaller basis for the cohomology operations „reduced powers“. According to the results of Steenrod (l. c.) these operations are generated by the primitive operations of addition, cup-product, coefficient homomorphisms and Bockstein coboundary operators, and by the reduced power associated with cyclic permutations having prime degree p and order p . Here, by a detailed analysis of the reduced powers, it is shown that the operations are generated by the same primitive operations and, for each prime p , by the cyclic reduced powers $P^i: H^q(K; Z_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(K; Z_p)$, $i = 0, 1, \dots$, and the Pontrjagin p -th powers $B_p: H^{2q}(H; Z_{p^k}) \rightarrow H^{2pq}(K; Z_{p^{k+1}})$. (defined for any $p > 2$ by E. Thomas (this Zbl. **71**, 163)). *W. H. Cockcroft.*

Inoue, Yoshiro: Homotopy groups of css complexes. *Math. Japonicae* **5**, 1—16 (1958).

In this paper, the author (a): establishes the relationship between Heller's css complexes with homotopy systems, and Kan complexes, and (b): gives a solution to Massey's problem 11 (this Zbl. **68**, 162). Ad (a). The axioms of Heller are modified (essentially to make $\{\pi_n(X, x)\}$ a local system of groups); uniqueness is established, and existence proved if and only if X is a Kan complex; the Heller css complexes with homotopy system are thus precisely the 0-connected Kan complexes that are simple in all dimensions. Ad (b). For an $(n-1)$ -connected css complex ($n \geq 2$) X on which a css group Γ acts, there exists an n -connected css complex X' on which Γ acts, and a fiber map $X' \rightarrow X$ which commutes with Γ and which induces isomorphisms $\pi_q(X') \approx \pi_q(X)$ for all $q \geq n+1$, if and only if the following three conditions are satisfied: 1. The homomorphisms $\pi_n(\Gamma, e) \rightarrow \pi_n(X, x)$ induced by the css analog of $k_x(\gamma) = \gamma x$ is a zero homomorphism. 2. The canonical map $X \rightarrow X/\Gamma$ induces an isomorphism of $\pi_n(X, x)$ onto a direct summand of $\pi_n(X/\Gamma, \bar{x})$. 3. Letting $r^\#$ be the homomorphism $H^{n+1}(\cdot, \pi_n(X/\Gamma, \bar{x})) \rightarrow H^{n+1}(\cdot, \pi_n(X, x))$ induced by the retraction of $\pi_n(X/\Gamma, \bar{x})$ onto the direct summand in (2), $r^\#$ sends the n -th Postnikov invariant to zero. *J. Dugundji.*

Chow, Sho-kwan: Homotopy groups and cup product of cohomology groups. *Sci. Sinica* **8**, 557—567 (1959).

Let X have finitely generated homology, $\pi_1(X) = 0$, $H_i(X; R) = 0$, $2 \leq i \leq N-1$ ($R =$ rationals). In a previous paper (this Zbl. **83**, 390) the author showed that the rank $r(\pi_i) = r(H_i)$ for all $N \leq i \leq 2N-2$. In the present paper, the author obtains a precise formula for $r(\pi_i)$ valid in the range $2N-1 \leq i \leq 3N-3$; he shows that, beside the homology, only the ordinary cup product in the cohomology is involved in determining $r(\pi_i)$ in this range. In fact, let $P^n \subset H^n(X; R)$ be the subspace spanned by $\sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 0}} H^i(X; R) \cup H^j(X, R)$ and define $\varepsilon_{2\mu} = 0$, $\varepsilon_{2\mu-1} = \frac{1}{2} [r(H_\mu)] [r(H_\mu) + (-1)^\mu]$; then for $2N-1 \leq l \leq 3N-3$ the author proves

$$r(\pi_l) = r(H_l) + \varepsilon_l - r(P^{l+1}) - r(P^l) + \sum_{\substack{i+j=l+1 \\ i > j \geq N}} r(H_i) \cdot r(H_j).$$

The proof is based on a construction of a bouquet of spheres with suitably attached cells which has, mod the Serre class of torsion abelian groups, the homotopy of X for $1 \leq i \leq 3N - 3$. As further results: Every $h_m \in H_m(X; R)$ is spherical for $2 \leq m \leq 2N - 2$; for $2N - 1 \leq m \leq 3N - 3$, h_m is spherical if and only if $K I(h_m, P^m) = 0$. J. Dugundji.

Dowker (Dauker), C. H. (K. Ch.): Über den Dualitätssatz von Kolmogorov und Aleksandrov. Mat. Sbornik, n. Ser. 50 (92), 247—255 (1960) [Russisch].

Die Arbeit beschäftigt sich mit Sätzen, die den bekannten Ausschneidungssatz verallgemeinern. Verf. benutzt die Kohomologie vom Čech-Dowkerschen Typus mit einer Trägerfamilie Φ . Er führt den Begriff der „ Φ -guten Einbettung“ einer abgeschlossenen Teilmenge $E \subset X$ in X ein und beweist den folgenden Hauptsatz: Satz 1: Sei Φ eine Trägerfamilie in X , E Φ -gut eingebettet in X und $G = X - E$, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\mu : H_{\Phi(G)}^p(G) \rightarrow H_{\Phi}^p(X, E)$. Als weiteren Ausschneidungssatz erhält der Verf.: Sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung mit $f^{-1}(B) = A$. Sei $H \subset Y$ offen, so daß $H \cup B = Y$ und $G = f^{-1}H$. Man setzt noch voraus, daß $f|_G : G \rightarrow H$ homöomorph und daß der Rand von G parakompakt ist und eine „kollektiv normale“ abgeschlossene Umgebung in G hat. So dann ist der Homomorphismus $f^* : H^p(Y, B) \rightarrow H^p(X, A)$ ein Isomorphismus. Satz 1 ist offenbar eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß $H^p(X, E) \approx H^p(X - E)$ ist, für kompaktes Paar (X, E) , wobei die Kohomologie von $X - E$ mit kompaktem Träger genommen wird. F. W. Bauer.

Hirsch, Guy: Certaines opérations homologiques et la cohomologie des espaces fibrés. Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 167—190 (1957).

It is assumed that the de Rham decomposition theorem holds. A sequence of cohomology operations is constructed based on this decomposition, which, for the special case of a fibre space, depends on a map of the graded group associated to the cohomology of the fibre into the tensor product of that group with the cohomology group of the fibre space. This sequence of operations then enables one to compute the additive cohomology structure of the fibre space. The operations defined are connected with Massey's triple product and its generalizations.

H. Guggenheimer.

Conner, P. E. and Eldon Dyer: On singular fiberings by spheres. Michigan math. J. 6, 303—311 (1959).

A singular fibering is a map $\pi : X \rightarrow Y$ such that there are subspaces $A \subset X$, $B \subset Y$, for which $\pi|_A : A \rightarrow B$ is a homeomorphism, $\pi|_{X-A} : X-A \rightarrow Y-B$ is a fiber map with fiber F , the map $\pi|_{X-A}$ being proper open onto. This paper is concerned with sphere fiberings, $F = S^r$. If X is compact and has cohomology dimension m , the cohomology dimension of A is shown not to exceed m , and $H^i(Y) = H^i(B)$, $i \geq m - r$. (All cohomology groups are taken over \mathbb{Z}_2 .) If in addition X is clc (cohomology locally connected), then A and Y are clc. If X is a mod 2 cohomology n -sphere, then A is a mod 2 cohomology $(n - k(r + 1))$ -sphere. A similar conclusion is, that A is a generalized manifold if X is one (in the compact, strongly paracompact, locally orientable case) with the same relation on the dimensions. The general method of proof is a combination of the exact diagrams obtained from the fiber map with the Gysin sequence.

H. Guggenheimer.

Hirsch, Morris W. and Stephen Smale: On involutions of the 3-sphere. Amer. J. Math. 81, 893—900 (1959).

The authors give the following definition: If T_1, T_2 are two involutions on X_1, X_2 , respectively, they are “equivalent” if there is a homeomorphism $h : X_1 \rightarrow X_2$, such that $hT_1 = T_2h$. With this definition of equivalence there is proved the following theorem: If $T : S_3 \rightarrow S_3$ is an involution with fixed point set F consisting of two points, then T is equivalent to the linear involution: $L(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$. From this theorem the authors deduce the following consequence: Let M be a non-orientable 3-manifold with an element $\beta \in \pi_1(M)$, $\beta^2 = 1$, reversing orientation. Then the projective plane can be piecewise linearly embedded in M .
V. Poenaru.

Kosiński, A.: On a problem of Steinhaus. *Fundamenta Math.* 46, 47—59 (1958).

In der Ebene sei S die Kreislinie und Q die von S berandete 2-Zelle; je zwei antipodale Punkte von S seien verbunden durch einen Bogen $B \subseteq Q$, der von den Endpunkten stetig abhängt; das Problem lautet: gibt es unter den Bogen B drei Exemplare mit gemeinsamem Punkt? Verf. zeigt, daß dies gilt, und zwar allgemeiner auch dann, wenn S ersetzt wird durch die n -Sphäre im R^{n+1} , Q durch die von S berandete $(n+1)$ -Zelle, die Bogen B durch azyklische Kontinuen und die Stetigkeit durch die obere Halbstetigkeit. — In engem Zusammenhang hiermit steht folgendes Problem: es liege vor eine stetige Abbildung f des 2-dimensionalen Möbiusschen Bandes M in die 2-Zelle Q , wobei der Rand von M homöomorph auf den Randkreis S von Q abgebildet werde; existieren dann drei Punkte von M mit demselben Bildpunkt? Verf. beantwortet auch diese Frage positiv, und zwar ebenfalls verallgemeinert auf höhere Dimensionen. — Beide Sätze sind Folgerungen aus einem „Hauptlemma“.
G. Nöbeling.

Hadwiger, H.: Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis und Kugelfläche. *Elemente Math.* 14, 49—60 (1959).

Es werden 19 bekannte Sätze elementar bewiesen, darunter der Satz von Poincaré von der Nichtexistenz stetiger, tangentialer Richtungsfelder auf der S^2 , der Brouwersche Fixpunktsatz für die Kreisscheibe und der Antipodensatz von Ljusternik, Schnirelmann und Borsuk für die S^2 .
G. Nöbeling.

Langefors, Börje: Algebraic topology and networks. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 43, 37 p. (1959).

Das Heft ist eine Einführung in die algebraische Topologie. Es ist vorwiegend gedacht für Ingenieure, die sich dieses Handwerkzeugs bedienen wollen zur Berechnung elektrischer Netzwerke, mechanischer Fachwerkstrukturen oder ähnlicher Systeme.
W. Nonnenmacher.

Harary, Frank and R. Z. Norman: Dissimilarity characteristic theorems for graphs. *Proc. Amer. math. Soc.* 11, 332—334 (1960).

Neue und kürzere Ableitungen für Otters Dissimilarity-Characteristic-Gleichung für Bäume und Kaktusse (Husimi-Bäume) (dies. Zbl. 51, 405; 55, 172) und für ein elementares Theorem von Harary für Graphen (dies. Zbl. 88, 396). H. Künneht.

Dirac, G. A.: Paths and circuits in graphs: Extreme cases. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 10, 357—362 (1959).

C_d sei der vollständige Graph mit d Punkten. A_{nd} ($n > 2, d \geq 4$) ist ein Graph, der aus d Punkten P_i und $n-d$ Punkten Q_k besteht und allen Kanten $P_i Q_k$ ($1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq n-d$). Aus A_{nd} erhält man den Graph A_{nd} , wenn man noch die Kanten $P_i P_j$ ($1 \leq i, j \leq d, i \neq j$) hinzufügt. Ω_{pd} ($p \geq 1, d \geq 1$) besteht aus p paarweise fremden C_d und einem dazu fremden Punkt, der mit allen Punkten der p C_d durch Kanten verbunden ist. Ein Graph heißt hamiltonsch, wenn er einen hamiltonschen Kreis enthält. — G sei ein zusammenhängender Graph mit n Punkten, der keinen Weg enthält, dessen Länge $> 2d$ ist (Weglänge = Kantenzahl des Weges). Jeder Punkt von G habe einen Grad $\geq d \geq 2$. Ist G regulär oder geht von jedem Punkt aus G ein Weg von der Länge $2d$ aus, so ist G hamiltonsch. Ist G nicht hamiltonsch, so ist seine chromatische Zahl $\leq d+1$. Ist $d \geq 5$, so ist G nicht eben. Ist $n > 2d$, und hat G einen Zerlegungspunkt, so ist G isomorph zu einem Ω_{id} ($i = 1, 2, \dots$), hat G keinen Zerlegungspunkt, so ist $A_{nd} \subseteq G \subseteq A_{nd}$.

H. Künneht.

Erdős, P. and T. Gallai: On maximal paths and circuits of graphs. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **10**, 337—356 (1959).

Alle hier vorkommenden Graphen G haben n Knotenpunkte, $\nu(G)$ sei die Kanten-
zahl von G . C_k sei der vollständige Graph mit k Punkten. Ist der Grad jedes Punktes
 $\geq \frac{1}{2}(n-1)$ ($n \geq 4$), dann gibt es in G einen hamiltonschen Kreis und zwei beliebige
Punkte aus G können durch eine offene hamiltonsche Linie verbunden werden. —
Ist $\nu(G) > \frac{1}{2} n l$, bzw. $> \frac{1}{2}(n-1) l$, so enthält G einen Weg, bzw. Kreis mit mehr
als l Kanten. Die Schranke ist genau im Fall $n = q(l+1)$, bzw. $n = q(l-1) + 1$,
wie das Beispiel des Graphen zeigt, der Vereinigung von q Graphen C_{l+1} ist, bzw. des
zusammengesetzten Graphen, der q Glieder hat, von denen jedes ein C_l ist. — Ist
 $n \geq \frac{1}{2}(k+1)^3$ ($k \geq 1$), $\nu(G) > nk - \binom{k+1}{2} = \varphi(n, k)$, so enthält G einen Weg
oder Kreis mit mehr als $2k$ Kanten. Daß die Schranke für $\nu(G)$ genau ist, zeigt der
Graph G_k^* ($2k \leq n$), der zusammengesetzt ist aus einem C_k , einer aus $n-k$ Punkten
bestehenden Punktmenge Q und allen Kanten, die Punkte aus Q mit Punkten aus
 C_k verbinden. — Kanten heißen unabhängig, wenn sie paarweise keinen Punkt
gemein haben. Ist k die Höchstzahl unabhängiger Kanten in G , so ist $\nu(G) \leq$
 $\max \left(\binom{2k+1}{2}, \varphi(n, k) \right)$. Das Gleichheitszeichen ist nur möglich, wenn $G = G_k^*$
oder $G = C_{2k+1} \cup \{p_i\}$, wobei p_i isolierte Punkte sind. H. Künne.

Izbicki, Herbert: Graphentransformationen. Monatsh. Math. **64**, 135—175
(1960).

X sei ein Graph, $\alpha_0(X)$ und $\alpha_1(X)$ die Zahl seiner Punkte v_i bzw. seiner Kanten e_k ,
 $d_X(v_i)$ der Grad von v_i in X , $G(X)$ die Automorphismengruppe von X ; die von $G(X)$
auf die Punktmenge von X induzierte Gruppe sei $G_v(X)$. Außer den Punkten und
Kanten treten hier noch die Elemente $\langle e_k, j \rangle$ ($j = 1, 2$) auf, wobei $\langle e_k, 1 \rangle$ und $\langle e_k, 2 \rangle$
bzw. den beiden Endpunkten von e_k zugeordnet werden durch $h_X \langle e_k, j \rangle$. Graphen
ohne Schlingen und mehrfache Kanten heißen hier „spezielle Graphen“. C_n bedeutet
den vollständigen Graphen mit n Punkten. — Die wesentlichsten hier betrachteten
Transformationen sind: (1) $X \rightarrow \varkappa X$ ordnet X den komplementären Graph $\varkappa X$ zu.
 $G_v(X) = G_v(\varkappa X)$ wird benutzt zum Beweis des Satzes: Ist $\{G_i\}$ eine endliche
Menge paarweise variablenfremder endlicher Permutationsgruppen, wobei es 1. zu
jeder Gruppe G_i einen Graphen X_i gibt mit $G_i = G_v(X_i)$ und 2. entweder zwei nicht
äquivalente G_i oder ein G_i und zwei verschiedene Graphen X_i^1 und X_i^2 mit $G_v(X_i^1) =$
 $G_v(X_i^2) = G_i$, dann gibt es einen zusammenhängenden Graphen X mit $G_v(X) =$
 $\prod_i G_i$. (2) Bei der Transformation $X \rightarrow \vartheta X$ entspricht jeder Kante e_k von X
ein Punkt v'_k von ϑX . Zwei Punkte v'_k und $v'_{k'}$ sind in ϑX durch eine Kante verbunden,
wenn $h_X \langle e_k, j \rangle = h_X \langle e_{k'}, j' \rangle$ ($j, j' = 1, 2$), wobei nicht zugleich $k = k'$, $j = j'$.
Es entspricht, wenn $k = k'$, $j \neq j'$, einer Schlinge in X eine Schlinge in ϑX . Wenn
mehrfache Kanten in X auftreten, dann auch in ϑX . Ist X ein spezieller Graph, dann
auch ϑX . Ist X regulär vom Grad n , dann ist ϑX regulär vom Grad $2n-2$. Sind
 X und ϑX spezielle Graphen, ist ϑX regulär vom Grad n , X zusammenhängend aber
nicht regulär, so lassen sich die Punkte von X mit zwei Farben färben und haben
entweder den Grad r oder s mit $r+s-2=n$. Punkte gleichen Grades haben
gleiche Farbe. — Ist X regulär und ϑX ein C_n , so ist entweder $X = C_2$, $\vartheta X = C_1$
oder $X = \vartheta X = C_3$. — Ist Y ein spezieller Graph, dessen Kanten sich in Klassen
einteilen lassen, so daß die Kanten jeder Klasse einen C_{n_i} ($n_i \geq 4$) bilden und in jedem
Punkt von Y sich höchstens 2 Klassen treffen, dann und nur dann gibt es einen
speziellen Graphen X mit $\vartheta X = Y$. — Ist X ein spezieller regulärer Graph vom
Grad $n \geq 4$ ohne Fixpunkte und Fixkanten bei $\Gamma \in G(X)$, dann gibt es für jedes
ganze $k \geq 0$ eine Permutationsgruppe G , die genau $\alpha_0(\vartheta^k X)$ Variable hat mit
 $G \cong G_v(X)$. (3) Bei $X \rightarrow \varrho X$ fallen alle Schlingen weg und ein oder mehrere Wege
 W , die von v_i nach v_j führen und deren innere Punkte alle den Grad 2 haben, werden

ersetzt durch eine von v_i und v_j begrenzte Kante. $\min \{r \mid \varrho^r X = \varrho^{r-1} X\} = m = m(X)$; $\varrho^m X = \lambda X$; $\alpha_0(\lambda X) = w(X)$. Ist X ein spezieller Graph und n eine beliebige natürliche Zahl, dann gibt es stets einen speziellen Graph Y mit $\varrho^n Y = X$, so daß $G(Y) = G(X)$. Sind zwei nicht negative ganze Zahlen m und w vorgegeben ($w \neq 3$), so gibt es stets einen zusammenhängenden speziellen Graphen X mit $m(\vartheta X) = m$, $w(\vartheta X) = w$. (4) Bei der Transformation $X \rightarrow \delta X$ entsprechen den $\langle e_k, j \rangle$ ($j = 1, 2$) von X die Punkte von δX , also $\alpha_0(\delta X) = 2 \alpha_1(X)$. $\alpha_1(\delta X) = \frac{1}{2} \sum_i (d_X(v_i))^2$. Die $\langle e_k, j \rangle$ und $\langle e_{k'}, j' \rangle$ entsprechenden Punkte in δX sind durch eine Kante verbunden, wenn $\bar{h}_X \langle e_k, j \rangle = \bar{h}_X \langle e_{k'}, j' \rangle$ in X ($k, j \equiv k', j'$). Jedem Punkt v_i in X entspricht ein $C_{d_X(v_i)}$ in δX . Erhält man ηX aus X durch Halbierung der Kanten, so ist $\vartheta \eta X \cong \delta X$. Die chromatische Zahl von δX ist $\max d_X(v_i)$. Zum Beweis der Sätze hat Verf. einen eigenen Rechenformalismus eingeführt. *H. Künneth.*

Theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Kijko, I. A.: Die Pressung von gerippten Rotationsschalen. Naučn. Doklady vyssh. Školy, fiz.-mat. Nauki 1959, Nr. 2, 110—117 (1960) [Russisch].

Koltunov, M. A.: Über die Abhängigkeit „Belastung-Durchbiegung“ für biegsame flache Schalen. Naučn. Doklady vyssh. Školy, fiz.-mat. Nauki 1959, Nr. 3, 102—104 (1960) [Russisch].

Schmidt, Rainer: Festigkeitsberechnungen von Radialverdichterlaufrädern. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 4, 31—53 (1960).

Verf. beginnt zunächst mit einer Erläuterung der üblichen Berechnungsverfahren bei der Spannungsermittlung in Radialverdichterlaufrädern und stellt die wesentlichen Annahmen und Vernachlässigungen zusammen, die in diesen Verfahren gebräuchlich sind. (Donath, eine Anzahl Scheiben gleicher Dicke.) Mit einer Übersicht über genauere Berechnungsmethoden beginnt dann die Durchführung eines umfassenden Verfahrens zur Ermittlung der Spannungen in der Nabe, Rad- und Deckscheibe. Es werden die Schaufeln in axialer Richtung als Balken aufgefaßt. Dann werden die Schaufeln aus dem Scheibenverband herausgeschnitten und an den Schnittstellen statisch unbestimmte Schnittkräfte und -momente so angebracht, daß noch immer der konstruktive Zusammenhang zwischen Schaufel, Rad- und Deckscheibe gewahrt bleibt. Zur Ermittlung der unbekannten Schnittkräfte und -momente wird die Bedingung gestellt, daß die Verformungen der einzelnen Laufradteile an den entsprechenden Schnittstellen Rad-Schaukel bzw. Schaufel-Deckscheibe gleich sein müssen. Insgesamt ergibt das hier vorgeführte Berechnungsverfahren eine Aussage darüber, in welchem Maße die Rad- und Deckscheibe am Tragen der Schaufelfliehkkräfte beteiligt sind und welche Werte die Biegespannungen annehmen, die durch die Unsymmetrie hervorgerufen werden. Die Arbeit schließt mit einem Vergleich der Spannungen in den einzelnen Laufradteilen, wenn man das hier gezeigte Verfahren den bisher geläufigen Methoden gegenüberstellt. Es zeigt sich, daß die in der üblichen Weise berechneten Spannungen, besonders in der Deckscheibe und in den Schaufeln, zum Teil bedeutend unter den genaueren Werten liegen. In der Radscheibe liegt man dagegen auf der sicheren Seite. Die Schaufel ist das am meisten gefährdete Bauteil der Laufräder. Insgesamt eine sehr lesenswerte Arbeit, die zeigt, wie man durch verfeinerte Annahmen zu wesentlich neuen Erkenntnissen gelangen kann. *H. Göcke.*

Gurevič, G. I.: Über eine Verallgemeinerung der Maxwell'schen Gleichung für den Fall von drei Dimensionen unter Berücksichtigung kleiner Deformationen der elastischen Nachwirkung. Trudy Inst. Fiz. Zemli Nr. 2 (169), 60—74 (1959) [Russisch].

The author considers the relation between stress and strain deviator in the three-dimensional case. The model discussed takes into account the relaxation and the retardation phenomena. In comparison with the standard solid (a combination of the Maxwell and Voigt body) the model under consideration contains an integral of the stress deviator components. The constant before the integral taken zero the equations reduce to those of the standard solid. The generalization of the one-dimensional model discussed was done before by Ja. I. Frenkel and Ju. N. Obrazcov in the case of constant coefficients by an operational method. Considering the physics of the problem the author derives the relations for the general three-dimensional problem. In the case of constant coefficients the given relations reduce to those previously obtained.

P. Wilde.

DeWit, G. and J. S. Koehler: Interaction of dislocations with an applied stress in anisotropic crystals. Phys. Review, II. Ser. **116**, 1113—1120 (1959).

Eine Versetzung in einem Einkristall sei zwischen zwei Verankerungspunkten nur in ihrer Gleitebene beweglich. Für die Gestalt, die ein solcher Versetzungsabschnitt annimmt, wenn man an dem Kristall eine mechanische Spannung wirken läßt, wird ein System von zwei Differentialgleichungen unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die elastische Energie E pro Längeneinheit der Versetzung eine differenzierbare Funktion des Winkels θ zwischen der Versetzungslinie und dem Burgers-Vektor ist. Zur numerischen Berechnung von E in einem elastisch anisotropen Einkristall dient eine von A. J. E. Foreman [Acta Met. **3**, 322 (1955)] für lange gerade Versetzungen entwickelte Methode, die auch auf beliebige Versetzungen mit genügend großem Krümmungsradius anwendbar ist. Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems liefert eine Schar geschlossener Kurven in der Gleitebene, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen und mit zunehmender Spannung kleiner werden. Infolgedessen gibt es oberhalb einer kritischen Spannung keine Kurve durch beide Verankerungspunkte, also keine Gleichgewichtslage des Versetzungsabschnittes. Unterhalb der kritischen Spannung läßt sich durch geeignete Bestimmung der Integrationskonstanten ein Kurvenstück finden, das die Versetzungslinie in der Gleitebene darstellt. Die Ergebnisse werden mit denen verglichen, die man bei elastischer Isotropie erhält. Die Gestalt der Versetzungslinie hängt wesentlich von dem Vorzeichen von $E + d^2E/d\theta^2$ ab. Dieser Ausdruck kann im anisotropen Fall negativ werden. Die Lösungskurven des Differentialgleichungssystems sind dann nicht mehr doppelpunktfrei, sondern nehmen hantelförmige Gestalt an, und es ist möglich, daß die Verbindung der beiden Verankerungspunkte durch eine gerade Versetzungslinie im spannungsfreien Zustand nicht stabil ist. Verff. vermuten, daß die Vorzeichenwechsel von $E + d^2E/d\theta^2$ mit Phasenumwandlungen zusammenhängen, für die sie einige experimentelle Beispiele angeben.

C. Seyferth.

Koehler, J. S. and G. DeWit: Influence of elastic anisotropy on the dislocation contribution to the elastic constants. Phys. Review, II. Ser. **116**, 1121—1125 (1959).

Kleine Verunreinigungen können eine Versetzung stellenweise verankern. Dies führt zu einer Erhöhung der gemessenen elastischen Konstanten, die hier für kubisch-flächenzentrierte Kristalle untersucht wird. Die Scherung, die ein an seinen Enden verankerter Versetzungsabschnitt bei einer Bewegung hervorruft, ergibt sich aus der Fläche, die er dabei überstreicht. Die Verff. berechnen diese Fläche näherungsweise. Sie nehmen dabei an, daß die äußere Spannung, die die Versetzungsbewegung verursacht, genügend klein ist, und benutzen die in einer früheren Veröffentlichung (s. vorstehendes Referat) bestimmte Gleichgewichtslage des Versetzungsabschnittes. Die von allen Versetzungen erzeugte elastische Dehnung kann man durch Integration bekommen, wenn die Verteilung der Versetzungsabschnitte hinsichtlich ihrer Länge und ihres Winkels mit dem Burgers-Vektor bekannt ist. Es zeigt sich, daß der Bei-

trag der Versetzungen zu den elastischen Konstanten mit der Anisotropie zunimmt. Er beträgt für Kupfer und Blei nach numerischen Abschätzungen einige Prozent. Die Verff. machen auf die Unsicherheit ihrer Ergebnisse infolge der Vereinfachungen, die sie benutzt haben, aufmerksam. Da der Beitrag bei Stufenversetzungen etwa 5- bis 10mal so groß ist wie bei Schraubenversetzungen, sind genauere Untersuchungen hinsichtlich der Verteilung der Winkel zwischen Versetzungslinie und Burgers-Vektor wichtig. Zum Vergleich werden Bestrahlungsexperimente an 99,999% reinen Kupfereinkristallen von D. O. Thompson und D. K. Holmes [J. appl. Phys. 27, 713—722 (1956)] herangezogen. Die Erhöhung des Elastizitätsmoduls nach Neutronenbestrahlung stimmt größenordnungsmäßig mit dem errechneten Beitrag der Versetzungen überein.

C. Seyferth.

Durelli, A. J. and J. W. Dally: Stress concentration factors under dynamic loading conditions. J. mech. Engin. Sci. 1, 1—5 (1959).

Die spannungsoptische Methode vermag nicht nur bei zeitlich unveränderlichen Spannungsfeldern, sondern auch bei dynamischen Belastungen zur Bestimmung des Spannungskonzentrationsfaktors wertvolle Dienste zu leisten. In der vorliegenden Arbeit wurde die Spannungserhöhung in der Umgebung eines kreisförmigen Loches auf spannungsoptischem Wege sichtbar gemacht und in Anlehnung an statische Versuche der Spannungskonzentrationsfaktor definiert als das Verhältnis von der in einem bestimmten Punkt herrschenden maximalen Spannung zu derjenigen Spannung, welche am gleichen Ort und ohne die geometrische Diskontinuität vorhanden ist. Da es sich hierbei um zeitlich veränderliche Spannungen handelt, ist das Spannungsverhältnis stets für bestimmte Zeitpunkte zu bilden. Untersucht wurden Flachstäbe mit zentralen Kreislöchern und beiderseitigen kreisförmigen Kerben aus dem Kunststoff Hysol 8705 (mit kleinem Elastizitätsmodell), die in Richtung der Stabachse durch eine bestimmte Masse gestoßen wurden. Die Ausbreitung des Spannungszustandes wurde mit einer Fastax-Kamera (etwa 12000 Bilder/sec) bzw. mit gesteuerten Einzelblitzen photographisch aufgenommen. Da die spannungsoptische Konstante in dem Bereich der hier auftretenden Verformungsgeschwindigkeiten gleich war, konnte der Spannungskonzentrationsfaktor (*K*-Faktor) sofort aus dem Verhältnis der beobachteten Isochromaten berechnet werden. Bis auf gewisse kleine Unterschiede der Spannungserhöhungen längs des Lochumfanges zwischen statischer und dynamischer Belastung zeigen die Versuche, daß der dynamische *K*-Faktor in dem untersuchten Zeitintervall konstant ist und mit dem statischen Wert des *K*-Faktors übereinstimmt. Eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes ist allerdings erst dann gegeben, wenn noch andere Fälle untersucht werden.

H. Schwieger.

Kuznetsov (Kuznetsov), Ju. N. (Y. N.): Struts of minimum weight subjected to simultaneous action of bending with torsion or compression. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1959, 372—377, russ. und engl. Zusammenfassung 378 (1959) [Russisch].

Yang, Hsun-Tiao: Reduction of Ikenberry-Truesdell equations to Burnett equations for slip flow. J. aeronaut. Sci. 25, 404—405 (1958).

Il est prouvé qu'en partant de la seconde itérée de l'expression des tensions et du flux calorique dans les équations de Ikenberry et Truesdell (ce Zbl. 70, 235) on aboutit aux expressions correspondantes résultant des équations de Burnett, lesquelles peuvent donc être considérées comme une approximation. *C. Iacob.*

Chuan Ké-čži: Über die Grundgleichungen der Theorie der dünnwandigen Stäbe mit offenem Profil innerhalb und außerhalb der Elastizitätsgrenzen. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 11, 122—136 (1957) [Russisch].

L'A. présente une étude concernant les barres à parois minces, de section transversale ouverte, en régime élastique, en utilisant des résultats donnés par V. Z. Vla-

sov. Ju. N. Rabotnov et A. L. Gol'denvajzer. On passe aussi à l'étude du cas élasticoplastique, en utilisant les théories de A. A. Iljušin. À l'aide de la théorie des voiles minces cylindriques, on considère spécialement deux cas particuliers importants: le cas où $q^2 \sim \lambda \ll 1$ et le cas où $q \sim \lambda^{3/4}$, $\lambda \ll 1$ avec $\lambda = h/R$, $q = R/L$, en notant: L — la longueur de la barre, R — le rayon de courbure de la fibre moyenne de la section transversale, $2h$ — l'épaisseur de la section transversale.

P. P. Teodorescu.

Serman, D. I.: Zur Frage der Torsion eines elliptischen Balkens, der durch einen ebenfalls elliptischen Hohlraum longitudinal geschwächt ist. Inženernyj Sbornik 25, 3—19 (1959) [Russisch].

L'étude concerne la torsion d'une barre droite à section elliptique évidée par un contour elliptique non confocal au premier. On donne des formules pour les contraintes aux sommets du contour et pour calculer la rigidité torsionnelle. L'étude est illustrée par des exemples numériques.

Z. Wasiutyński.

Adams, Ernst: Durch die Flügel verursachte Spannungserhöhung in Mittelscheiben axialer Turboläufer. Jahrbuch 1957 Wiss. Ges. Luftfahrt, 306—316 (1958).

Die Entwicklung des Axialgebläses zum Typ des schnellen Läufers führt auf das Festigkeitsproblem der durch n Flügel hervorgerufenen Spannungsspitzen über der drehsymmetrischen Grundlast. Für schwach veränderliche Scheibendicken kann eine lineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten als sogenannte Zentralgleichung abgeleitet werden. Für konstante Scheibendicke geht sie in die Bipotentialgleichung über, die zur ersten Grundlösung in Form einer Fourier-Reihe führt. Eine weitere exakte Grundlösung erhält man für das Scheibenprofil $h = c/r^2$. Ausschnitte aus den Ergebnissen für die beiden Grundlösungen in Abhängigkeit von Flügelzahl und Scheibengeometrie, die Verf. in seiner Dissertation gewonnen hat, werden in Diagrammen dargestellt. Die Amplituden der Einflußfunktionen für die Spannungsspitzen nehmen mit wachsendem Kn (K = Fourier-Index, n = Flügelzahl) ab. Zu einem Näherungsverfahren gelangt man entweder durch Vernachlässigung von Gliedern in der Zentralgleichung oder durch eine Ersatzprofilmethode, d. h. eine „Entfeinerung“ beliebiger Scheibenprofile, indem man sie durch 2 oder 3 Teilringe mit $h = \text{const}$ oder $h = c/r^2$ einer der beiden exakten Grundlösungen annähert.

J. Pretsch.

Filin, A. P.: Über die Stabilität vorgespannter Konstruktionselemente. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 12, 54—56 (1958) [Russisch].

L'étude concerne les charges critiques des barres précontraintes droites. On démontre que la charge critique des pièces précontraintes est supérieure à la charge des pièces non précontraintes, à condition que la force de précontrainte ne soit pas annulée par la surcharge. En prenant une force de précontrainte suffisamment grande on peut toujours empêcher le flambement sous charge donnée si seulement la résistance du béton n'est pas épuisée.

Z. Wasiutyński.

Olesiak, Zbigniew: Application of trigonometric series to the computation of closed cylindrical shells. Rozprawy inż. 6, 265—279, russ. und engl. Zusammenfassung 279—280 (1958) [Polnisch].

Axially symmetrical problems of cylindrical shells are discussed. The solutions in the form of trigonometric series are given for several cases of loading and boundary conditions, including approximations for shells with slightly varying thickness and radius.

M. Bieniek.

Golub, V. K.: Über die Berechnung von Balkenplatten auf elastischer Grundlage. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 4, 192—195 (1959) [Russisch].

On analyse les forces intérieures et déformations des dalles d'épaisseur constante reposant sur sol déformable et chargées d'une manière quelconque en introduisant les

réactions normales et tangentielles du sol sur les dalles. Le problème est limité aux dalles d'une largeur unitaire. Après avoir posé la question en forme générale on examine quelques cas particuliers et on donne des exemples numériques et des graphiques pour faire voir l'influence des réactions tangentielles entre dalles et sol.

Z. Wasiutyński.

Deev (Deyev), V. M.: On the solution of the space problem of elasticity theory. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 29—31, russ. und engl. Zusammenfassung 31—32 (1958) [Ukrainisch].

Die Komponenten des Spannungstensors σ in den Punkten eines ideal elastischen Körpers, die den Gleichgewichtsgleichungen und den Kompatibilitätsbedingungen der Deformationen genügen, werden durch den harmonischen oder den biharmonischen symmetrischen Tensor zweiten Ranges φ mit Hilfe der Formeln

$$\sigma = -\frac{\nabla^4 \dots \Phi}{1-\nu} + \Delta \left[\frac{\nu \nabla^2 \dots \Phi}{1-\nu} I + \nabla^2 \Phi + \Phi \nabla^2 + C \nabla^2 \Phi_I \right]$$

dargestellt, wo ∇ und Δ der Hamiltonsche und der Laplacesche Operator, ν der Poissonsche Koeffizient, I der Kugeltensor und φ_I die erste Invariante des Tensors φ ist. — Nach den Spannungen können die Verschiebungen

$$u = 2(1+\nu) \frac{1}{E} \left[-\frac{\nabla^3 \dots \Phi}{2(1-\nu)} + \nabla \Delta \Phi + \frac{1}{2} C \nabla \Delta \Phi_I \right]$$

gefunden werden. — Es wird darauf hingewiesen, daß sich die vorgeschlagenen Darstellungen der allgemeinen Lösung der Gleichungen der Elastizitätstheorie durch Wahl der speziellen Werte der Konstante C auf die früher bekannten zurückführen lassen. — Bibliographie: 9 Titel.

L. A. Tolokonnikov (R. Ž. Mech. 1958, 11374).

Knops, R. J.: A method for solving linear thermoelastic problems. *J. Mech. Phys. Solids* 7, 182—192 (1959).

The author proposes a new method of a solution of the classical equations of thermoelasticity which constitutes an operation of subtraction of two isothermal equations for two arbitrary Poisson's ratios. The subtraction of these equations gives homogeneous boundary conditions for the tractions or displacements and provides an equation determining the temperature field. Thus in this method of analysis the function of temperature and the temperature boundary conditions aren't known and must be found in an inverse fashion from a suitable isothermal elastic state. It is the chief disadvantage of the method that the state stresses σ_{ij} not always produces realistic temperature fields. The author illustrates his method by a few simple examples and confirms there is no reason to doubt that other problems can be treated by the same means. It is an advantage method. The author supplies a relation between the two branches of elasticity (elasticity and thermoelasticity) and shows that each isothermal problem is related in a definite manner to a thermoelastic one. Knop's method enriches a number of known methods of the integration of the thermoelastic equations (Goodier's method or direct method determination of stress from the stress equations) and is characterised by an originality and an ingeniousness.

Witold Nowacki.

Stanišič, M. M. and R. M. McKinley: A note on thermal stresses in hollow cylinders. *Ingenieur-Arch.* 27, 227—241 (1959).

Die Bestimmung des Spannungs- und Dehnungsfeldes im dickwandigen Zylinder unter Voraussetzung von Axial- und Rotationssymmetrie bei stationärem Temperaturfeld stellt eine sehr wichtige praktische Anwendung der theoretischen Lösung des ausgewählten Problems der Elastizität dar. Verff. haben die Lösung von Trostel (dies. Zbl. 86, 189) für $\nu \neq 0,5$ verallgemeinert und die annähernde Korrektur der Formeln von Trostel mittels der entsprechenden Funktion $\eta = \psi - \psi_{(1/2)}$ durch-

geführt:

$$\tau_{rr} = \frac{\psi}{r} = (\tau_{rr})_{1/2} + \frac{\eta}{r} = -p_i - (p_0 - p_i) \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} + \frac{1}{1-\nu} \varphi_3(r_0) \left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} - \frac{\varphi_3(r)}{\varphi_3(r_0)} \right),$$

$$(*) \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{d\psi}{dr} = (\tau_{\theta\theta})_{1/2} + \frac{d\eta}{dr} = -p_i - (p_0 - p_i) \frac{Er^{-2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} + \dots \text{ usw.}$$

$$\tau_{zz} = \nu(\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta}) + \dots \text{ usw.},$$

wo $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ die von Trostel eingeführten Integrale sind. Verff. haben diese Formeln auch für $\nu = 0,5$ und konstante physikalische Eigenschaften (E_0 , α_0) beim Temperaturfeld: $T(r) = T_i - (T_i - T_0) \log(r/r_i) / \log(r_0/r_i)$ aufgestellt. Man muß aber für $E(T)$ und $\alpha(T)$ die annähernden Formeln (*) anwenden. Für die genaue Bestimmung der Funktion ψ haben die Verff. die numerische Lösung der Differentialgleichung:

$$\psi'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{E'}{E} \right) \psi' + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \psi = - \frac{1}{1-\nu} \alpha(T) E \frac{dT}{dr}$$

durchgeführt. Es werden auch für zwei praktische Beispiele die Spannungen τ_{rr} und $\tau_{\theta\theta}$ mittels der: A. numerischen, B. annähernden Lösung und C. für E_0 , α_0 , $\nu = 0,5$ berechnet. Der Fehler der annähernden Methode beträgt weniger als 3% der genauen Lösung (im Vergleich dazu für Fall C. bis 32%). J. Zawadzki.

Ambarcumjan, S. A. und M. A. Zadojan: Zum Problem der elastoplastischen Verbiegung von Balken. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 10, 130—132 (1958) [Russisch].

On cherche à déterminer l'influence des contraintes tangentielles sur le fléchissement des poutres en état partiellement plastique. L'étude est basée sur les résultats des recherches de MM. W. Prager et P. G. Hodge. Elle se limite au cas d'une poutre de section rectangulaire. Les résultats sont comparés aux conclusions des recherches précédentes. Z. Wasiutyński.

Olszak, Wacław und Zenon Mróz: Note on the completeness of the elastic-plastic solution to certain boundary value problem for the eccentric ring. Arch. Mech. stosow. 10, 441—444 (1958).

Untersucht wurde die Existenzmöglichkeit anderer Lösungen als der in der Arbeit Olszaks (ibid. 417—440) für einen exzentrischen Ring angeführten. Es wurde eine Bedingung gegeben, bei deren Erfüllung die in der Arbeit gegebene Lösung einzig ist. W. Urbanowski.

Ševčenko (Shevchenko), K. N.: Elastico-plastic deformation of a plane by the action of a concentrated force. Doklady Akad. Nauk SSSR. 115, 473—474 (1957) [Russisch].

Boyce, W. E.: A note on strain hardening circular plates. J. Mech. Phys. Solids 7, 114—125 (1959).

The author considers a circular uniformly loaded plate with partially clamped edge, i. e. a simply supported plate loaded on the edge by a moment M proportional to the angle of rotation of the radius $M = k dw/dr$. The rigid-plastic Tresca's yield condition is assumed, as well as the Prager type hardening theory of the plastic potential and assumption of regular progression. Thus the author confined himself to the case when the stress-point moves together with the side AB of Tresca's quadrangle, and at A $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ whereas at B $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_0$ (σ_0 is the tensile yield stress). The solution of the equilibrium and compatibility equations completed by flow rules, boundary and continuity conditions on the basis of existing in literature solutions, led to distinguishing of three zones corresponding to the stress-point on the side A (the central part of the plate), on the segment AB and on the side B (outer part of the plate). The values of moments and deflections have been determined in terms of the radius and the loading for all zones, and also the values of radii of circles

separating the distinct zones. Numerical computations have been carried out for $k = c/R$ where c is the hardening coefficient, R the plate radius. This is the maximum value of k for which the applied procedure is valid. The results have been presented in form of graphs. A discussion is given of the effect on the stress and displacements of a perturbation of c and $M_0 = \sigma_0 k^2$ from their mean values. *W. Urbanowski.*

Lepin, G. F.: Zur statistischen Theorie des Kriechens und der Relaxation. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 9, 134—136 (1957) [Russisch].

The author gives a representation of the general equation of deformation of a given sample of metal, based on the theory of dislocations and some probabilistic considerations. He shows that the speed of deformation,

$$d\varepsilon/dt = mb\varepsilon(t) \exp[-\alpha(\sigma_1 - \sigma(t)) + b^{-1} \log(\varepsilon(t)/\varepsilon_1)],$$

where ε_1 and σ_1 are the values of the plastic deformation and of the corresponding stress, resp., of the sample at a given initial loading at $t = t_0$, $\varepsilon(t)$ and $\sigma(t)$ are the values of the plastic deformation on the sample and of the stress applied to the sample, resp., at $t > t_0$, m, b, α are constants; in general $\sigma_1 - \sigma(t)$ is some function $\varphi(\varepsilon(t), t)$ of both $\varepsilon(t)$ and t . Specializing the form of φ one obtains the general equation of creep, the equation of relaxation etc. *P. Medgyessy.*

Malyšev, B. M.: Plastisches Fließen bei gemeinsamer kontinuierlicher Dehnung und Torsion unter der Wirkung kleiner Drehmomente. *Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim.* 13, Nr. 1, 55—68 (1958) [Russisch].

The coincidence of the axes of the stress tensor with those of the strain rate tensor has been tested experimentally for combined tension with a force P and torsion with a small constant torque M . The measure of the degree of coaxiality is the function $\psi = \dot{\varphi} P r_0^2 / M V (1 + \varepsilon)$ where φ is the angle of twist, $\dot{\varphi}$ its time derivative, V the stretching rate, r_0 the mean initial radius for tubes or the outer radius for cylindrical test-pieces and ε the axial elongation. In the case, where the stress tensor and the strain rate tensor are coaxial we should have $\psi = 3$ for tubes and $\psi = 6$ for cylinders. The form of the function ψ is shown by means of numerous diagrams. It is found, among other things, that for brass tubes the coaxiality condition is satisfied only in an approximate manner. For cylindrical test pieces of brass and also of steel and aluminium this coaxiality condition is fulfilled in a satisfactory manner. Copper test-pieces show considerable deviations from coaxiality with small torques M .

W. Urbanowski.

Ripianu, Andrei: Contribution à l'étude des vibrations transversales des cordes. *Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat.* 10, 435—446, russ. und französ. Zusammenfassung 445—446 (1959) [Rumänisch].

On étudie, en utilisant les procédés classiques, la configuration $y = y(t, x)$ d'une corde vibrante, dont un bout est fixe et l'autre N se déplace sur la droite fixe $y = 0$, suivant une loi donnée et dans les conditions initiales $t = t_0$, $y = f(x)$, $\partial y / \partial t = g(x)$, données. L'intégrale obtenue est considérée, en particulier, lorsque le mouvement imposé à N est tel que $x(t) = p/t$ ou bien tel que $x(t) = p t^2$, où $p = \text{const.}$

A. Froda.

Molotkov, I. A. (J. A.): On the theory of a longitudinal impact of thin bars. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron 4) 139—150, engl. Zusammenfassung 149 (1958) [Russisch].

Le problème d'impacte axial de deux corps dont les centres d'inertie et les centres d'application des forces développées par impacte sont situés en ligne droite est posé en forme générale aux points du vue physique et mathématique pour pouvoir résoudre les problèmes les plus divers d'une manière uniforme sans être obligé d'introduire des suppositions auxiliaires. On discute la manière de poser les problèmes, puis on passe à la discussion des problèmes d'impacte de barres minces. On déduit les équations

des vibrations et des formules pour le calcul des pressions sur l'extrémité de la barre. On discute les problèmes d'impacte d'une barre déformable contre un demi espace indéformable et d'impacte entre un corps indéformable et une barre libre. On finit par comparer les résultats d'analyse aux expériences et on mentionne l'influence des déformations plastiques.

Z. Wasintyński.

Hydrodynamik:

● **Lojejanskij, L. G.: Mechanik der Flüssigkeiten und der Gase.** [Mechanika židkosti i gaza] 2. überarb. u. erg. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 784 S. R. 16,50 [Russisch].

Diese zweite Auflage der im Jahre 1950 erschienenen „Mechanik der Flüssigkeiten und der Gase“ wurde bedeutend umgearbeitet und ergänzt, was einerseits zur besseren Darlegung des Stoffes geführt hat, andererseits gelang es auf diese Weise dem Verf., praktisch alle Probleme der modernen Hydro- und Aeromechanik in diesem Buch zu behandeln. Die Darlegungen beruhen fast ausschließlich auf der Verwendung von Vektor- und Tensorrechnung. Der einleitende Abschnitt enthält eine kurzgefaßte Geschichte der Forschungen auf dem Gebiete der Hydromechanik, wobei vor allem die russische Forschung berücksichtigt wird. Im ersten Kapitel werden die Kinematik des flüssigen Mediums und die Tensorrechnung behandelt. Im folgenden Kapitel werden vom Verf. allgemeine Bewegungsgleichungen des flüssigen Mediums zusammengestellt. Auf diese zwei ersten einleitenden Kapitel folgt die Theorie der idealen Flüssigkeiten und Gase, der der Verf. 340 Seiten gewidmet hat. Der umfangreiche Stoff dieses Teiles ist in fünf Kapitel gegliedert, und zwar werden zuerst die Grundgleichungen der Dynamik idealer Flüssigkeiten und Gase aufgestellt und dann die eindimensionale Bewegung der Gase, die ebene wirbelfreie Bewegung der Flüssigkeiten und der Gase und zuletzt die räumliche Bewegung der Flüssigkeiten und der Gase eingehend erörtert. Der Rest des Buches enthält auf etwa 300 Seiten die Theorie der zähen Flüssigkeiten und Gase. Das achte Kapitel wird der laminaren inkompressiblen Strömung und vor allem der laminaren Grenzschicht gewidmet. Das nachfolgende Kapitel bringt die bisherigen Kenntnisse über die turbulente Strömung, und das zehnte Kapitel befaßt sich mit der Dynamik der zähen Gase. Das Buch kann allen Ingenieuren und Forschern auf dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik sehr empfohlen werden. Als Einleitung oder Lehrbuch für die Studierenden ist das Buch nicht geeignet, da es umfangreiche mathematische Kenntnisse voraussetzt, ohne die Verf. die so große Menge des Stoffes hätte nicht zusammenfassen können.

J. Poláček.

● **Wilson, D. H.: Hydrodynamics.** London: Edward Arnold (Publishers) Ltd. 1959. VIII, 149 p. 30 s. net.

In dem vorliegenden Buch entwickelt Verf. die theoretischen Grundlagen der klassischen Hydrodynamik. Das erste Kapitel deduziert die allgemeinen Bewegungsgleichungen bei Vernachlässigung der Viskosität der Flüssigkeit. Der folgende Abschnitt geht ausführlich auf zweidimensionale Bewegungen ein. Die Theoreme von Blasius bzw. Lagally-Kutta-Joukowski werden dazu erörtert. Beispiele wie die der Bewegung eines Kreiszylinders werden gegeben. Im dritten Kapitel wird die zweidimensionale Wirbelbewegung diskutiert. Auch hier werden spezielle Probleme, z. B. die Wirbelung zwischen parallelen Wänden, die Kármánsche Wirbelstraße besprochen. Das vierte Kapitel umfaßt die konforme Transformation von einer Ebene auf eine andere; dabei werden nur diejenigen Transformationen dargestellt, die für die Hydrodynamik von Wichtigkeit sind, beispielsweise die Joukowski-Transformation und die Schwarz-Christoffel-Transformation. Ein Abschnitt über die axialsymmetrische Bewegung schließt sich an. In diesem Falle ist die Bewegung in allen Ebenen,

die durch die Achse gehen, die gleiche. Im Schlußkapitel wird auch die Viskosität der Flüssigkeit bei der Bewegung mitberücksichtigt. Hier wird die laminare Bewegung theoretisch einer Diskussion unterzogen. Auch zueinander ähnliche Bewegungen im Zusammenhang mit der Reynoldsschen Zahl werden diskutiert. Der besondere Wert dieses ausgezeichneten Buches liegt darin, daß die Theorie an zahlreichen Aufgaben erprobt werden kann. Damit wird eine Rechentechnik vermittelt, welche die Lektüre des Buches besonders wertvoll gestaltet.

H. Falkenhagen.

Sretenskij, L. N.: Unveröffentlichte Manuskripte A. M. Ljapunovs. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijun'-Ijul' 1956, 3, 490—500 (1958) [Russisch].

Verf. unterbreitet Gedanken aus einer Anzahl unveröffentlichter Manuskripte von A. M. Ljapunov, die im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR aufbewahrt sind. Sie beziehen sich auf Fragen der Hydrodynamik und analytischen Mechanik. Der erste Beitrag behandelt die Bewegung eines starren Körpers mit einem Hohlraum, der mit Flüssigkeit angefüllt ist. Die mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips aufgestellten Bewegungsgleichungen werden auf den Spezialfall angewandt, in dem der Hohlraum von einem Torus begrenzt wird. Die Hauptaufgabe von Ljapunov besteht in der Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials, wobei gewisse Reihenentwicklungen eine Rolle spielen. Weiterhin wird eine Untersuchung über die Gleichgewichtsfiguren und Dichteverteilungen rotierender Flüssigkeiten angeführt, und es wird auf eine Arbeit über die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit eingegangen. Einige rein mathematische Betrachtungen betreffen das Vollständigkeitsproblem bei den Kreis- und Kugelfunktionen, das in Zusammenhang mit dem Studium von Gleichgewichtsfiguren steht. Dabei steht die Parseval'sche Gleichung im Mittelpunkt, deren Anwendung auf die Lösung von Aufgaben aus der Variationsrechnung erörtert wird. Schließlich folgen noch Beiträge Ljapunovs zur Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern, zu denen z. B. Untersuchungen aus der Potentialtheorie Anlaß gaben.

R. Reifig.

Sharma, S. K.: Rotation of a plane lamina in a visco-elastic liquid. Appl. sci. Research. A 9, 43—52 (1959).

In einer auf Oldroyd zurückgehenden Gleichung wird den elastischen Eigenschaften der Flüssigkeit dadurch Rechnung getragen, daß in die Verknüpfung zwischen Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitstensor zusätzlich zur Viskosität eine Relaxations- und eine Retardationskonstante aufgenommen werden. Für die Geschwindigkeitskomponenten sind die gleichen Ansätze wie bei v. Kármán im rein viskosen Fall gemacht worden. Die in den Geschwindigkeitsprofilen noch freien Konstanten sowie die Grenzschichtdicke werden mit Hilfe der Integralmethode von Pohlhausen berechnet. An Hand eines numerisch durchgeführten Beispiels für eine spezielle Kombination der Zeitkonstanten zeigen sich gegenüber dem rein viskosen Fall folgende Abweichungen: Die Elastizität vergrößert die Grenzschichtdicke und in der Grenzschicht die Geschwindigkeit in Richtung der Scheibenachse, sie verringert die Umfangsgeschwindigkeit und das Reibungsmoment. Im Profil der Radialgeschwindigkeit tritt teils eine Vergrößerung, teils eine Verringerung auf. Die Grenze zwischen beiden rückt mit wachsender Elastizität näher zur Scheibe.

F. Schultz-Grunow.

Patraulea, N. N. et L. Dumitrescu: Profils à jet en courant limité. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 657—661, russ. und französ. Zusammenfassung 660—661 (1957) [Rumänisch].

Es wird die Strömung um Profile mit Strahlklappe innerhalb der Wände eines Windkanals untersucht. Das Problem wird gelöst durch konforme Abbildung des Strömungsbereiches im Innern eines Rechtecks und unter der Annahme, daß die Lösung eine Entwicklung in doppelt trigonometrische Reihen zuläßt.

V. N. Constantinescu.

● Fedorov, É. A.: Die Bewegung einer Platte von unendlicher Spannweite nahe der freien Oberfläche einer idealen gewichtslosen Flüssigkeit. [Dviženie plastinki beskonečnogo razmacha v blizi svobodnoj poverchnosti ideal'noj nevesomoj židkosti.] (Arbeiten des Zentralen aero- und hydrodynamischen Instituts nam. Prof. N. E. Žukovskij. Nr. 711). Moskau: Staatsverlag für die Verteidigungsindustrie 1958.41 S. R. 2,70 [Russisch].

In der Arbeit wird die Bewegung einer Platte von unendlicher Spannweite nahe der freien Oberfläche einer idealen gewichtslosen Flüssigkeit an Hand des bekannten Kirchhoffschen Hodographenverfahrens gelöst. Vor der Berechnung müssen vier Parameter, nämlich die Plattenbreite, der Anströmwinkel, der Ablösungspunkt sowie die Dicke der oberen Schicht angegeben werden. Die analytische Lösung kann dann ohne Schwierigkeiten gefunden werden. Die numerischen Resultate sind in den Abbildungen für verschiedene Fälle wiedergegeben. Die oben erwähnte Aufgabe hängt mit dem die Bewegung eines isolierten Profils in einer idealen gewichtslosen Flüssigkeit einschließenden Problemkomplex, der von der Tschaplyginschen Schule bearbeitet wurde, eng zusammen und wird auch in einer ähnlichen Weise behandelt.

M. Růžicka.

Kostjukov (Kostiukov), A. A.: On the lifting force of source and dipole in bounded fluid stream. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 547—550 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 389—391 (1959).

In einer schweren Flüssigkeit endlicher und konstanter Tiefe bewege sich eine hydrodynamische Singularität (Quelle oder Dipol) in eine der freien Oberfläche parallele Richtung. Für die durch die Flüssigkeit auf die Singularitäten in vertikaler Richtung ausgeübten Kräfte werden in den zwei Grenzfällen hoher und niedriger Geschwindigkeit Näherungsausdrücke gegeben. Diese Näherungsausdrücke haben die Form von unendlichen Reihen einfacher Gestalt. In der Nähe einer vertikalen Wand erfährt eine zur Wand parallel bewegte Quelle auch einen seitlichen Widerstand. In den zwei oben genannten Grenzfällen werden wieder Näherungsausdrücke einfacher Gestalt für diesen lateralen Widerstand angegeben.

J. A. Geurst.

Parehomovskij (Parkhomovskii), S. I.: Virtual masses of some curvilinear contours immersed in detached flow. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 827—833 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 585—588 (1959).

Pychteev (v. ce Zbl. 70, 199) a trouvé une famille des courbes, dépendant de deux paramètres, pour laquelle peuvent être construites les solutions exactes du problème des sillages. L'A. étudie l'écoulement plan qui se produit lorsque une telle courbe est mise brusquement en mouvement (translation ou rotation). Les résultats sont illustrés par un exemple où l'un des paramètres déterminant la courbe est égal à 1.

C. Woronetz.

Borisova, É. P., P. P. Korjavov (Koriavov) and N. N. Moiseev: Plane and axially symmetrical automodel (similarity) problems of penetration and of stream impact. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 490—507 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 347—360 (1959).

In dieser Arbeit wird eine Reihe von Problemen betrachtet, die eng zusammenhängen mit dem Problem des vertikalen Stoßes eines Keiles oder Kegels auf eine ungestörte Wasseroberfläche in der Form, wie es bereits von H. Wagner (1932) und L. I. Sedow (1934) behandelt wurde. Das heißt u. a., daß der Einfluß der Gravitation vernachlässigt wird. In der vorliegenden Theorie wird zugelassen, daß die Eintrittsgeschwindigkeit eine willkürliche Potenz der Zeit ist. Die Wasseroberfläche kann außerdem zur Zeit des Eintretens die Form eines Keiles oder Kegels haben, dessen Symmetrieachse mit der des keil- bzw. kegelförmigen Körpers zusammenfällt. Verwandte Probleme, die betrachtet werden, sind solche, wo zwei Wasserkeile oder -kegel sich gegenseitig begegnen und wo ein Wasserkeil oder -kegel senkrecht auf

eine ebene Platte stößt. Durch Ähnlichkeitsbetrachtungen und Einführung neuer Variablen wird die Reduzierung auf ein zeitunabhängiges Problem ermöglicht. Wird nun auf der freien Oberfläche des Wassers die dem zugehörigen Teil des betreffenden Körpers parallele Komponente der Geschwindigkeit betrachtet, dann stellt sich heraus, daß diese Komponente eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt, in der die Form der freien Oberfläche noch als unbekannte Funktion auftritt. Für die letztere Funktion wird ein Ansatz gemacht, der auf Erhaltungsgesetzen gegründet ist. Die Differentialgleichung hat zwei Randbedingungen. Durch geeignete Wahl der Koeffizienten in dem oben genannten Ansatz wird eine der zwei Randbedingungen befriedigt. Die Lösung der Differentialgleichung kann im allgemeinen Falle nur auf numerischem Wege geschehen. Wenn die Lösung bekannt ist, wird der Widerstand des Keiles oder Kegels durch eine Integration erhalten. Die numerischen Resultate werden mit einigen experimentellen und früheren theoretischen Ergebnissen verglichen, wobei eine gute Übereinstimmung gefunden wird. Die für den Widerstand erhaltenen Werte werden im Falle praktischer Anwendung für Keil- oder Kegelwinkel bis zu 140° zuverlässig genannt. Schließlich wird der Zusammenhang mit dem von Lavrent'ev [Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4 (76), 41—56 (1957)] gegebenen Modell für den kumulativen Effekt einer Explosion mit konischer Einhüllenden besprochen.

J. A. Geurst.

Jur'ev, I. M.: Zur Berechnung der Düsen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Masinostr. 1959, Nr. 4, 140—141 (1959) [Russisch].

L'équation générale concernant l'écoulement d'un gaz parfait en trois dimensions est simplifiée sous la proposition que les vitesses orthogonales à l'axe des x sont petites. L'équation reste tout de même nonlinéaire et présente la partie principale de l'équation générale pour un grand intervalle des nombres de Mach. L'A. trouve la solution exacte d'une autre équation qui ne diffère que très peu de l'équation considérée et analyse cette solution qui peut être appliquée, par exemple, à l'étude d'un écoulement symétrique par rapport à l'axe d'un tuyau.

C. Woronetz.

Ljubimov, G. A.: Über die Kompression eines Gaszylinders durch den elektrischen Strom. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 6, 13—17 (1959) [Russisch].

Verf. löst das Problem der Kompression eines Gaszylinders durch den elektrischen Strom. Er setzt voraus, daß der elektrische Strom im Anfangsmoment auf der Zylinderoberfläche fließt und daß das entstandene Magnetfeld außerhalb des Zylinders den Gaszylinder komprimiert, wobei eine in der Richtung zur Zylinderachse fortschreitende Stoßwelle gebildet wird. Das System der Gleichungen für die eindimensionale instationäre Bewegung des Idealgases wird vom Verf. mit der Methode der Entwicklung nach dem kleinen Parameter gelöst, für den das Verhältnis der Gasdichten vor und hinter der Stoßwelle gewählt wird. Die numerischen Berechnungen wurden mit der elektronischen Rechenmaschine „Strela“ durchgeführt. Die Lösung ist vor allem bei der Untersuchung der starken Gasentladungen von entscheidender Bedeutung.

J. Polásek.

Sacerdote, Ugo: Espressioni delle forze agenti su di un corpo aerodinamico provvisto di un condotto interno propulsivo. Aerotecnica 40, 56—63 (1960).

Popp, Simona: Corrections de compressibilité dans le problème du bilame symétrique. C. r. Acad. Sci., Paris 249, 619—621 (1959).

Etude de l'écoulement subsonique, dans le plan $z = x + iy$, d'un fluide compressible infini en présence d'un bilame symétrique par rapport à la vitesse U à l'infini en amont, avec formation d'un sillage à l'arrière de l'obstacle. Si M est le nombre de Mach à l'infini, le potentiel complexe est de la forme $f = \varphi + i\psi = f_0(z) + M^2 f_1(z, \bar{z}) + \dots$, où $f_0(z)$ est le potentiel complexe de l'écoulement incompressible relatif au même obstacle et à la même vitesse U : quant à $f_1(z, \bar{z})$, il

s'exprime au moyen de $f_0(z)$, à une fonction de z près dont la détermination est faite, dans le plan de Levi-Civita, compte tenu des conditions aux limites sur les parois et sur les lignes libres. On arrive ainsi à une équation différentielle linéaire. Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions de détachement des lignes libres, précisées par le réf. [Actes du IX^e Congrès internat. Méc. appl., Bruxelles 1957, 1, 464—475 (1957)] dans le cas général. Finalement, la résistance éprouvée par l'obstacle est exprimée à l'aide de la fonction de Stirling dont l'argument dépend de l'ouverture du bilame.

C. Iacob.

Stark, Valter J. E.: A method for solving the subsonic problem of the oscillating finite wing with the aid of high-speed digital computers. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 41, 36 p. (1958).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Luftkraftverteilung eines harmonisch schwingenden Flügels endlicher Spannweite im Unterschallbereich zu berechnen. Ausgangspunkt ist eine bereits bekannte singuläre Integralgleichung in zwei Variablen, die das von Landahl eingeführte integrierte Beschleunigungspotential mit dem Abwind an der Oberfläche des (unendlich dünnen) Flügels in Beziehung setzt. Zur Beschreibung der Flügelschwingungen werden gewisse elementare Bewegungsformen für die Flügelbiegung und Flügeldrehung zugrunde gelegt, mit denen sich durch lineare Überlagerung allgemeinere Bewegungen beschreiben lassen. Die zugehörigen Luftkräfte findet man durch entsprechende lineare Überlagerung. Da diese instationären Luftkräfte insbesondere für Flatterrechnungen Verwendung finden sollen, wird die Matrix der Luftkräfte definiert, welche die verallgemeinerten Kräfte nach Lagrange beschreibt, wenn man die elementaren Bewegungsformen als verallgemeinerte Koordinaten auffaßt. Diese Luftkraftmatrix ist übrigens nicht hermitesch und hängt, abgesehen von den zugrunde gelegten Freiheitsgraden und der Flügelform, noch von der sog. reduzierten Frequenz und von der Machschen Zahl ab. Zur angenäherten Lösung der Integralgleichung wird für das integrierte Beschleunigungspotential ein Reihenansatz verwendet, wie ihn Glauert in seiner Theorie der stationären inkompressiblen Strömung benutzt, weil dadurch gewisse Bedingungen an der Flügelhinterkante und an den Flügelenden erfüllt sind. Sodann wird der Flügel mit einem relativ engen Netz von Quadraten überzogen. In jedem der Quadrate wird die im Integranden des Doppelintegrals auftretende Potentialfunktion durch Legendresche Polynome approximiert, so daß die Integration ausgeführt werden kann. Dabei treten Schwierigkeiten auf in den Quadraten, die von Flügelkanten berührt oder geschnitten werden. Die Summe der so berechneten Teilintegrale der einzelnen Quadrate liefert eine Näherung des Gesamtintegrals. Damit wird die Integralgleichung in gewissen Kollokationspunkten befriedigt oder, wie in den behandelten Beispielen, nach der Methode des kleinsten quadratischen Fehlers für ein ebenes Punktgitter angenähert gelöst. Das Verfahren wurde bereits numerisch erprobt am Beispiel eines rechteckigen Flügels im Sonderfall der inkompressiblen Strömung. Die Ergebnisse sind in Zahlentafeln und Diagrammen zusammengestellt. Ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Forscher läßt recht gute Genauigkeit des angewandten Verfahrens vermuten. Weitere numerische Ergebnisse werden angekündigt. Das vorgesehene Arbeitsprogramm ist ungeheuer umfangreich und läßt sich überhaupt nur bei Benutzung extrem schneller elektronischer Rechenmaschinen bewältigen. Die in Aussicht gestellten numerischen Ergebnisse wären für die Luftfahrtforschung zweifellos von unschätzbarem Wert.

J. Dörr.

Koppe, Eberhard: Zur transsonischen Kontroverse: Experimentelle Bestätigung der Schäferschen Stabilitätsaussage. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. math.-phys. Kl. 1960, 173—178 (1960).

Unter bestimmten Anström- und Randbedingungen gibt es Unterschallströmungen mit stoßfreien lokalen Überschallgebieten. Von einem Großteil der Fachleute

wird angenommen, daß es bei geänderten Anströmbedingungen und gleichen Randbedingungen keine stoßfreien Nachbarlösungen gibt. In der Arbeit soll auf experimentellem Wege im Anschluß an eine theoretische Arbeit M. Schäfers nachgewiesen werden, daß es stoßfreie Nachbarlösungen gibt. Zu diesem Zweck wird die Strömung in einem gebogenen Kanal untersucht, dessen Konturen einer exakten Lösung entnommen sind, und gezeigt, daß eine Änderung der Durchströmung zu keinem das lokale Überschallgebiet abschließenden Stoß führt. Dagegen ist einzuwenden, daß ein Stoß in Form einer äußerst schwachen Enveloppenbildung auftreten kann. Bei Durchführung eines analogen Versuches in reiner Überschallströmung gäbe es z. B. keine Nachbarlösung wegen des Auftretens äußerst schwacher Stöße. Solche sind in den vorliegenden Versuchen tatsächlich zu beobachten, können ihren Ursprung aber ebenso gut in Grenzschichteffekten, Absaugungs- oder Kondensationseffekten haben. Der Ref. glaubt also nicht, daß ein entscheidender Beitrag zur „transsonischen Kontroverse“ geliefert worden ist und zweifelt sehr, daß ein solcher mit Rücksicht auf die Feinheit des Phänomens überhaupt durch Versuche geliefert werden kann.

K. Oswatitsch.

Pien, Yen-kwei: The solution of Tricomi's equation for a transonic jet. Sci. Sinica 7, 946—963 (1958).

Etude d'un jet transsonique bidimensionnel à parois planes, inclinées respectivement des angles θ_0 et $-\theta_0$ sur l'axe des abscisses. Avec l'approximation usuelle, on a à trouver une solution de l'équation $\psi_{\xi\xi} - \xi \psi_{\eta\eta} = 0$ avec les conditions aux limites de Tricomi: $\psi = 0$ pour $-\infty < \xi \leq 0$, $\eta = 1$ (ligne OA); $\psi = 0$ pour $-\infty < \xi \leq 0$, $\eta = 0$ (ligne OB); $\psi = \frac{1}{2} Q \eta$ sur la caractéristique BC $\eta = \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}$, $0 < \xi < 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$, Q étant une constante positive. En passant aux variables caractéristiques, on arrive à l'équation bien connue d'Euler-Poisson, ce qui permet de résoudre le problème auxiliaire de Cauchy avec les données $\psi(0, \eta) = f(\eta)$, $\psi_{\xi}(0, \eta) = g(\eta)$ sur la ligne sonique $\xi = 0$, $0 \leq \eta \leq 1$. Cette solution est bien déterminée dans le triangle ABC limité par les deux caractéristiques passant par des extrémités A et B , de coordonnées $\xi = 0$, $\eta = 1$ et $\xi = 0$, $\eta = 0$. Connaissant ψ sur BC , on en déduit une relation, bien connue, entre $f(\eta)$ et $g(\eta)$. En suivant le procédé esquissé par Tricomi, on cherche ensuite l'expression de ψ dans le domaine subsonique en admettant que $f(\eta)$ soit connu et en imposant que la dérivée normale sur la ligne sonique soit $g(\eta)$, de façon à réaliser le prolongement analytique de la solution du domaine supersonique à celui subsonique. Utilisant la méthode des images, l'A. réussit à obtenir une solution ayant la singularité algébrique de la solution élémentaire de Tricomi au point $\xi = 0$, $\eta = \eta_0$ ($0 < \eta_0 < 1$) et vérifiant de plus les conditions données sur OA et OB . Dès lors, l'application de la formule de Green conduit à une nouvelle relation intégrale entre $f(\eta)$ et $g(\eta)$. En admettant que $f(\eta)$ soit développable en une série uniformément convergente $f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi\eta$, cette relation subit une simplification importante et finalement on arrive à une équation intégrale singulière pour la fonction $\varrho(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}} g(\sqrt{\eta})$, qu'on résout par réduction au problème de Riemann-Hilbert. Enfin, l'expression de $g(\eta)$ est obtenue, ce qui résout le problème posé initialement.

C. Iacob.

● Handbook of supersonic aerodynamics. Vol. 3. Section 6. Navord Report 1488. Washington: U. S. Government Printing Office 1957. \$ 1,50.

Im bisher vorliegenden ersten Teil des dritten Bandes wird das Tragflügelprofil behandelt. Dreidimensionale Flügel und Rotationskörper sollen in den beiden noch fehlenden Teilen untersucht werden. Somit ist der vorliegende Teil zugleich Grundlage für den nächstfolgenden. Dieser Abschnitt des ringbuchartigen Handbuchs soll den Entwurfsingenieur rasch in die Methode der theoretischen Berechnung der Druckverteilung und der Beiwerte von Auftrieb, Längsmoment und Wellenwider-

stand einführen. Dazu ist der Textteil kurz aber klar gefaßt und mit den notwendigen einfachen Endformeln ohne Ableitungen versehen. Beigefügte Skizzen und eine Zusammenstellung der verwendeten Symbole sichern das Verständnis der Formeln. Wertvoll sind die für Druckverteilung und Beiwerte auf 52 Seiten gegebenen Diagramme. Für Doppelkeilprofile (manchmal mit einem Mittelstück konstanter Dicke) und für Kreisbogenprofile sind die linearisierte Theorie und Theorien höherer Ordnung bei mehreren Machzahlen, Anstellwinkeln und Dickenverhältnissen über jeweils einem dieser drei Parameter aufgetragen bis zur Stelle der Stoßablösung. Weitere Diagramme zeigen exakte Ergebnisse, die mit der Wellenausbreitungsmethode (Prandtl-Meyer) gewonnen werden, den Einfluß der Änderung der Stelle der maximalen Dicke und von Profilwölbungen sowie den Reibungseinfluß. Zuletzt werden Vergleiche zwischen Theorie und Experiment gegeben. Bestimmte Vorzahlen vor jedem der Diagramme ordnen sie den einzelnen Kapiteln des Textteiles zu, in dem außerdem jeweils auf die Diagramme verwiesen ist. Diese Unterlagen erlauben die Anwendung der Theorie nach der Art eines Rezeptes und eine Beurteilung der erforderlichen Genauigkeit der Ergebnisse an Hand des reichhaltigen Kurvenmaterials.

F. Keune.

Grodzovskij, G. L.: Gewisse Besonderheiten der Umströmung von Körpern bei hohen Überschallgeschwindigkeiten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 6, 86—92 (1957) [Russisch].

Ausgehend von den bekannten Ergebnissen für schräge Verdichtungsstöße bei Machzahlen $M \rightarrow \infty$ leitet der Verf. Näherungsformeln für die Druckverteilung im Falle der ebenen und achsialsymmetrischen Strömung um verschiedene Körper bei sehr hohen Machzahlen ab. Auf Grund dieser Ergebnisse werden Formeln für die Berechnung des Wellenwiderstandes aufgestellt und der optimale Umriß der Körper zur Erzielung des kleinsten Gesamtwiderstandes abgeleitet, wobei sowohl Wellen- als auch Reibungswiderstand berücksichtigt werden. *V. N. Constantinescu.*

Gonor, A. L. und G. G. Černyj: Über Körper geringsten Widerstands bei hohen Überschallgeschwindigkeiten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 7, 89—93 (1957) [Russisch].

Zunächst wird eine Formel für den Beiwert des Wellenwiderstandes abgeleitet, die für Körper geringer Krümmung der Kontur mit einem bereits von Newton für einen Körper geringen Widerstandes bei seiner Bewegung in einer Flüssigkeit gefundenen Ergebnis übereinstimmt. Die gegebene Formel wird zur Lösung der Variationsaufgabe benutzt, die Form von Körpern geringsten Widerstandes unter der Bedingung zu finden, daß Anfangs- und Endradius des gesuchten Ringkörpers vorgeschrieben sind. Der Beiwert für optimale Körperformen ist in impliziter Form angegeben in Abhängigkeit von den Neigungswinkeln der Kontur gegen die Körperachse für Anfangs- und Endquerschnitt. Zwei Grenzfälle sind eingehender untersucht: Körperkonturen geringer Neigung gegen die Anströmrichtung und Konturen mit senkrechter Neigung am Beginn des Ringkörpers. Der Beiwert dieser Körper optimaler Form ist nach gegebener Kurve etwa 30% kleiner als derjenige eines Kegels gleichen Dickenverhältnisses. Die Verf. stellen fest, daß die Körperformen für den Fall geringer Neigungen von denen nach der linearen Überschalltheorie errechneten optimalen Körperformen für vorgegebenes Dickenverhältnis nur wenig voneinander abweichen. Die Ergebnisse der linearen Theorie sind also auch hiernach noch bei kleinen Dickenverhältnissen bis zu höheren Machzahlen gültig als wegen der Voraussetzung der linearen Theorie oft erwartet wird. *F. Keune.*

Kadyrov, S.: Die Bewegung eines Flügels endlicher Spannweite mit Überschallgeschwindigkeit. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 8, 35—40 (1957) [Russisch].

The author considers the motion of a finite span wing in the supersonic domain. The starting equation is that of Crocco, in which there is included the Bernoulli

constant. The second equation considered is that of the conservation of matter, but remodelled so, that the density is expressed by means of the remaining terms in the Bernoulli equation. With this, the author formulates four problems: (I) given the equation of the surface of the wing and of the front bow-shock; to find the magnitudes of the velocity components and of entropy; (II) given the equation of the surface of the wing and of the characteristic surfaces; to find the magnitudes of the velocity components and entropy; (III) given characteristic surfaces and the magnitudes of the velocity components and entropy; to find other variables in the system; (IV) given the characteristic surfaces, the magnitudes of the velocity components and entropy on them; the equation of the surface of the bow-shock wave comes out from the entire procedure of solution; to find the remaining variables in the system. The author goes into a general discussion of the first problem. After some transformations, the system of equations, given above, is included into the boundary value problem in which the surface of the wing is the boundary; using the general boundary condition of the vanishing of the normal velocity component on the surface of the wing, there results a general system of equations from which one may obtain the magnitudes of the sought variables in the problem in question. Three other cases are treated in a very general way by outlining the main aspects of the procedure of solving them. A brief numerical example refers to a wing whose surface is given in the form of a function $z = \psi(x, y)$, with $\psi(x, y)$ being a polynomial in x and y .

M. Z. v. Krzywoblocki.

Ginzel, Ingeborg und Hans Multhopp: Wings with minimum drag due to lift in supersonic flow. *J. Aero-Space Sci.* **27**, 13—20, 36 (1960).

R. T. Jones hat gezeigt, daß eine Tragfläche bei gegebenem Auftrieb dann geringsten induzierten Widerstand hat, wenn die Summe der Abwinde der einmal von vorn und einmal von hinten angeströmten Tragfläche konstant ist. Diese Bedingung ergibt eine Integralgleichung für die optimale Auftriebsverteilung, zu deren angenäherter Lösung in der vorliegenden Arbeit eine Methode angegeben wird. Die Auftriebsverteilung in Tiefenrichtung wird dabei durch die ersten Glieder einer Entwicklung nach Legendre-Polynomen approximiert. Die Singularität des Kerns der Integralgleichung bei Überschreiten einer vom Integrationspunkt zum Aufpunkt führenden Machschen Linie wird umgangen, indem auch die (konstante) Abwindsumme nach Legendre-Polynomen entwickelt wird. Die Integralgleichung wird dann in ein System von linearen Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten in der Entwicklung der Auftriebsverteilung an endlich vielen Stellen in Spannweitenrichtung übergeführt. Als Lösung erhält man die optimale Auftriebsverteilung und die Anstellwinkelverteilung, die zu ihrer Realisierung nötig ist. Beispielrechnungen (mit 3 Gliedern in der Auftriebsverteilung in Tiefenrichtung und 31 Stützstellen in Spannweitenrichtung) zeigen für einen gefeilten Trapezflügel, daß eine erhebliche Widerstandersparnis gegenüber einem unverwundenen und ungewölbten Flügel von gleichem Umriß möglich ist.

E. Becker.

Stetter, Hans J.: Beiträge zum Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung. *S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **1956**, 61—86 (1957).

Das Potential einer linearisierten Überschallströmung um einen aus Rumpf und Flügel zusammengesetzten Körper wird nach dem Vorgang von Lagerstrom und Van Dyke [Douglas Aircraft Co., Report SM-13432, (1949)] als Superposition dreier Potentiale $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ dargestellt, wobei $q^{(1)}$ Lösung eines Rumpfproblems und $q^{(2)}$ im wesentlichen eines Flügelproblems ist und $q^{(3)}$ für $r = 1$ (der Rumpf ist hierbei durch einen Zylinder vom Radius $r = 1$ ersetzt) die Störung durch $q^{(2)}$ aufhebt und in der Flügelsebene keinen Beitrag liefert. Die Berechnung von $q^{(3)}$ wurde im wesentlichen von Nielsen und Pitts [NACA Technical Note 3128 (1952)] durch-

geführt, allerdings in einer Form, die der numerischen Berechnung große Schwierigkeiten bereitet (Auswertung singulärer Doppelintegrale). Dabei wird die (unstetige) Störung durch $\varphi^{(2)}$ am Rumpf in eine Fourier-Reihe zerlegt. Verf. gibt zunächst Integraldarstellungen von $\varphi^{(2)}$ und seinen Ableitungen am Rumpf, die zwar auch singular sind, deren Auswertung aber mit Hilfe programmgesteuerter Rechenanlagen möglich ist. Die mit der Fourier-Analyse dieser unstetigen Störung verbundenen Schwierigkeiten werden dadurch umgangen, daß diese Störung durch eine gewisse fiktive stetige Störung ersetzt wird, wobei die Differenz beider Störungen nicht von dem speziellen Problem abhängt und somit universale Bedeutung hat, so daß ihr Einfluß bloß einmal berechnet zu werden braucht. Die Berechnung von $\varphi^{(3)}$ gelingt dann durch Faltung dieser Störungen am Rumpf mit gewissen Hilfsfunktionen Y_{2n} , W_{2n} (der Zeiger n rührt von der Fourier-Zerlegung her), für deren Berechnung ein Differenzenverfahren angegeben wird. Für Y_0 , W_0 ist eine Tabelle angegeben [vgl. hierzu und für ein numerisches Beispiel H. J. Stetter, Dissertation T. H. München (1955)].

C. Heinz.

Dombrovskij, G. A.: Über die Grenzlinien in einem Strahl, der aus einer ebenen Düse ohne Drucksprung tritt. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 2, 115—117 (1957) [Russisch].

An einem speziellen Beispiel wird die Frage der Entstehung von Grenzlinien in einer ebenen Überschallströmung bei stationärem Ausströmen von Gas aus einer Düse in einen Raum mit konstantem Druck untersucht. Dabei soll die Strömung in der Düse einer ebenen Überschallquelle entsprechen. Bei der Untersuchung wird an Stelle der adiabatischen Kopplung zwischen Druck und Dichte die vom Verf. früher wiederholt angewandte (vgl. dies. Zbl. 78, 172) genäherte Abhängigkeit verwendet. — Es werden Bedingungen (Relation zwischen dem Öffnungswinkel der Düse und der Zahl M an der Grenze des Strahls) angegeben für die Entstehung der Grenzlinie (d. h. Vernichtung der stetigen Potentialströmung) in dem Dreieck, das durch die extreme Charakteristik der Strömung von der Quelle, den Abschnitt der Grenze des Strahls und die Charakteristik einer anderen Schär gebildet wird, oder in dem ihm stromabwärts folgenden charakteristischen Dreieck.

G. Černýj (R. Ž. Mech. 1958, 5116).

Broer, L. J. F. and J. A. Rietdijk: Measurements on supersonic free jets. Appl. sci. Research, A 9, 465—477 (1960).

Landahl, Marten T.: Unsteady flow around thin wings at high Mach numbers. J. aeronaut. Sci. 24, 33—38 (1957).

A thin wing is situated mainly along the xy -plane; the undisturbed stream flows along the x axis with a velocity $U > 0$. The time and all lengths being made dimensionless, the perturbation velocity potential Φ satisfies the differential equation

$$(1 - M^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - 2M^2\Phi_{xt} - M^2\Phi_{tt} = M^2(\gamma - 1)(\Phi_t + \Phi_x)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + M^2[\partial/\partial x + \partial/\partial t](\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2),$$

where M is the Mach number of the undisturbed stream, the third-order terms being omitted (γ = ratio of specific heats and $U = 1$). The position of the upper wing surface is given by $z = \delta h(x, y, t)$, δ being a positive parameter. With the same degree of approximation, one gets the boundary condition

$$\Phi_z(+0) = \delta(h_x + h_t) + \delta[h_x\Phi_x - h_z\Phi_{zz} + h_y\Phi_y]_{z=+0}.$$

Φ and its derivatives are vanishing far upstream. An iterative procedure is used to solve the nonlinear equation, by putting $\Phi = \varphi + \psi$, where $\varphi = O(\delta)$, $\psi = O(\delta^2)$ and by expanding φ and ψ in series of M^{-2} . The first terms for the pressure are in good agreement with those given by the Hayes-Lighthill piston theory. The additional terms obtained by the present theory give improved accuracy for moderately high Mach numbers and take also into account some three-dimensional effects.

C. Iacob.

Krasil'shikova, E. A.: Die instationären Bewegungen eines Flügels endlicher Spannweite im kompressiblen Medium. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1958, Nr. 3, 25—32 (1958) [Russisch].

Es wird die gestörte Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit, welche durch die nach einem vorgegebenen Gesetz erfolgende Bewegung eines dünnen Flügels endlicher Spannweite hervorgerufen wird (A. I. Nekrasov, *Theorie des Flügels in instationärer Strömung*, Moskau 1947; L. I. Sedov, *Ebene Probleme der Hydrodynamik und Aerodynamik*, Moskau 1950) untersucht. — Bei der Lösung der Randwertaufgaben kommt die Methode zur Anwendung, die früher bei der Untersuchung der planparallelen instationären Flüssigkeitsbewegungen entwickelt wurde [*Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk*, 1954, Nr. 2, 25—41 (1954)]. — Verf. gibt die Lösung der Aufgabe in Quadraturen an für alle Formen der instationären Bewegungen des Flügels, wenn die Grundgeschwindigkeit der Flügelbewegung eine Überschallgeschwindigkeit ist und falls sich auf der Flügeloberfläche der Einfluß des sich hinter dem Flügel erstreckenden Wirbelsystems nicht auswirkt.

Übersetzung der Zusammenfassung.

Coupry, G.: Coefficients instationnaires d'aileron en supersonique tridimensionnel. *Rech. aéronaut.* Nr. 73, 47—52 (1959).

Es sei ein unendlich dünner Tragflügel mit einer rechteckigen, um ihre Vorderkante drehbaren Klappe endlicher Spannweite und Tiefe sowie eine Überschallanströmung in der Richtung senkrecht zur Spannweite der Klappe gegeben. Die Hinterkante des Tragflügels bilde im Einflußbereich der Klappe eine geradlinige Fortsetzung der Klappenhinterkante. Ohne an der durch die Klappe verursachten Zusatzströmung an der Klappe und am Tragflügel etwas zu ändern, kann man zum Zwecke der Vereinfachung der Rechnung zwei feste, ebene Wände senkrecht zur Spannweitenrichtung einführen, welche die Tragflügelhinterkante in den Endpunkten des Einflußbereiches der Klappe schneiden. Für harmonische Schwingungen der Klappe wird dann die linearisierte Potentialgleichung für Überschallströmung gelöst, indem die Differentiale der Variablen in Spannweitenrichtung durch endliche Differenzen ersetzt werden und hinsichtlich der Variablen in Strömungsrichtung eine Laplace-Transformation durchgeführt wird. Es werden Ausdrücke für Druckverteilung, Auftrieb und Moment der Klappe angegeben.

E. Becker.

Mackie, A. G. and D. G. Weir: The propagation of shock waves of constant strength. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 56, 64—74 (1960).

Es werden die Bedingungen untersucht, unter denen sich eine ebene Stoßfront konstanter Stärke durch ein Gas fortpflanzen kann. Dabei soll die Entropie nur längs des Stoßes eine dort konstante Sprungstelle haben, vor und hinter dem Stoß wird eine Bewegung des Gases mit konstanter Entropie angenommen. Die Bewegung hinter dem Stoß wird durch die Lösung eines Cauchy-Problems bestimmt mit den Daten, die auf der Hinterseite des Stoßes gegeben sind. Die Theorie wird insbesondere am Beispiel einer anfänglich vorgeschriebenen Dichteverteilung erläutert, das ein Ergebnis von E. T. Copson (*dies. Zbl.* 50, 191; 58, 414) verallgemeinert. F. Keune.

Sternberg, Joseph: Triple-shock-wave intersections. *Phys. Fluids* 2, 179—206 (1959).

Verf. versucht erneut [vgl. Kawamura und Saito, *J. phys. Soc. Japan* 11, 584—592 (1956)], die bestehenden Widersprüche zwischen Theorie und Experiment bezüglich der Machschen Reflexion einer schwachen ebenen Stoßwelle an einem Keil aufzuklären. Zur Ermittlung der idealen (nichtdissipativen) Strömungsverhältnisse in Nähe des Gabelpunktes werden Analogieversuche mit dem elektrolytischen Trog (nach Busemann, 1937) herangezogen; sie deuten auf starke Krümmung der Stoßfronten hin, die eine genaue Messung der Winkel erschwert. Andererseits wird die Auswirkung von Dissipationseffekten abgeschätzt, die am Gabelpunkt die Hugoniot-

Bedingungen unbrauchbar machen. Für eine befriedigende Antwort sind jedoch weitere Experimente erforderlich. *F. Wecken.*

Smith, W. R.: Mutual reflection of two shock waves of arbitrary strengths. Phys. Fluids **2**, 533—541 (1959).

Durch Reflexion einer ebenen Stoßwelle an dem von zwei schwenkbaren Platten gebildeten konkaven Winkel wird eine pseudostationäre Konfiguration von zwei Stoßwellen von evtl. verschiedener Stärke erzeugt, die sich unter einem Winkel θ_2 durchkreuzen. Im Bereich der regulären Durchkreuzung wird die übliche Theorie, insbesondere bezüglich des Grenzwinkels θ_{2c} , bestätigt; für früher gefundene Abweichungen werden plausible Erklärungen gegeben. Von den zwei jeweils möglichen Lösungen ist stets diejenige mit geringerem Enddruck realisiert. Im Bereich der Machschen Durchkreuzung bestehen die bisherigen Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment fort (vgl. vorsteh. Referat). *F. Wecken.*

Ryžov (Ryshov), O. S. and S. A. Christianovič (Khristianovich): On non-linear reflection of weak shock waves. PMM J. appl. Math. Mech. **22**, 826—843 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. **22**, 586—599 (1958).

Verf. geht aus von den Differentialgleichungen für kompressible dissipationsfreie homentropische instationäre ebene sowie drehsymmetrische Strömung eines perfekten Gases. Schwache Stoßwellen sind in üblicher Weise zugelassen. Die Gleichungssysteme werden vereinfacht durch weitere Näherungsannahmen, die im wesentlichen eine Beschränkung auf kurze, nahezu zylinder- bzw. kugelsymmetrische Wellenzüge bedeuten, sowie durch Variablentransformationen und schließlich durch Übergang zum selbstähnlichen (pseudostationären) Spezialfall. Nunmehr lassen sich exakte Integrale angeben, die drei willkürliche Konstanten enthalten. Als Anwendung wird die schon vielfach (vgl. z. B. Sternberg, s. das vorletzte Referat) untersuchte reguläre und Machsche Reflexion einer Stoßwelle an einem Keil behandelt, hier nur für schwache Stöße und kleine Winkel. Bei regulärer Reflexion ist zwischen Über- und Unterschall hinter der reflektierten Welle unterschieden. Diagramme zeigen die Wellenform sowie Druck- und Geschwindigkeitsverteilung. *F. Wecken.*

Korobejnikov (Korobeinikov), V. P. and N. S. Mel'nikova: On exact solutions of linearized problem of point explosion with counterpressure. Doklady Akad. Nauk SSSR **116**, 189—192 (1957) [Russisch].

The paper contains an exact solution of the linearized system of equations of a one-dimensional spherically-symmetric flow of a perfect gas, the counterpressure beyond the shock-wave being taken into consideration. *S. Drobot.*

Karlikov, V. P.: Linearisierte Aufgaben über die Ausbreitung einer starken Explosion in einer inhomogenen Atmosphäre. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. **14**, Nr. 4, 27—39 (1960).

Bei der Untersuchung einer starken Detonation berücksichtigt Verf. das Abnehmen der Atmosphärendichte. Die Dichte der ungestörten Atmosphäre ist gegeben durch $\varrho_H = \varrho_0 - \varrho_0 \varepsilon z^\varkappa$, wo ϱ_0 , ε und \varkappa Konstanten sind. Die gesuchten Funktionen v_r , v_θ , p , ϱ werden durch dimensionslose Größen λ , μ , θ ausgedrückt und nach diesen in Reihen entwickelt:

$$v_r = \frac{r}{t} [V_{r0}(\lambda) + \mu \bar{V}_r(\lambda, \theta) + \dots], \quad v_\theta = \frac{r}{t} \mu \bar{V}_\theta(\lambda, \theta) + \dots,$$

$$p = \frac{\varrho_0 r^2}{t^2} [P_0(\lambda) + \mu \bar{P}(\lambda, \theta) + \dots], \quad \varrho = \varrho_0 [R_0(\lambda) + \mu \bar{R}(\lambda, \theta) + \dots]$$

\bar{V}_r , \bar{V}_θ , \bar{P} , \bar{R} sind Variationen entsprechender Funktionen nach μ bei $\mu = 0$. Diese Größen werden in die Gleichungen der Gasdynamik eingesetzt, und in den erhaltenen Gleichungen werden die Veränderlichen getrennt. Die Lösungen der neuen Gleichungen werden in Gestalt von Reihenentwicklungen gesucht. θ tritt überall nur in

Legendreschen Polynomen auf, und für die Funktionen von λ wird ein Gleichungssystem von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten, welches mit Hilfe der Bedingungen auf der Stoßfront gelöst wird. *F. Labisch.*

Boyer, D. W.: An experimental study of the explosion generated by a pressurized sphere. *J. Fluid Mechanics* 9, 401—429 (1960).

• Černyj, G. G.: Gasströmungen mit großer Überschallgeschwindigkeit. [Tečenija gaza s bol'šoj sverchzvukovoj skorost'ju.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 220 S. R. 9,20 [Russisch].

This book is the second one in world literature concerned with the hypersonic flow theory (the first one, by Hayes and Probstein, (this Zbl. 84, 422) was published a few months earlier by Academic Press). The English translation of the Černyj book is in preparation by Academic Press. The Problems discussed in this book are restricted to the flow of inviscid gas, ideal in a thermodynamic sense (no high temperature structural phenomena are taken into account). The book contains five chapters, and a relatively large introduction in which the flight and shock tube applications are reviewed. In the first chapter the hypersonic flow around bodies of revolution and the hypersonic similarity rules are discussed. In chapter 2, thin bodies with sharp noses in hypersonic flow are discussed. In particular, the one-dimensional similarity rule of Hayes is presented. This is presented more clearly than in the Hayes and Probstein book. The results of calculation by the use of this rule with numerical calculations are compared in many figures. Chapter 3 is devoted to: Newton's drag law and application of this law to the calculation of minimum drag bodies, the method of tangential cones (or wedges), Busemann's correction for centrifugal forces to Newton's law with application to minimum drag bodies, the method of boundary layer (inviscid layer between the shock wave and the body surface). The last method was developed by the author and applied to one-dimensional, non-steady flow problems as well as to hypersonic flow around the bodies and blunt body nose. In chapter 4 the shock expansion method is discussed. The last chapter concerns the problem of the influence of small bluntness of the nose on the hypersonic flow around the bodies. The method of blast wave analogy applied to this problem by the author and Lees und Kubota in 1957 (this Zbl. 77, 190) is discussed. At the end of the book a large of references to Soviet as well as to western authors, is given. In many places of the book, the author's contribution plays the essential role. The book is written clearly, theoretical calculations are compared in many cases with the experimental results or numerical calculations. It is a good, short textbook of hypersonic flow theory, useful for students, engineers and scientists, who want to familiarize themselves with the hypersonic flow theory achievements in the Soviet Union. Unfortunately, the very important real gases, phenomenas and body surface processes are not taken into account throughout the book. The application of the methods discussed are then limited to not very high Mach numbers which do not cover the re-entry problem. *J. Rosciszewski.*

Černyj, G. G.: Die Strömung eines idealen Gases um Körper bei hoher Überschallgeschwindigkeit. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 6, 77—85 (1957) [Russisch].

Zur Darstellung der Strömung am Staugebiet stumpfer Körper in Hyperschallströmung entwickelt der Verf. unter der Annahme von Gasen konstanter spezifischer Wärme nach $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ bei unendlicher Machzahl der Anströmung. Ein ähnlicher Weg wurde etwa zur gleichen Zeit von angloamerikanischen Autoren, wie z. B. Chester, Freemann u. a. beschritten. Bei Kegel und Keil wird bis zu quadratischen Gliedern in ε entwickelt und gute Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen erzielt. *K. Oswatitsch.*

Li, Ting-Yi and Richard E. Geiger: Stagnation point of a blunt body in hypersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 25—32 (1957).

Method of computing the steady symmetric inviscid hypersonic flow in the stagnation point region. The origin is taken at the nose of the body, x is measured parallel and y normal to the body surface; u and v represent the velocity components in the x and y directions. The curvature of the body surface is $K(x)$. The assumptions admitted are: 1. near the stagnation point $u/u_\infty, v/u_\infty = O(k)$, where k is the very small constant density ratio across the detached shock wave; 2. Ky is negligible in the disturbed flow region between the shock wave and the body surface; 3. the field flow can be regarded as incompressible near the stagnation point. The basic equations are: $(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = (-k/\rho_\infty) \text{ grad } p$ and $\text{div } \vec{v} = 0$, in the plane case, or $\text{div}(x \vec{v}) = 0$, in the axially symmetrical case, $\vec{v}(u, v)$ being the velocity vector. The boundary conditions are that of tangency at the body surface and that of conservation of mass and momentum along the shock wave. In the plane case, assuming $u = x f'(y)$, $v = -f(y)$, $f(y)$ satisfies the differential equation $f' f'' - f f''' = 0$. In the axially symmetrical case $u = x f'(y)$, $v = -2f(y)$ and this yields simply $f''' = 0$. The integration constants are determined by the boundary conditions. Velocity, pressure, detachment distance and vorticity are obtained. Comparison with Hayes' results are given. Both theories seem to give a better approximation than the Newtonian impact theory.

C. Iacob.

Grodovskij, G. L.: Die nützliche Interferenz von Flügel und Rumpf bei Überschallgeschwindigkeiten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinost.* **1959**, Nr. 1, 170—173 (1959) [Russisch].

In der Abhandlung befaßt sich der Verf. mit verschiedenen Kombinationen eines Rumpfes mit einem Flügel, die sich im Überschallstrom mit $M \rightarrow \infty$ befinden. Speziell werden folgende Kombinationen untersucht: a) eines keilförmigen Rumpfes mit einem Deltaflügel, b) eines halbkönischen Rumpfes mit einem Deltaflügel, c) eines Rumpfes mit einem Flügel, dessen Vorderkante mit der durch den Rumpf bewirkten Druckwelle ($r = cx^m$) zusammenfällt. In den Abbildungen werden für den Fall c) der relative Druck und die relative Dichte in Abhängigkeit vom relativen Radius für verschiedene Werte des Exponenten m wiedergegeben. Alle Resultate wurden an Hand einer den dünnen Körpern im Überschallstrom angepaßten Methode gewonnen, die vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. **90**, 408) veröffentlicht worden war.

M. Ružička.

Nagamatsu, H. T., R. E. Geiger and R. E. Sheer jr.: Real gas effects in flow over blunt bodies at hypersonic speeds. *J. Aero-Space Sci.* **27**, 241—251 (1960).

Im Überschall-Stoßwindkanal wurden Wiedereintrittsbedingungen in die Atmosphäre nachgeahmt für Stoßgeschwindigkeiten von über 15 km/sec. Es wurden Messungen des statischen Drucks in der Düse zur Bestimmung des Strömungszustandes und des Expansionsprozesses angestellt. Temperaturen an typischen stumpfen Körpern betrugen bis zu 6000 °K. Die Angaben enthalten Wanddruck-Verteilung, Stoßwellenform, Abstand des abgelösten Stoßes und Photographien der leuchtenden Gasregion in der Stoßschicht. Der Stoßwellenabstand ist kleiner bei höheren Stautemperaturen infolge der Wirkungen des realen Gases. Für die Halbkugel war die Druckverteilung für alle Stautemperaturen kleiner als die von der modifizierten Newtonschen Theorie vorhergesagte. Für eine 50° Kegel-Halbkugel waren Druckverteilung und Stoßwellenabstand merklich beeinflusst von den Eigenschaften des realen Gases. Schließlich werden Stoßwellengestalt und Grenzschicht an der ebenen Platte mit analytischen Vorhersagen verglichen. Einige vorläufige Ergebnisse für eine abgelöste Stoßwelle an einem stumpfen zweidimensionalen Körper in verdünntem Gas bei einer Machzahl von 19,6 werden bekanntgegeben.

F. Schultz-Grunow.

Nemčinov, I. V.: Die Berücksichtigung des Einflusses der Dissoziation und Ionisation der Luft in gewissen Aufgaben der Gasdynamik. Moskovsk. fiz.-techn. Inst., Issledovanija Mech. priklad. Mat., Trudy 1, 173—189 (1958) [Russisch].

Verf. beschreibt und diskutiert den Einfluß der durch hohe Temperaturen hervorgerufenen Dissoziation und Ionisation von Gasen. Näher besprochen wird der Druckzuwachs nach einem Stoß, gezeigt wird, wie die Ableitungen der Enthalpie und die Schallgeschwindigkeit berechnet werden können, angeführt werden die Gleichungen der Charakteristiken für ebene und wirbelfreie Strömungen sowie die Gleichung für konische Strömungen. *F. Labisch.*

Ladyženskaja (Ladyzhenskaia), O. A.: Solution "in the large" to the boundary value problem for the Navier-Stokes equations in two space variables. Soviet Phys., Doklady 3, 1128—1131 (1959), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 427—429 (1958).

L'A. généralise les résultats obtenus dans un travail précédent (v. Kiseler et l'A., ce Zbl. 78, 398) en ce qui concerne les restrictions faites sur la nature des forces extérieures dans les équations de Navier-Stokes en deux dimensions. Le problème qui se rapporte à la démonstration d'existence d'une solution unique et qui se réduit à l'estimation d'une intégrale, est résolu par un théorème que l'A. démontre.

C. Woronetz.

Ghildyal, C. D.: Steady self-superposable flows of the type curl $q = \lambda q$. Ganita 8, 61—69 (1957).

Im Anschluß an Mitteilungen von R. Ballabh [Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 2, 69—79, 85—89 (1940)] über sogenannte selbst-überlagerungsfähige Strömungen, für die rot $v = \lambda \cdot v$ gilt, werden solche Beltrami-Strömungen in zäher und nicht-zäher Flüssigkeit untersucht. Stationäre Strömungen in zäher Flüssigkeit sind drehungsfrei, wenn λ nur von den beiden räumlichen Koordinaten abhängt; für nicht-zähe Flüssigkeit werden die Fälle $\lambda = 1/r$ und $\lambda = r$ behandelt. *J. Pretsch.*

Hama, Francis R.: Some transition patterns in axisymmetric boundary layers. Phys. Fluids 2, 664—667 (1959).

Cylinder and cone models are towed in water and the development of vortex filaments is observed by the injected dye method. The formation of vortex loops on these axisymmetric bodies prove to be quite similar to the development in the flat plate boundary layer. *L. S. G. Kovasznay.*

Roy, Durga: Resistance on a circular cylinder due to any number of vortices lying in two rows. Z. angew. Math. Phys. 10, 502—508 (1959).

Verf. betrachtet den Widerstand, den ein Kreiszyylinder erfährt, wenn sich hinter ihm eine symmetrische Wirbelstraße befindet; d. h. mit anderen Worten: es wird eine einseitig unendliche symmetrische Wirbelstraße in Gegenwart des Zylinders betrachtet und bei dieser Zylinder-Wirbelstraße-Konfiguration der Widerstand bestimmt. Dies erfolgt mittels einer Erweiterung der für das stationäre Regime gültigen Blasiuschen Formel. *Bl. Dolaptschiew.*

Schaefer, John W. and Salamon Eskinazi: An analysis of the vortex street generated in a viscous fluid. J. Fluid Mechanics 6, 241—260 (1959).

Nach U. Dörm, der Wirbelstraßen unter Berücksichtigung endlicher und zeitlich wachsender Wirbelkerndurchmesser untersucht hat (dies. Zbl. 57, 176), gehen die Verff. einen Schritt weiter, indem sie eine analytische und experimentelle Analyse der viskosen Wirbelstraßen durchführen. Für die experimentelle Prüfung der analytischen Ergebnisse wird die Technik der Hitz-Draht-Messung verwendet. Die Wirbel einer reellen viskosen Wirbelstraße scheinen sehr ähnlich den exponentiellen Lösungen der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für einen axialsymmetrischen geradlinigen Wirbel zu sein. Sonst sind die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen für ein viskoses Wirbelsystem nicht geeignet. Verff. betrachten deshalb als Grundwirbel in ihrer Superpositionsmethode die Lösung der Navier-Stokesschen

Gleichungen für einen diskreten geradlinigen viskosen Wirbel, der wegen der Viskosität eine mit der Zeit abnehmende Intensität erhält. Die Wirbelstraße wird nun durch den Hookerschen Teil $e^{-r^2/4\nu t}$ ausgedrückt. Verff. konstruieren dann die Formel für die Komponenten der Geschwindigkeit bei einer viskosen Wirbelstraße, nämlich

$$(1) \quad u = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{\pm n=0}^k \left[\left\{ (-1)^{|n|} \frac{y - (-1)^{|n|} h_n}{[|n| a \mp s]^2 + [y - (-1)^{|n|} h_n]^2} \right\} \cdot \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{[|n| a \mp s]^2 + [y - (-1)^{|n|} h_n]^2}{4\nu [(x - s \mp na)/2af]} \right) \right\} \right], \quad v = \dots,$$

die sich wesentlich von denjenigen einer Kármánstraße unterscheiden. Bei $k = \infty$, $h_n = \text{const}$ und $n = 0$ folgt die Hookersche Lösung. Verff. schließen, daß die Superposition eine befriedigende Annäherung der wirklichen Strömung der viskosen Wirbelstraße gibt.

Bl. Dolaptschiew.

Mateescu, Cristea: Application d'une méthode de superposition à l'étude de la répartition des vitesses dans le mouvement uniforme des fluides visqueux. *Comun. Acad. Republ. popul. Romîne* 7, 697—701, russ. und französ. Zusammenfassung 700 (1957) [Rumänisch].

Es wird die laminare Strömung in Rohren verschiedener Form untersucht. Unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeitsverteilung durch die Überlagerung von bekannten Verteilungen gegeben ist, werden mittels dieser umgekehrten Methode Lösungen für neue Rohrleitungsformen, wie quasiquadratische, quasiviereckige, ovale und andere Profile erzielt. Das Verfahren eignet sich auch für graphische Berechnungen, ausgehend von bestimmten experimentellen Daten.

V. N. Constantinescu.

Kotljar, Ja. M.: Die Strömung eines zähen Gases im Raum zwischen zwei koaxialen Zylindern. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 10, 12—18 (1957) [Russisch].

In dieser Arbeit wird die Strömung eines zähen Gases im Spalt zwischen zwei koaxialen Zylindern untersucht, wobei das Gas durch die auf dem äußeren Zylinder gleichmäßig verteilten Öffnungen bei konstantem Druck in den Zwischenraum geleitet wird und durch zwei in der Mitte des oberen bzw. unteren Zylinderdeckels sich befindende Öffnungen ausfließt. Da die Spaltbreiten als klein gegenüber den Zylinderdimensionen angenommen sind, werden die Trägheitsglieder im Vergleich mit den Reibungsmitgliedern in den Navier-Stokesschen Gleichungen vernachlässigt, wobei von den letzteren ebenfalls nur die von der größeren Größenordnung beibehalten werden. Weiter wird der Druck, ähnlich wie in der Grenzschichttheorie, als konstant längs der Spaltbreite vorausgesetzt, während in den zwei anderen Richtungen die barotropische Strömung (Dichte ist nur Funktion des Druckes) angenommen wird. Dabei nimmt man an, daß der Zähigkeitsbeiwert überall in der Strömung konstant bleibt. Nun ersetzt Verf. wegen der Kleinheit der Spaltbreite die betrachteten Zylinder durch zwei parallele Platten (die Spaltbreite ist dieselbe wie bei den Zylindern), in deren Zwischenraum die oben definierte Strömung untersucht wird. Nach diesen Vereinfachungen kann man die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf das betrachtete Problem mit Erfolg anwenden, wobei die bei der Untersuchung der idealen inkompressiblen Flüssigkeit dienenden Methoden auch in diesem Fall anwendbar sind. Dies ermöglicht dem Verf., die Reihen der gleichmäßig verteilten Einflußöffnungen als unendliche Quellenketten zu betrachten und demnach die untersuchte Strömung zwischen zwei Platten durch entsprechende komplexe Potentiale darzustellen, deren Form man mit Hilfe zugehöriger Randbedingungen und vorausgesetzter Öffnungsverteilung bestimmt. Ebenfalls werden die Ausflußöffnungen als zwei Senken betrachtet und die Strömungen zwischen den Zylinderdeckeln durch entsprechende komplexe Potentiale dargestellt. Nach den

Berechnungen, in denen man den Zusammenhang zwischen den Ergiebigkeiten der Quellen und der Senken feststellt, erhält man die Druckverteilung im Spalt zwischen den Zylindern als Funktion der Quellenergiebigkeiten. *V. Saljnikov.*

Asaturjan, A. Š. und V. I. Černikin: Laminare Bewegung einer zähen Flüssigkeit mit freier Oberfläche in zylindrischen Rohren. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 9, 137—139 (1957) [Russisch].

In dieser Arbeit wird die laminare und stationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit mit freier Oberfläche in zylindrischen Rohren untersucht, wobei Verf. von den Navier-Stokesschen Gleichungen ausgeht und eine exakte Lösung angibt. Während man die Druckverteilung nach der Integration einer der Ausgangsgleichungen leicht erhält, mußte Verf., um die Geschwindigkeitsverteilung des Problems zu gewinnen, die zweite Navier-Stokessche Gleichung und die entsprechenden Randbedingungen nach einer Čaplyginischen Methode zunächst auf bipolare Koordinaten umformen. Die Lösung der vermöge dieser Transformation erhaltenen Laplaceschen Differentialgleichung wird in Form eines Fourier-Integrals dargestellt. Führt man in die Lösung die kartesischen Koordinaten x, y wieder ein, so erhält man für das mit der Flüssigkeit ausgefüllte Rohr die bekannte Stokessche Geschwindigkeitsverteilung für die Rohrströmung. Aus dem allgemeinen Ausdruck für die Durchflußmenge erhält man ebenfalls für das mit der Flüssigkeit ausgefüllte Rohr das Poiseuillesche Gesetz. Die maximale Durchflußfähigkeit entsteht bei $H/D = 0,85$, wobei D -Rohrdurchmesser und H -Flüssigkeitstiefe in der Rohrmitte sind. *V. Saljnikov.*

Squire, William: A note on the Blasius equation with three-point boundary conditions. *J. Aero-Space Sci.* 26, 678—679 (1959).

Es wird eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Anfangswerte $f'(0)$, $f''(0)$ der Blasius-Differentialgleichung $f''' + 2ff'' = 0$ mit den 3 Punkt-Randbedingungen $f'(\infty) = 1$, $f'(-\infty) = 1 - \lambda$, $f(0) = 0$ angegeben. Zu diesem Zweck wird die Differentialgleichung formal integriert, und die zur Bestimmung der Anfangswerte gegebenen Integrale über den einfach- bzw. zweifach-unendlichen Bereich werden mit Hilfe von verallgemeinerten Gauß-Laguerreschen bzw. Gauß-Hermiteischen Integrationsformeln gelöst. Es werden die Integrationsformeln erster Ordnung verwendet, und der Integrand wird durch das erste Glied einer Reihenentwicklung approximiert. Trotz dieser relativ geringen Approximationsgüte stimmen die ermittelten Anfangswerte sehr gut mit den von Napolitano (dies. Zbl. 89, 434) angegebenen Werten überein. *E. Wrage.*

● **Gersten, K.:** Corner interference effects. (DFL-Bericht Nr. 108). Braunschweig: Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt E. V., Institut für Aerodynamik 1959. 24 p. with 12 fig. DM 8,—.

Verf. behandelt die Grenzschichtströmung in einer von zwei senkrecht aufeinanderstehenden Wänden gebildeten Ecke, wie sie z. B. bei Flügel-Rumpf-Übergängen vorkommt. Aus experimentellen Ergebnissen leitet Verf. einige Gesetze für die zu den üblichen zweidimensionalen Grenzschichtgrößen hinzutretenden zusätzlichen Interferenzgrößen der turbulenten Grenzschicht ab. So ergeben sich Gesetzmäßigkeiten für die „Interferenzverdrängungsdicke“ und den „Interferenzwiderstand“ der Eckenströmung ohne und mit Druckgradienten in Abhängigkeit von der Reynoldszahl zwischen $Re = 10^5$ und $Re = 10^7$. Auch der Interferenzeinfluß auf die laminare Grenzschicht sowie auf den Umschlag laminar/turbulent wird dabei besprochen. *F. W. Riegels.*

Leslie, F. M.: Free convection in the tilted open thermosyphon. *J. Fluid Mechanics* 7, 115—127 (1960).

Verf. untersucht die Konvektionsströmung, die sich in einem gegen die Vertikale geneigten Thermosyphon einstellt. Darunter sei ein mit Flüssigkeit gefülltes oben offenes zylindrisches Gefäß verstanden, dessen Wandung aufgeheizt wird. An der Oberseite ist die Flüssigkeit mit einem kühlen Reservoir verbunden. Das in Wand-

nähe erwärmte Medium steigt auf, und im Innern des Rohres kommt von dem — aus dem Reservoir nachströmenden — kühleren Medium eine absinkende Bewegung zustande. In Abhängigkeit von der die Konvektionsströmungen charakterisierenden Rayleigh-Zahl und der Neigung des Rohres können verschiedene interessante Strömungsphänomene auftreten, die der Verf. ausführlich diskutiert. Die mathematische Behandlung des Problems lehnt sich an eine Arbeit von M. J. Lighthill an (dies. Zbl. 52, 213). Das behandelte Problem simuliert gewisse Strömungsvorgänge, die beim Kühlen von Gasturbinenschaufeln auftreten. Die Neigung gegenüber der Vertikalen soll in erster Annäherung einer Mitnahme der Corioliskraft in der Wirklichkeit entsprechen. *J. Zierep.*

Nakagawa, Yoshinari: Heat transport by convection. Phys. Fluids 3, 82—86 (1960).

Der Wärmetransport spielt bei der Zellularkonvektion eine große Rolle. Verf. gibt für die verschiedenen Randbedingungen an der Grund- und Deckfläche ganz einfache Formeln für die Größe dieses Wärmetransportes an. Benutzt werden hierzu nur die Ergebnisse der bekannten linearen Theorie. Allerdings wird auf jede Zelle der Energiesatz angewendet und dadurch die Strömungsamplitude festgelegt, die sich ja im Rahmen der linearen Theorie nicht bestimmen läßt. *J. Zierep.*

Tellep, D. M.: The effect of vehicle deceleration on a melting surface. J. Aero-Space Sci. 26, 537—538 (1959).

Vgl. die in diesem Zbl. 79, 223 angezeigte Arbeit von G. W. Sutton.

Yang, Kwang-Tzu: Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow. J. appl. Mech. 25, 421—427 (1958).

Es wird die Temperaturgrenzschicht in der Nähe des Staupunkts eines Zylinders berechnet, der sich mit ungleichförmiger Geschwindigkeit bewegt; die Temperaturen am Körper und in der freien Strömung sind konstant. Falls die Außengeschwindigkeit u_∞ sich verhält wie $u_\infty \sim x/(1 - \alpha t)$, mit x = Bogenlänge vom Staupunkt aus, t = Zeit und α = eine Konstante (Anm. des Ref., wenn also das Verhältnis der örtlichen zur konvektiven Beschleunigung konstant ist), kann man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für Stromfunktion und Temperatur aufstellen. Aus den strengen Lösungen für diesen Ähnlichkeitsfall wird ein Näherungsverfahren aufgebaut für beliebige Zeitabhängigkeit von u_∞ . (Die weitere Verallgemeinerung für größere Entfernungen vom Staupunkt bei instationärer Strömung gibt Verf. in einer späteren Arbeit — vgl. dies. Zbl. 86, 212). *K. Wieghardt.*

Gupta, A. S.: A note on laminar motion due to the oscillation of a flat plate in a compressible fluid. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New. Delhi 1956, Oct. 15—16, 195—198 (1957).

Verf. löst die Gleichungen der laminaren Grenzschicht an einer unendlichen harmonisch schwingenden Platte, wobei eine kompressible Strömung bei niedrigen Machschen Zahlen vorausgesetzt wird. Neben den konventionellen Vereinfachungen, die man für die laminare Grenzschicht verwendet, werden ein der Temperatur proportionaler Viskositätskoeffizient und eine konstante Prandtlzahl vorausgesetzt. Verf. zeigt, daß für die Schubspannungen an der Wand dieselbe Beziehung wie bei der inkompressiblen Strömung gilt. In der Arbeit wird an mehreren Stellen die x -te Geschwindigkeitskomponente gegen den Viskositätskoeffizienten vertauscht. *J. Poláček.*

Wuest, Walter: Verdrängungskorrekturen für rechteckige Windkanäle bei verschiedenen Strahlbegrenzungen und bei exzentrischer Lage des Modells. Z. Flugwiss. 9, 15—19 (1961).

Daiber, John W.: An optical boundary-layer probe. J. Aero-Space Sci. 27, 836—840 (1960).

Kraemer, Kurt: Über die Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschichtumschlag. *Z. Flugwiss.* 9, 20—27 (1961).

Archipov (Arkhipov), V. N.: The formation of streaming fluctuations behind a solid obstacle. *Soviet Phys., Doklady* 3, 1117—1120 (1959), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 621—622 (1958).

Die superponierte Strömung, bestehend aus der ebenen Strömung einer viskosen inkompressiblen Flüssigkeit der Geschwindigkeit ($u = u(y), v = 0$) und aus der zweidimensionalen Störungsbewegung mit der Stromfunktion $\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$ wird, wie bekannt, auf die Betrachtung der Gleichung (1) ($u = c$) ($\varphi'' - \alpha^2 \varphi - u'' \varphi + (i v / \alpha) (\varphi^{IV} - 2 \alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) = 0$) reduziert, und zwar bei einer Geschwindigkeitsverteilung hinter dem umströmten Körper nahe der von Tollmien berechneten

$$u = u_{\infty} \left(1 - \frac{c_w d}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{v x}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u_{\infty}}{v x} y^2} \right).$$

Verf. wendet auf die Gleichung (1), ausgedrückt in dimensionslosen Größen, die Methode von Galerkin an, indem er die Gleichung $|D_{ik}| = 0$ betrachtet, wobei $|D_{ik}|$ die Determinante des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^m e_k \int_0^{\infty} L(\psi_k) \psi_i dy = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, m$$

ist und $\{\psi_k(y_1)\}$ das System „approximierender“ Funktionen darstellt von der Form $\psi_k = e^{-y_1^2} \cos k y_1$ für antisymmetrische Störungen und der Form $\psi_k = e^{-y_1^2} \sin k y_1$ für symmetrische Störungen. Die Berechnungen werden unter Beibehalten der zweiten Größenordnung durchgeführt. Es wird festgestellt, daß die antisymmetrischen Störungen bei ziemlich kleiner $Re_{lkr} (= 19)$ sich in die symmetrischen ($Re_{lkr} = 55$) entwickeln, ein Ergebnis, welches mit demjenigen von G. I. Petrov [Trudy central'n. aerodin. gidroin. Inst. 304 (1937)] zusammenfällt und dem Versuche entspricht. Die angegebenen Resultate beziehen sich auf die Umströmung von Körpern beliebiger Form, falls die Geschwindigkeitsverteilung hinter dem umströmten Körper ähnlich der von Tollmien berechneten ist. Für den Kreiszylinder bei kleinen Re-Zahlen hat die Umströmung laminaren Charakter; bei $Re \approx 30$ kommen periodische Störungen vor und mit Anwachsen von Re erscheinen schachbrettartige Wirbelstraßen.

Bl. Dolaptschiew.

Ил'енко, В. Л.: Die kritische Reynoldssche Zahl für die Strömung hinter einem Kreiszylinder. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinost.* 1959, Nr. 5, 130—132 (1959) [Russisch].

Die Randwertaufgabe, auf welche die vollständige Navier-Stokessche Differentialgleichung führt bei der ebenen Umströmung eines Kreiszylinders von einer viskosen inkompressiblen Flüssigkeit, löst Verf. mit dem Ansatz

$$(1) \quad \psi = \left\{ r + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_4}{r^4} \right\} \sin \theta + \left\{ \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4} \right\} \sin 2 \theta,$$

indem er zur Bestimmung der Konstanten a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Methode von Bubnov-Galerkin anwendet und den Weg von Kawaguti befolgt. Er drückt a_j bzw. b_j ($j = 2, 3, 4$) linear durch a_1 bzw. b_1 aus und bestimmt a_1, b_1 aus einem System von zwei algebraischen Gleichungen als Funktion der Re-Zahl $R = 10, 20, 25, 30, 40$. Die Stabilität der superponierten Strömung (1) und der kleinen Störung $\Phi(t; r, \theta) = e^{kt} f(r, \theta)$ in linearisierter Form entscheidet Verf. mit dem Ansatz

$$(2) \quad f(r, \theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{r^i} \sin \theta + \sum_{i=1}^4 \frac{d_i}{r^i} \sin 2 \theta$$

nach demselben Verfahren wie oben, wobei c_i bzw. d_i ($i = 2, 3, 4$) durch c_1 bzw. d_1

ausgedrückt und für c_1, d_1 die Gleichungen

$$(3) \quad \xi_1 c_1 + \eta_1 d_1 = 0, \quad \xi_2 c_1 + \eta_2 d_1 = 0, \quad (\xi_{1,2}, \eta_{1,2} = f_{1,2}^{I,II}(k, R))$$

erhalten werden, woraus sich $\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2 = 0$ ergibt. — Verf. schließt, daß die kritische Re-Zahl R^* , die den Verlust der Stabilität der laminaren Strömung bedeutet, sich zu $25 < R^* < 30$ bestimmt, welches Ergebnis mit dem experimentellen ($R^* = 40$) und mit dem theoretischen von Archipov (s. vorstehendes Referat) befriedigend zusammenfällt.

Bl. Dolaptschiew.

Prokof'ev, V. A.: Einfluß der Ausstrahlung auf die Fortpflanzung kleiner Störungen in einer zähen wärmeleitenden Flüssigkeit. (Hydrodynamische Theorie.) Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 7, 94—102 (1957) [Russisch].

Es wird die eindimensionale Aufgabe der Fortpflanzung ebener Störungen in einem kontinuierlichen Medium unter Berücksichtigung der Zähigkeit, Wärmeleitung und der Wärmestrahlung untersucht. Unter der Voraussetzung, daß die Störungen klein sind, linearisiert der Verf. die Gleichungen und sucht die Lösung in der Form $D(x, t) = \text{Re} [D_0 e^{a(x+bt)}]$, wobei $D(x, t)$ die Störungen der betrachteten Größen (Geschwindigkeit, spezifisches Volumen, Druck, Temperatur oder Strahlung) darstellen, D_0 sind die Anfangswerte der entsprechenden Größen, a und b komplexe Größen, die von x und t unabhängig sind. Die charakteristische Gleichung, die die Größen a und b verbindet, wird abgeleitet. — Die Fortpflanzung der erzwungenen Wellen wird durch eine bikubische charakteristische Gleichung beschrieben. Die Wurzeln dieser Gleichung entsprechen drei Typen von Wellenbewegungen, welche gleichzeitig entstehen und durch vier dimensionslose Zahlen und das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bestimmt werden. Der physikalische Sinn der dimensionslosen Zahlen wird erklärt. — Eine kurze Literaturübersicht ist angegeben. — Bibliographie: 8 Titel. *V. N. Kalašnik* (R. Ž. Mech. 1960, Nr. 1725).

Ludwig, Hubert: Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum. Z. Flugwiss. 8, 135—140 (1960).

Die reibungsfreie schraubenförmige Strömung zwischen zwei koaxialen Zylindern wird auf Stabilität in bezug auf Ringwirkung untersucht. Bei linear vom Radius abhängender Geschwindigkeit und schmaletem Ringraum wird ein dem Rayleighschen Stabilitätskriterium entsprechendes abgeleitet: $\tilde{c}_\varphi - \tilde{c}_z^2/(1 - \tilde{c}_\varphi) > -1$ und ein Stabilitätsdiagramm gezeichnet. Ein endlicher \tilde{c}_z -Wert setzt die Stabilität stets herab. Für den breiten Ringraum wird ein Stabilitätskriterium nicht streng abgeleitet, jedoch plausibel gemacht. Demnach ist die Strömung nur dann stabil, wenn für jeden Radius r gilt

$$\frac{dV_\varphi}{dr} \frac{r}{V_\varphi} - \left(\frac{dV_z}{dr} \right)^2 \cdot \left(\frac{r}{V_\varphi} \right)^2 \left[1 - \frac{dV_\varphi}{dr} \cdot \frac{r}{V_\varphi} \right] > -1.$$

Möglichkeiten zur experimentellen Nachprüfung der Ergebnisse werden aufgezeigt.

F. Schultz-Grunow.

Chandrasekhar, S. and R. J. Donnelly: The hydrodynamic stability of helium II between rotating cylinders. I. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 241, 9—28 (1957).

Unterhalb des λ -Punktes (Einsetzen der superfluid-Eigenschaft = Reibungslosigkeit) hat flüssiges Helium einen reibungsbehafteten (normalen) und einen reibungslosen (superfluid) Anteil. In der Strömung von solchem Helium II sind diese Bestandteile durch gegenseitige Reibung gekoppelt. In der vorliegenden Arbeit wird das Taylorsche Problem der Stabilität von strömendem Helium II zwischen zwei achsengleichen Zylindern bei kleiner Spaltbreite untersucht, deren äußerer ruht und deren innerer rotiert. Im Teil I der Arbeit werden die entstehenden Störungsdifferentialgleichungen unter Randbedingungen behandelt, die der mathematischen Lösbarkeit zuliebe von den physikalisch richtigen abweichen. Über die gegenseitige Beeinflussung F der beiden Strömungsanteile werden zwei verschiedene Annahmen

getroffen und verfolgt, deren eine eine isotrope, deren andere eine transversale Kopplung beschreibt. Das entstehende Eigenwertproblem enthält außer dem Taylor-Parameter $T = -4\bar{\Omega} A d^4/\nu^2$ ($\bar{\Omega}$ = Mittlere Winkelgeschwindigkeit der Rotation, A = Konstante des linearen Anteils der ungestörten Strömung, ν = kinematische Zähigkeit des reibungsbehafteten Strömungsanteils, d = Spaltbreite) und $a = \lambda d$ ($\frac{1}{2}\lambda$ = Dicke der Taylorwirbel) noch den aus F entspringenden Parameter $C = Kd^2/\nu$ (K = Proportionalitätsfaktor von F) sowie $\alpha_n = \varrho_n/\varrho$ (ϱ_n = Dichte des Normalanteils, ϱ = totale Dichte). Bei festem C und α_n ergeben sich zwei kritische Kurven $T(a)$; die obere dieser beiden Kurven wird im wesentlichen durch die normale, die untere durch die superfluid-Komponente bestimmt. Das Vorhandensein der letzteren wirkt also destabilisierend gegenüber dem Fall einer normalen inkompressiblen Strömung. Die aus den verschiedenen Ansätzen für F entstehenden kritischen Kurven zeigen wesentlich dasselbe Verhalten. Die Übereinstimmung mit Experimenten von Hall und Vinen (1956) ist sehr gut. *G. Hämmerlin.*

Chandrasekhar, S.: The hydrodynamic stability of helium II between rotating cylinders. II. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **241**, 29—36 (1957).

Das in Teil I (s. vorstehendes Referat) behandelte Problem wird hier mit den physikalisch korrekten Randbedingungen gelöst. Für die gesuchten Eigenfunktionen werden Fourierreihen angesetzt, und die Berücksichtigung der Randbedingungen führt auf ein homogenes System von unendlich vielen linearen Gleichungen für die Reihenoeffizienten; das Verschwinden der Determinante dieses Systems liefert eine Gleichung für die Eigenwertkurve $T(a)$, von der nur die vorherrschenden Glieder berücksichtigt werden, die aus dem Vergleich der ersten Reihenoeffizienten hervorgehen. Die Ergebnisse von Teil I werden bestätigt. *G. Hämmerlin.*

Miles, John W.: On the generation of surface waves by shear flows. III: Kelvin-Helmholtz instability. J. Fluid Mechanics **6**, 583—598 (1959).

(Teil II *ibid.* 568—582.) Es wird weiter die Stabilität der Grenzfläche zwischen einer parallelen Scherströmung und einer zähen Flüssigkeit in Ruhe untersucht, jetzt unter Verallgemeinerung des Kelvin-Helmholtz-Modells. Dabei wird angenommen, daß die durch eine wellenförmige Störung induzierte Druckverteilung mit der Wellenform in Phase ist. Damit gilt die Untersuchung vornehmlich im Bereich so großer Zähigkeiten, daß die bisher untersuchte Druckkomponente in Phase mit der Wellenschräge noch keine Instabilitäten herbeiführt. — Das zum betrachteten Differentialgleichungssystem äquivalente Variationsproblem wird zur Bestimmung minimaler kritischer Windgeschwindigkeiten einem Ritzschen Ansatz unterworfen. *K. Eggers.*

Pantchev, Stoitcho: Sur la théorie statistique de la turbulence. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 661—662 (1960).

Following Chandrasekhar's approach, the author derives a determinate equation for the space-time covariance of a statistically stationary isotropic temperature field in stationary isotropic turbulence. The quasi-normal distribution hypothesis is used in the form $\overline{u_i u_j' T' T'} = \overline{u_i u_j'} \overline{T' T'} + \overline{u_i T'} \overline{u_j' T'} + \overline{u_i' T'} \overline{u_j T'}$ where the unprimed symbols refer to position x at time t , the primed symbols to $x + r, t + \tau$, respectively. Caution should be exercised in the application of the equation derived, since the physical conditions for validity of the above hypothesis and the condition of stationary are almost mutually exclusive. *O. M. Phillips.*

Fung, Y. C.: Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at supercritical Reynolds numbers. J. Aero-Space Sci. **27**, 801—814 (1960).

Etkin, B.: A theory of the response of airplanes to random atmospheric turbulence. J. Aero. Space Sci. **26**, 409—420 (1959).

H. S. Ribner (this Zbl. **72**, 426) represented a turbulent field by assuming that the downwash pattern in the (x_1, x_2) plane was a superposition of elementary waves

$dw_g = a e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)}$ of shearing motion. Author solves the problem of calculating the aerodynamical forces and moments acting on an airplane when flying (with a forward speed u_0) through an inclined sinusoidal wave of downwash characterized by $w_g(x, y, t) = e^{i\Omega_1 u_0 t} e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)}$ by applying an approximation of type $w_g(x, y, t) = e^{i\Omega_1 u_0 t} \sum_{i,j=0}^2 A_{ij} x^i y^j$ for the downwash $w_g(x, y, t)$ in the neighbourhood of the airplane (x, y are measured from the airplane centre of gravity, A_{ij} depends on Ω_1, Ω_2 , too). Thus the downwash field is represented as a superposition of several particular spatial distributions. Having treated the advantages of this fact, author considers, using motion equations and airplane transfer functions, the final response quantities, too. Errors of the mentioned approximation are also considered.

P. Medgyessy.

Nevzgliadov (Nevzglyadov), V. G.: A contribution to the problem of flow past solid bodies on the basis of the phenomenological theory of turbulence. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. 4) 156—169, engl. Zusammenfassung 169 (1958) [Russisch].

The starting point of the paper are equations of motion of a compressible viscous fluid, i. e., the equations of the conservation of momentum and continuity in the tensor forms. The author introduces both coefficients of viscosity, but they are assumed to be constant, i. e., the equation of energy, including the temperature, as well as the dependence of the coefficients of viscosity upon the temperature are not considered. In the usual way, following the phenomenological theory of turbulence, there are introduced the turbulent velocity components, but the magnitude of the density is preserved in its constant mean value only. Next the author introduces the linearization of the equations by assuming that the velocity vector \vec{u} is representable in the form: $\vec{u} = \nabla\Phi + \vec{w}$, $\Delta\Phi = 0$. This allows one to remodel the equations in question so that the turbulent part of the energetic system has an analogy to an inviscid fluid in the form of the Bernoulli equation. The integration of the vector equation of the conservation of momentum leads to the expression for the force acting on a body immersed in a fluid. The contour of integration refers to the body in question. The velocity potential, Φ , is represented in form of a trigonometric series, which inserted into the expression for the force, leads to a closed form formula, for value of the force. Another problem attacked by the author, is the use of the first law of thermodynamics to calculate the so-called vector of Umov, i. e., the vector involving the heat and energetic properties of the system in question. The components of this vector enable one to calculate the heat conduction along the coordinate axes in question. The last problem attacked by the author is a representation of the equations of motion of a viscous fluid in the form of Lagrange-Euler's equations of the variational problem. The influence of the viscosity and turbulence is taken into account by means of an "effective" Reynolds number of the system, assumed to be constant.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Elrod jr., H. G.: Note on the turbulent shear stress near a wall. *J. aeronaut. Sci.* 24, 468—469 (1957); Erratum. *J. Aero-Space Sci.* 27, 145 (1960).

Dorfman, L. A.: Die turbulente Grenzschicht an einer rotierenden Scheibe. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 7, 138—142 (1957) [Russisch].

In dieser Arbeit wird die turbulente Grenzschicht an einer rotierenden Scheibe untersucht, wobei Verf. das universelle logarithmische Geschwindigkeitsverteilungsgesetz in der Grenzschicht zugrunde legt und von dem Impulssatz der Grenzschicht-Theorie ausgeht. Nach dem Einsetzen der die Randbedingungen erfüllenden Geschwindigkeitskomponenten in die im Impulssatz stehenden Integrale und darauffolgender Integration erhält man gewisse Funktionen der Grenzschichtdicke δ und Außen-

geschwindigkeit U . Diese Funktionen werden weiter durch Ausdrücke der Form $f = a (U \delta/\nu)^b$ approximiert (ν -kinematische Zähigkeit), wobei Verf. die Konstanten a und b für drei verschiedene Gebiete der Re-Zahl bestimmt. Für diese Gebiete der Re-Zahl werden auch alle Berechnungen durchgeführt und Formeln für die Drehmomentenbeiwerte c_M , sowie für die dimensionslose Grenzschichtdicke δ/R (R —Radius der Scheibe) als Funktionen von Re angegeben. Dabei zeigt Verf., daß diese drei Ausdrücke für c_M als eine allgemeine Formel der Gestalt $c_M = 0,982 (\log \text{Re})^{-2,58}$ dargestellt werden können. Die gewonnenen Ergebnisse werden am Ende diskutiert und mit anderen bekannten Resultaten graphisch verglichen.

V. Saljnikov.

● Milliat, Jean-Pierre: *Étude expérimentale de l'écoulement turbulent dans un divergent bidimensionnel parcouru par de l'air*. (Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air 335.) Paris: Service de Documentation et d'Information technique de l'Aéronautique 1957. III, 134 p. fr. 2000.

Die Messungen wurden in einem Diffusorkeil durchgeführt, der an einen von parallelen Wänden begrenzten Spalt mit ausgebildeter Poiseuillescher Strömung angeschlossen. Die halben Diffusorwinkel betrugen $\alpha = 1^\circ, 2^\circ$ und 3° ; die mit der mittleren Durchflußgeschwindigkeit gebildeten Reynoldsschen Zahlen $\text{Re} = 32000$ in allen drei Fällen sowie noch $\text{Re} = 52000$ für $\alpha = 1^\circ$. Die Messungen erstrecken sich auf den Einlauf bis zur voll ausgebildeten Strömung mit Ähnlichkeitscharakter. Mitgeteilt werden der Verlauf des statischen Druckes über der Längsachse, die Verteilung der Längskomponente der mittleren Geschwindigkeit über der Breite, die mittlere Schwankung derselben sowie ihr Energiespektrum. Die Koeffizienten des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes ergaben sich zu $A = 6,9$ und $B = 7,25$.

W. Szablewski.

Hill, F. K.: *Turbulent boundary layer measurements at Mach numbers from 8 to 10*. Phys. Fluids 2, 668—680 (1959).

Measurement of important gross parameters (velocity, distribution, total temperature distribution, skin friction, and heat transfer coefficients) of the hypersonic turbulent boundary layer is presented for Mach numbers 8 to 10 and for Reynolds numbers of the order of 50,000—60,000 (based on ordinary boundary layer thickness). The most interesting result is that Reynold's analogy between skin friction and heat transfer is remarkably good, or in other words the turbulent Prandtl number is very nearly unity.

L. S. G. Kovaszny.

Pappas, Constantine C. and Arthur F. Okuno: *Measurements of skin friction of the compressible turbulent boundary layer on a cone with foreign gas injection*. J. Aero-Space Sci. 27, 321—333 (1960).

Zur experimentellen Bestimmung des Reibungswiderstandes der kompressiblen turbulenten Grenzschicht mit Ausblasung eines Fremdgases wurde ein Kreiskegel von 15° Öffnungswinkel benutzt. Der Kegelmantel aus porösem Material, bestehend aus Fiberglas und Kunstharz, wurde auf einen stählernen Grundkegel aufgebracht. Der Stahlträger diente gleichzeitig zur Aufnahme der Ausblaseleitungen, der Druckentnahmekanäle und eines Dehnungsmeßstreifens zur Spannungsmessung, welcher zwischen dem porösen Mantel und dem Grundkörper angebracht war. Die Messungen erfolgten im Unterschall- und Überschallbereich bis hinauf zu $\text{Ma}_\infty = 4,7$ bei einer Reynoldszahl von etwa $\text{Re} \approx 3 \cdot 10^6$. Es wurde ausgeblasen ein leichtes Gas (Helium), Luft, und ein schweres Gas (Freon CCl_2F_2); letzteres diente zur Simulation der bei Oberflächenverdampfung entstehenden schweren Gase. Für die meisten Messungen wurde der Grenzschichtumschlag künstlich hervorgerufen. Die Hauptergebnisse, nämlich die Reduzierung des Reibungswiderstandes durch Ausblasung, sind in Kurvenform dargestellt. Es zeigt sich, daß bei gleichem Massenstrom das leichteste Gas die größte Verminderung der Wandreibung hervorruft. Für Helium sind Abminderungen von 80% erreichbar, ohne daß Ablösung auftritt. Es werden Vergleiche mit bestehenden Theorien durchgeführt. Letztere geben jedoch nicht den im Versuch beobachteten Einfluß der Machzahl wieder, welcher darin besteht, daß i. a. die Wirksamkeit der Ausblasung mit steigender Machzahl abnimmt. Einige Messungen befassten sich auch mit der Grenzschicht ohne künstlichen Umschlag. Es stellt sich heraus, daß mit zunehmender Ausblase-menge der Umschlagspunkt nach vorn wandert, jedoch nur bis zu einer festen Grenze.

W. Pechau.

Povinelli, Louis A.: A review of turbulent flame propagation (in two parts). *Aerotecnica* 40, 272—286 (1960).

● Yoler, Y. A.: A review of magneto-hydrodynamics. (Boeing Scientific Research Labor. Flight Sciences Labor. Rep. No. 14.) Seattle 1959. 69 p.

Bedingt durch die rasche Entwicklung der letzten Jahre in der Magneto-hydrodynamik besteht einerseits ein dringender Bedarf an einem einführenden Lehrbuch über dieses Gebiet, da das an sich sehr gute Buch von Cowling („Magneto-hydrodynamics“, New York 1957) etwas veraltet ist, andererseits sind viele Forschungsergebnisse noch so im Fluß, daß die Herausgabe eines neuen Buches verfrüht erscheint. Deshalb ist das Erscheinen eines Übersichtsberichtes der vorliegenden Art sehr zu begrüßen. Verf. strebt keine Vollständigkeit an, sondern er beschränkt sich auf die Diskussion einiger Probleme, die einerseits besonders charakteristisch für die Magneto-hydrodynamik sind und andererseits keinen zu großen mathematischen Aufwand erfordern. Nach einer Einführung in die Grundgleichungen und einem Abschnitt über Dimensionsbetrachtungen werden im Hauptteil Kanalströmungen behandelt mit besonderer Diskussion der kritischen Geschwindigkeiten (Schall-Alfvén- und „Drift“-Geschwindigkeit). Es folgen zwei Abschnitte über Plasmaströmungen und je einer über zähe Strömungen und hydrodynamische Analogien. Zahlreiche Literaturangaben geben Anregung zu weiteren Studien. Leider fehlt jeder Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. Der Artikel ist sehr klar geschrieben, die Bezeichnungen sind allerdings nicht ganz konsequent. So fiel dem Ref. auf, daß mit m im Abschnitt II die Masse gemeint ist (wie auch im Verzeichnis der Symbole angegeben) aber in IV die Masse pro Sekunde und in VI die Masse pro Sekunde und Fläche.

G. Jungclauss.

Kanwal, R. P.: Uniqueness of magnetohydrodynamic flows. *Arch. rat. Mech. Analysis* 4, 335—340 (1960).

Trascurando la corrente di spostamento e la densità spaziale di carica elettrica, tenendo conto della viscosità e della conduzione del calore si dimostra, per una regione finita V , limitata dalla superficie S , l'unicità della soluzione per le equazioni della magneto-fluidodinamica quando risultino assegnati: I. all'istante iniziale la velocità v , il campo magnetico \bar{H} , la densità ρ e la temperatura assoluta T in ogni punto interno di V ; II. per ogni istante, v e \bar{H} su tutto S ; inoltre detto \bar{n} il versore della normale esterna su S e posto $U = v \cdot \bar{n} - G$ (G componente normale a S della velocità delle particelle fluide rispetto a S): a) T e ρ nei punti di S dove è $U < 0$; b) solo T nei punti di S dove $U \geq 0$. Nei punti di S in cui è $U = 0$, anziché assegnare T , si può assegnare la corrente termica, oppure si può imporre che la corrente termica sia proporzionale alla differenza fra la temperatura del fluido e l'assegnata temperatura del contorno. Se la conducibilità termica del mezzo è nulla, non è necessaria la b), nè altra condizione sostitutiva. La dimostrazione è basata sul cosiddetto metodo dell'energia introdotto da Graffi per il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi (questo Zbl. 50, 196) ed esteso alla magnetofluidodinamica dal recens. (questo Zbl. 48, 205).

R. Nardini.

Agostinelli, Cataldo: Su di una classe notevole di figure ellissoidali rotonde di masse fluide magnetoidrodinamiche uniformemente rotanti e gravitanti. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 93, 369—381 (1959).

Una massa fluida, incompressibile, diconduttività elettrica infinita, uniformemente rotante intorno a un asse baricentrale Oz e soggetta alla propria gravitazione, è riferita a un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z . Dimostrato che il campo elettromagnetico deve essere simmetrico rispetto a Oz , per il campo magnetico \bar{H} si assume $H_\varphi = 0$, $H_r = -r^{-1} \partial V / \partial z$, $H_z = r^{-1} \partial V / \partial r$, con $\Delta V = h r^2$ (h costante) e V nulla al contorno (che può essere un ellissoide rotondo). Assegnata una espressione particolare di V , si calcolano le componenti di \bar{H} nei punti interni poi, (sia in base alle

analogie fra elettromagnetismo e teoria di Helmholtz sui vortici, sia in base alla legge di Laplace sugli elementi di corrente) quelle nei punti esterni. Viene fornito il valore della discontinuità h_σ di \bar{H} attraverso la superficie dell'ellissoide. Per eliminare h_σ , basta introdurre all'esterno un campo magnetico supplementare composto di un campo uniforme parallelo a Oz e un campo solenoidale, nullo all'infinito, ma rotazionale, che può assumere infiniti valori, fra i quali se ne indica il più semplice.

R. Nardini.

Stewartson, K.: On the motion of a non-conducting body through a perfectly conducting fluid. *J. Fluid Mechanics* 8, 82—96 (1960).

The motion of bodies in a direction parallel to an applied magnetic field and through a perfectly conducting fluid is considered. It is shown that the perturbation in the state of the fluid cannot remain small except in the particular case when the velocity U of the body is much smaller than that of the Alfvén waves in the fluid. In this case, however, the perturbation is not confined to the neighbourhood of the body and extends to infinity inside planes which touch the body and are parallel to the undisturbed magnetic field. In addition the body experiences a drag.

Dan Gh. Ionescu.

Hasimoto, Hidenori: Steady longitudinal motion of a cylinder in a conducting fluid. *J. Fluid Mechanics* 8, 61—81 (1960).

The steady motion of an infinitely long cylinder parallel to its length in a conducting fluid in the presence of a uniform magnetic field is discussed. Due to Alfvén waves originating at the cylinder one finds two opposite "wakes" parallel to the applied magnetic field. A formula which relates the total drag on the cylinder to the electric potential difference $\delta\Phi$ between the two undisturbed regions outside these two wakes is derived, $D/|\delta\Phi| = 2/\rho\nu\sigma$, where $\rho\nu$ is the viscosity and σ is the conductivity of the fluid. The reduction to a classical boundary-value problem is made for the case of an insulating cylinder. Exact solutions are obtained for the case of a perfectly conducting or an insulating flat strip of semi-infinite width. These give a clear picture of the fields, especially in the transition region near the edge of the strip. The case of a strip of finite width is also discussed with special reference to the viscous and the magnetic drags, D_f and D_m . The author finds that $D_f + \frac{1}{2}D_m$ on a perfectly conducting strip is equal to the viscous drag on an insulating strip for which D_m is zero. Precise values of these drags are given.

Dan Gh. Ionescu.

Kogan, M. N.: Plane flows of an ideal gas with infinite electrical conductivity, in a magnetic field not parallel to the flow velocity. *PMM J. appl. Math. Mech.* 24, 129—143 (1960), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 24, 100—110 (1960).

On the basis of the system of equations for the plane linearized magneto-hydrodynamic flow of an ideal infinite conductive fluid by a field non-parallel to the direction of the flow the author obtained the equations of the characteristics. This equation is of fourth order and four characteristics could exist. The author considers the flows when four real characteristics exist, and the case when only two real characteristics exist (he calls this region elliptic-hyperbolic). In the first case he discusses the flow around a wedge and the flow around the semi-infinite current sheet. He gets in the symmetrical flow two shock waves instead of one, as in the ordinary gas dynamics. In the second case he has a shock wave followed by a rarefaction wave. Rarefaction waves in figures 5 and 7 the author denotes by the fan which in the linear approximation should in fact be a single line. This case is analogous to the resolution of the initial shear flow discontinuity in the one dimensional hydromagnetic flow discussed by J. Bazer [*Astrophys. J.* 128, 686—712 (1958)]. But the author's interpretation of the case of a small value of the normal field is wrong. He introduces in the fluid of infinite electric conductivity the concept of a thin boundary layer around the current and vortex sheet in which the changes of the field and of the velocity ta-

ke place. There exists no physical mechanisms leading to such a boundary layer because of zero values of the viscous and magnetic diffusivity. Even in the case of the finite magnetic diffusivity, diffusion takes place around the Alfvén wave as well as around the wall, and any concept of the boundary layer (in ordinary sense) is meaningless. In the last case of the elliptic-hyperbolic flow the author obtains the result, that disturbances in infinity do not disappear, which, as he points out is in disagreement with a non-linear solution. The interpretation that in "real flow" characteristics should end is not clear.

J. Rościszewski.

Kemp, Nelson H. and Harry S. Petschek: Theory of the flow in the magnetic annular shock tube. *Phys. Fluids* **2**, 599—608 (1959).

Die Theorie der instationären Strömung eines ionisierten Gases in einem Stoßwellenrohr nach plötzlichem Einschalten des elektrischen Stromes in einem Ringleiter, der das Rohr umgibt, wurde schon vor einiger Zeit von anderen Verfassern entwickelt. Es handelt sich dabei um eine Strömung, deren Zustände nur vom Verhältnis der Ortskoordinate zur Zeit abhängen. In vorliegender Arbeit werden die Rechnungen ausgeführt. Bei kleinem statischen Druck vor der Stoßwelle und einem Verhältnis der spezifischen Wärmen von $5/3$ gibt es noch immer zwei freie Parameter des Problems, einer der durch das magnetische Feld gegeben ist und einer, in den die Stoßstärke eingeht. Die umfangreichen Resultate sind in zahlreichen Bildern wiedergegeben.

K. Oswatitsch.

Ljubarskij (Lyubarskii), G. Ja. (G. Ya.) and R. V. Polovin: The piston problem in magnetic hydrodynamics. *Soviet Phys., Doklady* **4**, 977—980 (1960), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **128**, 684—687 (1959).

Betrachtet wird ein Medium unendlicher Leitfähigkeit, welches zur Zeit $t = 0$ den Halbraum $x > 0$ ausfüllt. Der Aggregatzustand des Mediums wird durch seine Dichte, seinen Druck und durch die Komponenten des Magnetfeldes charakterisiert. Vom Zeitpunkt $t = 0$ ab bewegt sich der den Halbraum abschließende Kolben mit konstanter, zur x -Achse paralleler Geschwindigkeit in Richtung positiver oder negativer Werte x . Untersucht wird das in beiden Fällen entstehende Strömungsfeld.

F. Labisch.

Chang, C. C. and T. S. Lundgren: Flow of an incompressible fluid in a hydro-magnetic capacitor. *Phys. Fluids* **2**, 627—632 (1959).

Un fluido incompressibile, viscoso ed elettricamente conduttore è contenuto in un toro a sezione rettangolare, le cui pareti laterali PL sono perfettamente conduttrici, mentre il fondo e la copertura sono isolanti. Se fra le prime si stabilisce la differenza di potenziale U , mentre agisce un campo magnetico assiale costante, il fluido viene posto in rotazione intorno all'asse. Vengono introdotte le equazioni relative a un fenomeno dotato di simmetria assiale. Nel caso stazionario, supponendo U costante e nulla la viscosità su PL , ammettendo che lo spessore del toro in senso assiale sia piccolo in confronto alla sua estensione radiale, si riesce a calcolare in funzione del numero di Hartmann M la velocità e il campo magnetico (trasversi) e infine il rapporto fra energia dissipata per viscosità e calore di Joule (che risulta circa uno per $M > 3$). Si esamina poi il caso non stazionario ottenuto caricando l'apparecchio mediante un generatore che fornisce una forza elettromotrice costante: si calcolano il tempo richiesto per raggiungere il regime stazionario, la resistenza e la capacità, introducendo anche un circuito elettrico equivalente.

R. Nardini.

Globe, Samuel: Laminar steady-state magnetohydrodynamic flow in an annular channel. *Phys. Fluids* **2**, 404—407 (1959).

Verf. untersucht die axiale, laminare, inkompressible, stationäre, rotations-symmetrische Strömung einer elektrisch leitenden Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen ruhenden Kreiszylindern. Für den Fall eines äußeren Magnetfeldes, das nur eine radiale Komponente hat, deren Feldstärke umgekehrt proportional

mit dem Radius abnimmt, und unter Voraussetzung sog. „ausgebildeter“ Strömung gibt Verf. geschlossene Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen für die Geschwindigkeits- und Magnetfeldverteilung im Spalt als Funktionen vom Radius an. Diese Formeln enthalten das Radienverhältnis und eine Verallgemeinerung der Hartmannzahl als Parameter. Für die Grenzfälle verschwindender Hartmannzahl oder Radienverhältnis 1 gehen diese Lösungen, wie es sein muß, über in die bekannten für die gewöhnliche (d. h. nicht magnetohydrodynamische) Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern oder in diejenige (vgl. etwa T. G. Cowling, *Magnetohydrodynamics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957) für die ebene Kanalströmung unter Einfluß eines senkrechten magnetischen Feldes. Bemerkenswert an dieser Arbeit ist die sorgfältige Diskussion der Randbedingungen für das elektromagnetische Feld, eine Frage, die in manchen Abhandlungen über ähnliche Probleme bisher nicht genügend beachtet wurde.

G. Jungclauss.

Lykoudis, Paul S.: On a class of compressible laminar boundary layers with pressure gradient for an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field. IXth internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 1, 168—180 (1959).

Verf. behandelt laminare, kompressible Grenzschichten in Strömungsmedien, die wärme- und elektrizitätsleitend sind und unter dem Einfluß eines Magnetfeldes senkrecht zur Grenzschicht stehen. Mit den Annahmen $\rho\mu = \text{const}$, Prandtl-Zahl ungefähr gleich 1 und kleiner magnetischer Reynoldszahl läßt sich die Grenzschichtgleichung durch Anwendung der Stewartsonschen Transformation auf eine Form zurückführen, die im wesentlichen der inkompressiblen Grenzschicht entspricht, aber noch ein durch das Magnetfeld bedingtes lineares Zusatzglied hat. Es wird gezeigt, daß für bestimmte Verteilungen der magnetischen Feldstärke sogenannte „ähnliche“ Lösungen vom Typ der Keilströmungen möglich sind. Für einige dieser Lösungen werden die Geschwindigkeits- und Enthalpieprofile in der Grenzschicht explizit angegeben. Bei der Diskussion dieser Ergebnisse vergleicht der Verf. Profile bei gleichem äußeren Druckverlauf aber verschiedenen magnetischen Feldstärken. Mit Hinsicht auf die vom Verf. erwähnte Anwendung auf das Problem des Wiedereintritts von Flugkörpern in die Erdatmosphäre wäre es sinnvoller, Profile bei gleicher Außengeschwindigkeit zu vergleichen, denn diese ist physikalisch vorgegeben, während die Druckverteilung noch eine Funktion der in dieser Arbeit vernachlässigten elektrischen Feldstärke ist. Der Einfluß des Magnetfeldes auf den Wärmeübergang kehrt sich bei einer solchen Darstellung quantitativ gerade um.

G. Jungclauss.

Chang, C. C. and J. T. Yen: Rayleigh's problem in magnetohydrodynamics. Phys. Fluids 2, 393—403 (1959).

Verff. untersuchen die Grenzschicht an einer unendlichen ebenen Platte, die plötzlich aus der Ruhe auf eine konstante Geschwindigkeit U in der Plattenebene beschleunigt wird. Dabei wird für die Platte unendliche und für die umgebende Flüssigkeit endliche elektrische Leitfähigkeit σ angenommen, und die Richtung des äußeren Magnetfeldes sei senkrecht zur Platte. Außer dem schon in der klassischen Theorie auftretenden Parameter $y/\sqrt{\nu t}$, (ν = kinematische Zähigkeit) der ein Maß für den Abstand von der Platte darstellt, treten bei der magnetohydrodynamischen Behandlung des Problems noch zwei weitere Parameter auf, nämlich $\chi = 1/4\pi\nu\sigma$ und U/a (a = Alfvégeschwindigkeit). Für $\chi = 1$ wird eine exakte Lösung angegeben und für große und kleine χ Näherungen mit besonderer Diskussion der Grenzfälle $\chi \rightarrow 0$ und $\chi \rightarrow \infty$. Die Ergebnisse werden mit denen von V. J. Rossow [NACA Nat. Advisory Committee Aeronautics, Technical Note 3911 (1957)] verglichen. Während bei Rossow die Grenzschichten durch das Magnetfeld dünner und die Wandschubspannung größer werden als im Rayleighschen Fall, hat man hier den umgekehrten Effekt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, daß Rossow das induzierte elektrische Feld E vernachlässigt, was nur bei nichtleitenden Platten

unter gewissen Zusatzvoraussetzungen erlaubt ist. Außerdem wird gezeigt, daß die Annahme von Rossow, daß das induzierte Magnetfeld klein ist, nur für kleine Werte von U/a gilt, was in der Praxis kaum erfüllt ist. *G. Jungclauss.*

Carrier, G. F. and H. P. Greenspan: The time-dependent magnetohydrodynamic flow past a flat plate. *J. Fluid Mechanics* 7, 22—32 (1960).

Verff. behandeln die Grenzschichten in elektrisch leitenden Flüssigkeiten an ebenen Platten, die zur Zeit $t = t_0$ ruckartig auf eine konstante Geschwindigkeit U_0 in der Plattenebene beschleunigt werden. Die Rechnung wird mit der von den Verff. zuerst eingeführten Verbesserung der Oseenschen Näherung der Navier-Stokesschen Gleichungen durchgeführt. Im einzelnen werden zwei Probleme untersucht: 1. die halbunendliche Platte mit einem äußeren Magnetfeld in Bewegungsrichtung der Platte. 2. die unendliche Platte mit einem senkrechten äußeren Magnetfeld. Der 1. Fall ist kürzlich von den gleichen Verff. (dies. Zbl. 88, 192) für stationäre Strömung behandelt worden, und die Ergebnisse beider Arbeiten stimmen überein: für große Zeiten $t \gg t_0$ erhält man für $U_0/a > 1$ ($a = \text{Alfvéngeschwindigkeit}$) die in der zitierten Arbeit berechneten Geschwindigkeitsprofile, für $U_0/a < 1$ eine völlige Mitnahme der Außenflüssigkeit, was der damals diskutierten „Blockierung“ der Strömung entspricht. Der 2. Fall, also eine magnetohydrodynamische Erweiterung der Rayleigh Strömung, wird von den Verff. in der Weise behandelt, daß statt der unendlichen Platte ein Zylinder mit dem Radius R betrachtet wird. Die Betrachtung der Grenzübergänge $R \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow \infty$ zeigt, daß das Ergebnis von der Reihenfolge dieser Übergänge abhängt und zwar erhält man für erst $t \rightarrow \infty$, dann $R \rightarrow \infty$ die physikalisch sinnvolle Lösung. Verff. wollen an diesem Beispiel deutlich machen, daß bei ebenen Problemen u. U. berücksichtigt werden muß, aus welchem 3-dimensionalen Problem das eben als Grenzfall entstanden ist. *G. Jungclauss.*

Axford, W. I.: The oscillating plate problem in magnetohydrodynamics. *J. Fluid Mechanics* 8, 97—102 (1960).

Verf. untersucht die Strömung in der Umgebung einer unendlich ausgedehnten Platte, die in ihrer Ebene periodisch bewegt wird. Die Flüssigkeit habe die elektrische Leitfähigkeit σ und die kinematische Zähigkeit ν , und es sei ein konstantes äußeres Magnetfeld mit der Feldstärke H_0 senkrecht zur Platte angelegt. Unter der Voraussetzung, daß die Leitfähigkeit der Platte groß ist gegen die der Strömung, können für den praktisch wichtigen Fall $\eta \gg \nu$ ($\eta = 1/4 \pi \mu \sigma$) die Lösungen der vollständigen Gleichungen für die Geschwindigkeiten und das induzierte Magnetfeld angegeben werden. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten der Grenzschichttheorie in der Magnetohydrodynamik zu untersuchen. Verf. zeigt, daß die von ihm angegebene Geschwindigkeitsverteilung für $\nu \rightarrow 0$ zwar in der Wandnähe in die entsprechende der Grenzschichtgleichung übergeht (vgl. R. S. Ong und J. A. Nicholls, dies. Zbl. 88, 428), aber für großen Wandabstand ergibt sich eine Alfvén-Welle, die durch die Grenzschichttheorie nicht dargestellt wird. Die Ergebnisse dieser Arbeit harmonisieren mit denjenigen, die G. S. S. Ludford (dies. Zbl. 86, 203) für den Fall des Rayleighschen Problems erhalten hat. *G. Jungclauss.*

● **Meyer, Ludwig:** Singularitätentheorie der Flügelgitter. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik. Nr. 26). Zürich: Verlag Leemann 1959. 127 S. Fr. 28,—.

Verf. behandelt die zweidimensionale, inkompressible Potentialströmung durch ein Schaufelgitter, das sich bei Abwicklung eines coaxialen Zylinderschnittes durch die Leit- oder Laufradbeschaufelung einer axial beaufschlagten Strömungsmaschine ergibt. Das beschriebene Näherungsverfahren dient dem Entwurf einer Beschaufelung bei vorgegebener Umlenkung der Strömung (erste Hauptaufgabe der Schaufelgitter-Theorie) und geht auf die Gittertheorie von J. Ackeret zurück [Schweizer Bauzeitung 120, 120 (1942)]. Dabei wird die sogenannte Singularitätenmethode verwendet, bei der das Strömungsfeld aus Zirkulations- und Quell-Senkenvertei-

lungen aufgebaut wird und die Singularitäten auf den Skelettlinien der Schaufeln konzentriert werden. Es wird zunächst die Strömung für unendlich kleine Schaufelteilung (Eulerströmung) ermittelt. Danach wird die endliche Schaufelteilung berücksichtigt, wobei das Gitter für stoßfreien Eintritt ausgelegt wird. Für andere Zuströmwinkel wird das bekannte Strömungsfeld des Plattengitters von N. Scholz [VDI-Forschungsheft 442, (1954)] übernommen und dem Strömungsfeld des Entwurfszustandes überlagert. An Hand ausführlicher Tabellen und Rechenschemata wird der Gang der Rechnung näher erläutert. Für einen Profilentwurf werden etwa 25 Stunden mit der Tischrechenmaschine benötigt. Um systematische Rechnungen mit erträglichem Zeitaufwand durchführen zu können, wurde die Rechnung für die elektronische Rechenmaschine der ETH programmiert; das zugehörige Flußdiagramm wird angegeben. Dadurch wird es möglich, ein Profil mit optimaler Druckverteilung — z. B. kleinstem Unterdruck auf der Saugseite — zu entwerfen. — Die Ergebnisse der Rechnungen werden mit Messungen am elektrolytischen Trog verglichen, die Übereinstimmung ist sehr gut.

K. J. Bauermeister.

Riegels, Friedrich W.: Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. Z. Flugwiss. 9, 2—15 (1961).

Slepička, František: Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaukelgitter. Českosl. Akad. Věd. Apl. Mat. 4, 255—289, tschechische und russ. Zusammenfassung 289—290 (1959).

Es wird die Berechnung der Potentialströmung durch ein gerades Schaufelgitter, das aus zwei hintereinander liegenden Profilvereihen besteht (Spaltgitter), unter Zugrundelegung des Singularitätenverfahrens, wie es von H. Schlichting [VDI-Forschungsheft 447, (1955), dies. Zbl. 65, 407] für den Fall einer vorgegebenen Schaufelkontur (sog. 2. Hauptaufgabe) entwickelt worden ist, dargestellt. Das Verfahren wird für unendlich dünne Profile mit je einer Glauertschen Reihe für die Zirkulationsverteilung der beiden Profilvereihen durchgeführt, wobei je drei Glieder der Reihe benutzt werden, so daß in je drei Aufpunkten der Profilvereihen die kinematischen Strömungsbedingung erfüllt werden kann. Für die universellen Abwindfunktionen werden Näherungsausdrücke abgeleitet. Eine Reihe ausführlich dargestellter Beispiele und eine Abschätzung des Reibungswiderstandes des Spalt-Schaukelgitters gegenüber dem einfachen Schaufelgitter beschließen die Arbeit.

N. Scholz.

Poláček, Jan: Eine Bemerkung zum Artikel¹ von František Slepička: Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaukelgitter. Českosl. Akad. Věd., Apl. Mat. 4, 291—293, tschechische und russische Zusammenfassung 293—294 (1959).

Einige in der Arbeit von Slepička (s. vorstehend referierte Arbeit) enthaltene Ableitungen werden mit Hilfe komplexer Funktionen eleganter dargestellt.

N. Scholz.

Fabri, Jean and Raymond Siestrunk: Rotating stall in axial flow compressors. J. aeronaut. Sci. 24, 805—812, 820 (1957).

Verff. geben eine neue Theorie für den Rotating Stall in Axialverdichtern auf der Basis einer zweidimensionalen inkompressiblen Strömung. Im Gegensatz zur Arbeit von Marble (s. dies. Zbl. 65, 188) stellen sie auch Formeln ohne Linearisierung auf. Zunächst wird der linearisierte Fall behandelt. Bezüglich eines (x, y) -Systems, das starr mit dem Abreißgebiet umläuft, wird das Störgeschwindigkeitsfeld hinter dem Gitter ($x > 0$) in ein harmonisches und ein wirbelbehaftetes Feld zerlegt: ($u' + u, v' + v$), während vor dem Gitter ($x < 0$) nur ein harmonisches Störfeld herrscht: (u, v). Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der linearisierten Bernoullischen Gleichungen längs einer festen Stromlinie kommen Verff. zu einer linearen Beziehung zwischen den harmonischen Störgeschwindigkeitskomponenten am Gitter im gesun-

den Bereich:

$$u_0 - v_0 \cdot \operatorname{ctg} \tau = b \quad \text{für} \quad (2(k-1) + \nu) \pi R_m < y < (2k - \nu) \pi R_m.$$

τ und β hängen von den Strömungs- und Gittergrößen ab. Sie nehmen weiterhin an, daß im abgerissenen Gebiet eine ähnliche Relation gilt, wobei die Parameter γ und c vorläufig frei bleiben:

$$u_0 - v_0 \cdot \operatorname{ctg} \gamma = c \quad \text{für} \quad (2k - \nu) \pi R_m \leq y \leq (2k + \nu) \pi R_m.$$

Mit der Forderung verschwindender Störungen weit stromaufwärts wird dann das Hilbertsche Randwertproblem für die Funktion $u - iv$ und die linke Halbebene $x < 0$ gelöst. Dabei ist die Lösung nicht eindeutig bestimmt, wenn man noch Pole beliebiger Ordnung in den Punkten $y = (2k \pm \nu) \pi R_m$ zuläßt. Verff. wählen diejenige Lösung mit den schwächsten Singularitäten, d. h. stetiger Anschluß in $y = (2k - \nu) \pi R_m$ und Unendlichkeitsstelle kleinstmöglicher Ordnung in $y = (2k + \nu) \pi R_m$. Aus der Bedingung Anstellwinkel $\beta_1 = \text{krit. Anstellwinkel } \beta_1^*$ bezüglich rotorfesten Systems an den Ecken der Abreißzone auf dem Gitter wird die absolute Umlaufgeschwindigkeit ωR_m des Rotating Stall berechnet zu: $\omega/\Omega = 1/2 + (\rho - Q)/\rho \Omega^2 R_m^2$, wobei Q den absoluten Staudruck stromaufwärts, Ω die Wirbelgeschwindigkeit des Rotors und R_m dessen mittlerer Radius, und \bar{p} den asymptotischen statischen Druck stromabwärts bezeichnen. Bemerkenswert ist, daß die letzte Beziehung vollkommen unabhängig von γ und c ist, d. h. vom tatsächlichen Verhalten der abgerissenen Schaufeln. Das Strömungsfeld im (O, x, y) -System stromabwärts vom Laufrad erscheint als Feld, in dem Totwasserbereiche, die sich an die abgerissenen Schaufeln anschließen, sich stromabwärts erstrecken und gerade Strahlgrenzen besitzen. Im allgemeinen nichtlinearen Falle mögen (u, v) die tatsächlichen Geschwindigkeitskomponenten bezüglich des (O, x, y) -Systems bezeichnen. Verff. nehmen einen konstanten Abströmwinkel β_2 im gesunden Bereich hinter dem Gitter an. Das führt zu einer einfachen linearen Beziehung zwischen u_0 und v_0 (für $x = 0$) in $(2(k-1) + \nu) \pi R_m < y < (2k - \nu) \pi R_m$. In den abgerissenen Zonen hingegen setzen sie $u_0 = 0$ in $(2k - \nu) \pi R_m \leq y \leq (2k + \nu) \pi R_m$. Mit der zusätzlichen Randbedingung $(u, v) \rightarrow (U, \omega R_m)$ für $x \rightarrow -\infty$ wird das Hilbertsche Randwertproblem für die Funktion $u - iv$ und die linke Halbebene gelöst. Die angegebene Grenzbedingung weit stromaufwärts führt dann zu einer Formel für die Ausdehnung des abgerissenen Gebietes auf dem Schaufelkranz: $\nu = 1 - \operatorname{tg} \beta_1^* / \operatorname{tg} \beta_1$. Das Strömungsbild stromabwärts vom Gitter ($x > 0$) wird nach dem Modell der Kielwasserbereiche mit konstantem statischem Druck beschrieben. Die wirbelbehaftete Strömung, die aus den gesunden Schaufelkanälen heraustritt, wird durch Strahlgrenzen gegenüber den Kielwasserbereichen abgegrenzt. Dabei soll wie im linearen Fall für $y = (2k - \nu) \pi R_m$ (k : ganz) ein stetiger Übergang der Strömungsgrößen stattfinden, während für $y = (2k + \nu) \pi R_m$ Sprünge in diesen Größen zulässig sind. Wiederum aus den Bernoullischen Gleichungen längs einer Stromlinie im gesunden Bereich wird die früher angegebene absolute Umlaufgeschwindigkeit des "Rotating Stall" berechnet. Dabei wird wesentlich Gebrauch gemacht vom stetigen Anschluß der Strömungsgrößen an der regulären Strahlgrenze. Verff. leiten dann noch Formeln her für das stromabwärts gelegene Strömungsfeld. Die Theorie wird dann mit den Meßergebnissen an einem Kompressor verglichen, der nur aus einem Laufrad besteht. Der Wert des Durchflußkoeffizienten von $\varphi^* = 0,67$ entspricht dem Einsatzzpunkte des Rotating Stall. Er wurde gewonnen aus dem Schnittpunkt der Arbeitskurve im abgerissenen mit der im vollkommen gesunden Arbeitsbereich. Bezeichnet $\psi_s = (P_2 - Q)/(1/2 \rho \Omega^2 R_m^2)$ den statischen Druckbeiwert, dann ergibt sich aus der extrapolierten (ψ_s, φ) -Charakteristik bei gesunden Betrieb für $\varphi = \varphi^*$ die theoretische Geschwindigkeit des Rotating Stall zu $\omega/\Omega = 0,61$. Die gemessene Umlaufgeschwindigkeit desselben liegt in einem Intervall von $0,3 \leq \varphi \leq 0,55$ bei $(\omega/\Omega)_{\text{exp}} = 0,60 - 0,61$. Das ist eine sehr gute Übereinstimmung! Auch die berechneten Werte

für ν stimmen recht gut mit den beobachteten überein. Ferner wurden die Störungen infolge des Rotating Stall in den Entfernungen $x = 0,08 \cdot R_m$, $x = 0,34 \cdot R_m$ und $x = 0,97 \cdot R_m$ vor dem Laufrad gemessen. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten. Der mittlere Radius R_m wird bei Fabri und Siestrunk berechnet aus $R_m = [(R_0^2 + R_1^2)/2]^{1/2}$, R_0 : Nabenradius, R_1 : Rohrradius. Es soll erwähnt werden, daß dreimal die Bernoullische Gleichung in der stationären Form angeschrieben wird: Erstens wird eine Beziehung im Stromgebiet $x < 0$, also vor dem Gitter, zwischen den Geschwindigkeiten und Drücken für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow -0$ hergeleitet im (O, x, y) -System (fest bezüglich des Rotating Stall). Zweitens wird eine entsprechende Gleichung im Stromgebiet $x > 0$, also hinter dem Gitter, für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow +0$ aufgestellt. Drittens werden die Drücke und Geschwindigkeiten auf beiden Seiten des Rotors im rotorfesten System Σ miteinander gekoppelt. Es ist zu bedenken, daß im Rotorsystem Σ der Strömungsvorgang bei Vorhandensein Rotating des Stall gar nicht stationär ist. Außerdem muß man beachten, daß durch den Rotor Energie zugeführt wird. Schließlich ist die Kompressibilität des Gases unberücksichtigt geblieben. Bekanntlich ist diese aber von sehr großem Einfluß auf solche instationären Vorgänge (s. z. B. Söhngen-Quick: Schwingungen in Verdichtern, Commun. aux Journ. Intern. de Sci. Aero. Paris, mai 1957).

E. Meister.

Petre, A.: Aeroelastic divergence of lifting surfaces in rotation and rototranslation. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 5, 21—31 (1960).

Ein Tragflügel mit in Spannweitenrichtung unverändertem Profil rotiere in seiner Nullauftriebsebene um die Flügelwurzel. Falls der Druckpunkt des Profils vor der elastischen Achse des Tragflügels liegt, kommt es bei einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit zur aeroelastischen Divergenz. Zur theoretischen Behandlung wird angenommen, daß der Auftriebsbeiwert an einer bestimmten Stelle des Flügels dem dortigen Torsionswinkel proportional ist mit über die ganze Spannweite konstantem Proportionalitätsfaktor; an der Flügelwurzel sei der Flügel fest eingespannt; der Abstand Druckpunkt-elastische Achse ist konstant. Die kritische Geschwindigkeit der Flügelspitze, bei der Divergenz einsetzt, ergibt sich als Eigenwert eines homogenen Randwertproblems um 35% höher als bei rein translatorischer Bewegung des Flügels. Anschließend wird auch der Fall betrachtet, daß der Flügel rotiert und gleichzeitig eine Translationsbewegung ausführt. Als Ergebnis ist in einem Diagramm das Verhältnis der kritischen Divergenzgeschwindigkeit der Flügelspitze zu derjenigen bei reiner Translation in Abhängigkeit vom Verhältnis der Translationsgeschwindigkeit zur Rotationsgeschwindigkeit der Flügelspitze aufgetragen.

E. Becker.

Daubert, André: Sur les équations approchées des ondes permanentes et périodiques de gravité. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 2472—2474 (1957).

Etablissement de formules approchées pour l'étude des ondes planes rotationnelles périodiques (de période λ) en fluide de profondeur moyenne constante H . On adopte le système OXY , lié à l'onde, OX étant dirigé dans le sens horizontal de la propagation de l'onde et OY suivant la verticale ascendante. La fonction de courant $\psi(X, Y, A)$ dépend outre X et Y , d'un petit paramètre A , lié à l'amplitude de l'onde. En choisissant comme variables ψ et X , l'équation des lignes de courant est de la forme $Y = B\psi + \Phi_1(X, \psi)$ avec $-\infty < X < +\infty$, $-q \leq \psi \leq 0$, le profil de la surface libre de l'onde s'obtenant pour $\psi = 0$, tandis que $\psi = -q$ définit le fond. Le rotationnel $2\zeta = f(\psi, A) - \sum_{n=1}^{\infty} A^n \zeta_n(\psi)$ est donné; les constantes B et q sont des fonctionnelles des données $f(\psi, A)$, H , A et de λ . La fonction $\Phi_1(x, \psi)$ est solution d'une équation non linéaire aux dérivées partielles du second ordre; elle est de plus assujettie à vérifier la condition $\Phi_1 = 0$ pour $\psi = -q$ et une seconde condition non linéaire de la forme $g(\Phi_1, \partial\Phi_1/\partial\psi, K_1) = 0$ pour $\psi = 0$.

où K_1 est une constante à déterminer qui dépend analytiquement de A . De plus on doit exprimer la condition que $Y = 0$ soit le niveau moyen. On résout le problème en posant

$$K_1 = \sum_1^{\infty} A^n K_{1,n}, \quad B = c_0^{-1} + \sum_1^{\infty} A^n q_n, \quad \Phi_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_p(\psi, A) e^{ip\psi},$$

$$a_p(\psi, A) = a_{-p}(\psi, A) = \sum_1^{\infty} A^n a_{n,p}(\psi)$$

et en identifiant les coefficients des termes en $e^{ip\psi}$. On peut déterminer les a_p , B et K_1 avec l'approximation demandée. C. Jacob.

Daubert, André: Calcul approché au troisième ordre d'une houle de gravité. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2575—2577 (1957).

Développement des calculs esquissés dans la Note précédente, en tenant compte des termes en A^3 inclusivement. Forme des $a_{n,p}(\psi)$; si $p > n$ alors $a_{n,p} = 0$. Si $n - n_0 < p \leq n$, les $a_{n,p}$ sont indépendants des ζ_n pour lesquels $n \geq n_0$. Si donc le rotationnel $2\zeta = f(\psi, A)$ est d'ordre l en A , l'équation cartésienne de la surface libre des houles de longueur d'onde λ à l'ordre $l+1$ en A est indépendante de ζ , seule la célérité à l'ordre l étant influencée par ζ . C. Jacob.

Narimanov, G. S.: Über die Schwingungen einer Flüssigkeit in beweglichen Hohlräumen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk **1957**, Nr. 10, 71—74 (1957) [Russisch].

Die vom Verf. in der vorhergehenden Arbeit [Priklad. Mat. Mech., **21**, Nr. 4, 513—524 (1957)] abgeleiteten Gleichungen werden zur konkreten Berechnung der Schwingungen einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Behälter und zur Erklärung gewisser in den Experimenten von G. N. Mikešev entdeckter wesentlich nichtlinearer Effekte angewandt. — Dabei wird das abgeleitete unendliche System nichtlinearer Gleichungen auf Kosten der Vernachlässigung der höheren Potenzen aller Parameter mit Ausnahme eines (die ersteren gelten als Größen höherer Infinitesimalordnung) und des Abbrechens des unendlichen Systems vereinfacht. — Die Analyse der erhaltenen ersten Näherung zeigt, daß diese Voraussetzung berechtigt ist, da bei ihrer Nichterfüllung die lineare Theorie mit dem Experiment hinreichend gut übereinstimmt. — Unter den Bedingungen solch einer einfachsten Nichtlinearität wird die Amplitude der Schwingungen γ aus einer kubischen Gleichung gefunden. Dabei bestätigen sich die Abhängigkeit des Verhältnisses γ/a von a (der relativen Größe der Schwingungsamplitude des Gefäßes), die Verminderung des Betrages der Resonanzfrequenz der Erregung der Flüssigkeitsschwingungen im Zylinder mit größerwerdendem a und der Unterschied des Wellenprofils von dem sich nach der Theorie ergebenden, die beim Experiment entdeckt wurden. S. V. Žak (R. Ž. Mech. **1959**, Nr. 2589).

Phillips, O. M.: Centrifugal waves. J. Fluid Mechanics **7**, 340—352 (1960).

Im hohlen Innenraum eines um seine horizontale Achse rotierenden Kreiszylinders befindet sich eine Flüssigkeit, die diesen Innenraum nur z. T. ausfüllt. Bei Vernachlässigung der Schwerkraft bildet diese Flüssigkeit im ungestörten Zustand eine freie Oberfläche in Form eines zum rotierenden Zylinder konzentrischen Kreiszylinders. Es gibt nun zwei Arten von Störungen dieser freien Oberfläche, die beide in der vorliegenden Arbeit durch Linearisierung der Bewegungsgleichungen nach den Störgrößen und Vernachlässigung von Reibung und Oberflächenspannung untersucht werden. Einmal wird die freie Oberfläche durch die Schwerkraft zeitlich stationär gestört, indem der von Flüssigkeit freie Innenraum etwas nach unten verschoben wird. Außerdem wird wegen der Schwerkraft das System unterhalb einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit instabil, die Flüssigkeit bildet dann keinen geschlossenen Ring mehr, sondern hält sich als nicht mitrotierende Masse im unteren Teil des Zylinders auf. Die berechnete Stabilitätsgrenze für die Rotationsgeschwindigkeit

in Abhängigkeit vom Füllungsgrad des Zylinders mit Flüssigkeit stimmt einigermaßen mit Messungen überein. Zum anderen sind wellenförmige Störungen der freien Oberfläche möglich. Für diese Wellen wird eine Frequenzgleichung hergeleitet. Sodann werden zwei Spezialfälle näher diskutiert: stehende Wellen in Achsenrichtung und Wellen in Umfangsrichtung. Die theoretisch ermittelten Wellenzahlen im ersten und die theoretischen Frequenzen im zweiten Fall in Abhängigkeit vom Füllungsgrad werden mit Beobachtungen in guter Übereinstimmung gefunden.

E. Becker.

Peters, A. S. and J. J. Stoker: Solitary waves in liquids having non-constant density. Commun. pure appl. Math. 13, 115—164 (1960).

Die Arbeit skizziert den Stand der Theorie stationärer ebener Einzelwellen in Wasser endlicher Tiefe. Eine Verallgemeinerung wird gefunden für Flüssigkeiten, deren Dichte in vertikaler Richtung schichtweise konstant ist bzw. kontinuierlich variiert. Schon die linearisierte Theorie ergibt im ersten Fall bei zwei Schichten zwei kritische Geschwindigkeiten und damit zwei stationäre Einzelwellen, von denen die langsamere sich an der Grenze der Schichten ausprägt. Für finite Amplituden können Stromlinienverlauf und Geschwindigkeitsverlauf explizit angegeben werden. Im Fall kontinuierlich variierender Dichte findet man ein diskretes Spektrum kritischer Geschwindigkeiten mit Null als Häufungspunkt; — die zugehörigen Wellen breiten sich aus in Streifen unterschiedlicher Tiefe, welche von horizontalen Stromlinien begrenzt werden. — Unter Verzicht auf Konvergenzuntersuchungen werden die Einzelwellen dargestellt als erster Schritt eines Störansatzes für die triviale Parallelströmung.

K. Eggers.

Keller, H. B., D. A. Levine and G. B. Whitham: Motion of a bore over a sloping beach. J. Fluid Mechanics 7, 302—316 (1960).

Betrachtet wird eine Springflut (Unstetigkeit der Wellenhöhe), die sich über eine gleichmäßig geneigte Böschung bewegt. Es wird streng bewiesen, daß im Rahmen der Flachwassertheorie von Stoker die Fluthöhe mit Annäherung an den Strand gegen null strebt, und zwar monoton, sobald das Verhältnis der Wellenhöhe zur ungestörten Wassertiefe größer wird als 0,6262. Dies wird qualitativ bestätigt durch numerische Rechnungen mit verschiedenen Anfangsbedingungen (d. h. verschiedenem linearem Abfall der Wellenhöhe hinter dem Sprung). Es zeigt sich, daß Fluthöhe und Ausbreitungsgeschwindigkeit einem Gesetz folgen, das der Letzte der Verff. früher aus größeren Ansätzen gefunden hat (dies. Zbl. 81, 415). — Für die Rechnungen wurde das Differenzenverfahren nicht längs der Charakteristiken, sondern bezüglich der äquidistant geteilten räumlichen Variablen durchgeführt.

K. Eggers.

Chaskind, M. D.: Die Beugung fortschreitender Wellen an einem vertikalen Hindernis in einer schweren Flüssigkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 8, 146—149 (1957) [Russisch].

In einer schweren Flüssigkeit befinde sich ein vertikales Hindernis, das sich von der freien Oberfläche bis zum Boden erstreckt und gegen welches ein System fortschreitender ebener Wellen andringt. Es wird gezeigt, daß die Kräfte und Momente, die durch die Beugung der Wellen am Hindernis hervorgerufen werden, vollständig durch die asymptotischen Charakteristiken der Emissionsfunktionen bestimmt werden, die die Wellenemission in einer schweren Flüssigkeit bei Schwingungen des vertikalen Hindernisses charakterisieren. Die aufgestellten allgemeinen Formeln werden zur Berechnung der Kräfte und Momente in zwei konkreten Fällen (vertikaler kreisförmiger Zylinder, vertikale ebene Platte) angewandt. Im Falle einer beliebigen Querschnittsform des vertikalen Hindernisses wird eine Methode der Näherungsberechnung der asymptotischen Charakteristiken der Emissionsfunktionen angegeben, welche für kleine Werte von $k_0 l$ (k_0 Wellenzahl, l charakteristisches lineares Maß des Querschnitts) gültig ist. Es stellt sich heraus, daß in der ersten

Näherung nur die Trägheitseffekte berücksichtigt werden. Die zweite Näherung, die für die asymptotischen Charakteristiken angegeben wird, enthält auch die Dämpfungseffekte.

J. A. Geurst.

Kostjukov, A. A.: Untersuchung des Profils von Transversalwellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit hinter einem bewegten Körper. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 6, 143—144 (1959) [Russisch].

L'A. applique la théorie générale des ondes d'une faible amplitude pour déterminer la forme des ondes transversales qui se forment, dans un liquide parfait, derrière un obstacle mobile. Les résultats s'appliquent facilement au mouvement d'un navire long et étroit. En remplaçant l'influence du corps par deux sources, positive et négative, l'A. réussit d'obtenir les formules qui correspondent bien à des expériences connues.

C. Woronetz.

Chaskind, M. D.: Störkräfte und Überflutung von Schiffen beim Seegang. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 7, 65—79 (1957) [Russisch].

Im ersten Paragraphen werden allgemeine Formeln für die Störkräfte und Momente untersucht. Das Geschwindigkeitspotential ist als Summe

$$\Phi = [\Phi_1 \cdot v + \Phi_2 \omega + \varphi_0 + \varphi_7] e^{i\sigma t}$$

konstruiert, wo σ_0 die Frequenz des regulären Wellengangs, v und ω die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des Schiffs, φ_0 das Geschwindigkeitspotential der ankommenden Wellen sind. $\Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ und $\Phi_2(\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ sind gewisse Vektoren, die aus der Lösung der gewöhnlichen linearen Aufgabe der Theorie der Wellen, welche durch die Schwingungen eines Körpers bei Vorhandensein eines Systems ankommender regulärer Wellen erregt werden, zu bestimmen sind. φ_7 genügt an der Begrenzung des Körpers der Bedingung $\partial\varphi_7/\partial n = -\partial\varphi_0/\partial n$. — Die Funktionen φ_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) nennt der Verf. Ausstrahlungsfunktionen. — Ferner zeigt der Verf., in welcher Weise man bei Kenntnis der Charakteristik des Wellengangs und der Ausstrahlungsfunktion die auf das Schiff wirkenden Kräfte und Momente bestimmen kann. Als Spezialfall wird die ebene Aufgabe untersucht. — Der zweite Paragraph ist der Konstruktion der Asymptotik für die φ_i -Funktionen gewidmet. Es werden verschiedene Bemerkungen über Möglichkeiten einer Näherungsabschätzung der dynamischen Charakteristiken des schwingenden Schiffs gemacht. — Der dritte Paragraph ist Fragen der Überflutung von Schiffen beim Wellengang gewidmet. Als Charakteristik der Überflutung nimmt der Verf. die Veränderung relativ zum Flüssigkeitsniveau längs des Schiffes an. Wenn die Grundaufgabe gelöst ist und die Einflußfunktionen gefunden sind, so ist die freie Oberfläche bestimmt und die Aufgabe über die Überflutung kann in der Formulierung des Verf. gelöst werden. Der Verf. vermerkt, daß sich die Charakteristik der Überflutung bei bekannten Bedingungen auf Grund asymptotischer Formeln genähert abschätzen läßt. — Bibliographie: 21 Titel.

N. N. Moiseev [R. Ž. Mech., No. 2929 (1958)].

Gubkin, K. E.: Propagation of discontinuities in sound waves. PMM J. appl. Math. Mech. 22, 787—793 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 22, 561—564 (1958).

Zur Berechnung der Ausbreitung von schwachen Schockwellen geht Verf. von den Eulerschen Gleichungen für kompressible Medien und von der Zustandsgleichung für ideale Gase aus. Daraus ergeben sich bekanntlich zwei Klassen von Charakteristiken, von denen die eine die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die andere die Schnelle der Materieteilchen bestimmt. Durch eine genauere Untersuchung der Feldgrößen entlang der Charakteristiken erhält Verf. Gleichungen für die Ausbreitung und Verformung von schwachen Schockwellen. [Siehe auch J. B. Keller, J. appl. Phys. 25, 938—947 (1954)]. Die so erhaltenen Ausdrücke werden benutzt, um das Verhalten von divergierenden Schockwellen zu untersuchen.

M. Heckl.

Rjzancev (Riazantsev), Ju. S. (Ju. S.): On the propagation of weak waves in a continuous medium in the presence of radiant energy transfer. PMM J. appl. Math. Mech. **23**, 1126—1128 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. **23**, 787—788 (1959).

Verf. geht von den akustischen Grundgleichungen (ohne Berücksichtigung der inneren Reibung und der Wärmeleitung) aus und erweitert die Gleichung, die die Erhaltung der Energie ausdrückt um einen Term, der der Energieabnahme durch Strahlung Rechnung trägt. Im Gegensatz zu den klassischen Rechnungen von Stokes wird dabei nicht das „Newtonsche Abkühlungsgesetz“ sondern die Stefan-Boltzmann-Formel benützt. Verf. berechnet für ein vollkommen ionisiertes Gas die Abhängigkeit der Ausbreitungskonstante von der Temperatur und einigen anderen Parametern. Zum Schluß wird die durch Strahlung hervorgerufene Dämpfung mit der durch Wärmeleitung hervorgerufenen Dämpfung verglichen. *M. Hechl.*

Papadopoulos, V. M.: A line source on an interface between two media. J. Fluid Mechanics **8**, 41—48 (1960).

Ausgehend von Rechnungen von Craggs (dies. Zbl. **73**, 431: **79**, 408) und früheren Arbeiten des Verf. wird die Schallabstrahlung von einer linienförmigen Schallquelle berechnet, die sich in der (ebenen) Grenzschicht zweier Flüssigkeiten oder Gase befindet. Für den Zeitverlauf werden ein plötzlicher Einschaltvorgang und ein einmaliger kurzzeitiger Stoß angenommen. Die Schwierigkeiten, die bei diesem Problem auftreten, liegen darin begründet, daß wegen der verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten die (durch Halbkreise begrenzten) Gebiete, in denen sich die Störung nach einer gewissen Zeit bemerkbar macht, verschieden groß sind. An der Grenzschicht selbst ergeben sich daraus Schwierigkeiten, weil dort Stetigkeit der Schallfeldgrößen verlangt ist. Verf. benutzt das Verhältnis von Entfernung zur Zeit als neue Variable; dadurch geht die Wellengleichung in den oben erwähnten Halbkreisen in eine Gleichung vom elliptischen Typ über, während sie in der Nähe der Grenzschicht im Medium mit der kleinen Schallgeschwindigkeit hyperbolischen Charakter hat. Durch Zusammensetzen der Lösung in den verschiedenen Gebieten erhält Verf. die vollständige Lösung, die zeigt, daß im Medium mit der kleineren Schallgeschwindigkeit eine Art Schockwelle auftritt. *M. Hechl.*

Brekhovskich (Brekhovskikh), L. M.: On the attenuation of Rayleigh waves during propagation along an uneven surface. Soviet Phys., Doklady **4**, 150—153 (1959), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR **124**, 1018—1021 (1959).

Eine Rayleighsche (akustische) Oberflächenwelle, die sich entlang einer rauen, unebenen Oberfläche ausbreitet, wird infolge von Dispersion gedämpft. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des aus dieser Ursache herrührenden Dämpfungskoeffizienten. Die erhaltenen Ergebnisse sind sowohl für die Seismologie als auch für die Akustik von Interesse. Es wird bei den Rechnungen ausgegangen von den beiden Potentialfunktionen einer Rayleigh-Welle. Das Zeitgesetz, das zugrunde gelegt wird, entspricht dem Faktor $\exp(-i\omega t)$. Von der Gleichung für die unebene Oberfläche in der Gestalt $x_3 = \xi(x_1, x_2)$ mit x_1, x_2, x_3 als den rechtwinkligen Koordinaten eines Oberflächenpunktes wird angenommen, daß sie sich durch eine doppelte Fourier-Reihe mit den Summationsvariablen m, n darstellen läßt. Um den Dämpfungskoeffizienten selbst zu finden, ist es notwendig, die Größe der Energie zu kennen, die von der Grenzfläche aus durch die dispergierende Welle selbst fortgetragen wird. Sie ist dann gleichzusetzen der Energie der Fundamentalwelle. Die Berechnungen dieser verschiedenen Größen erfolgt nach der Störungsmethode. Sie erlaubt es, lineare Zusammenhänge zwischen den Verrückungen der einzelnen Oberflächenelemente und den elastischen Spannungen zu gewinnen. Die Anwendung dieser Theorie beruht überdies wesentlich auf der Annahme, daß der Wellenpfad längs der Oberfläche in kurze Längsstücke aufgeteilt werden kann, die in der Richtung der Wellenausbreitung liegen, klein im Vergleich zur Wellenlänge sind und eine

große Zahl von Oberflächenschwankungen enthalten. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich dann mit dem Begriff des Dämpfungskoeffizienten arbeiten. Er stellt denjenigen Energieanteil dar, der in die dispergierende Welle der Ordnung n, m abwandert. In einer Figur werden die Ergebnisse der Berechnungen des Dämpfungskoeffizienten für die drei Materialien Erdkruste, Stahl und Al dargestellt. Die zugrunde gelegten Zahlenwerte sind in einer Tabelle zusammengestellt.

H. Buchholz.

Morozov, M. G.: Die akustische Ausstrahlung von Hohlräumen, die von einer Luft-Überschallströmung umströmt werden. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr.* 1960, Nr. 2, 42—46 (1960) [Russisch].

Hières, Gabriel Chabert d': Sur les équations approchées du clapotis parfait monochromatique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 2474—2476 (1957).

Soit un fluide dans un canal à bords verticaux parallèles; Ox est dirigé suivant la horizontale de la surface libre du liquide au repos; Oy est la verticale descendante. On définit le clapotis parfait comme une solution des équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits, satisfaisant aux conditions de fond et de surface libre, telle que les déplacements soient des fonctions périodiques de t et de x et dont les composantes horizontales soient nulles pour une valeur $x = a$. Sans se préoccuper du problème de l'existence que pose cette définition, l'A. cherche à obtenir les approximations successives en utilisant les variables de Lagrange x_0, y_0, t et en développant les coordonnées x, y ainsi que $\mu = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde, en séries de puissances du paramètre A , définissant l'amplitude. Les coefficients du développement de x et y dépendent de x_0, y_0, t . Ils s'expriment par des séries trigonométriques doubles des fonctions $\cos n\nu t, \sin n\nu t$, où $\nu = 2\pi/T$, T étant la période, et $\sin p\mu x_0, \cos p\mu x_0$.

C. Iacob.

Hières, Gabriel Chabert d': Calcul approché du troisième ordre d'un clapotis parfait monochromatique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 2573—2575 (1957).

Solution du problème du clapotis parfait en développant les calculs de la Note précédente jusqu'aux termes en A^3 inclusivement. Ces calculs permettent d'obtenir une correction de longueur d'onde en fonction de l'amplitude ainsi que l'équation cartésienne de la surface libre. La solution trouvée est irrotationnelle jusqu'au troisième ordre d'approximation inclusivement.

C. Iacob.

Bodner, V. A.: Eigenschwingungen in einem System mit Kompressor und die Methoden ihrer Beseitigung. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 8, 3—12 (1957) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine theoretische Analyse und eine Berechnungsmethode der selbsterregten Schwingungen der Luft (Pumpschwingungen) bei einem System, das sich aus einer Kompressorausleitung, einem Ableitungsrohr und einem Raum konstanten Volumens, aus dem der Luftabzug mittels einer gesteuerten Klappe reguliert wird, zusammensetzt. Zur Analyse der Erscheinungen in der Rohrleitung hat man hydrodynamische Gleichungen in der Eulerschen Form verwendet. Der Kompressor ist durch seine nichtlineare Charakteristik bestimmt. Die Austrittsklappe wird nach einer nicht näher bestimmten Differentialabhängigkeit mit der durch den Kompressor in der Austrittsleitung geförderten Luftmenge bestimmt. Alle Gleichungen sind in der Nähe der stationären Zustände linearisiert mit Ausnahme der nichtlinearen Kompressorcharakteristik, die durch ein Polynom approximiert wird. Die Bedingungen der Stabilität kleiner Schwingungen sind abgeleitet. Die stationäre periodische Luftbewegung des nichtlinearen Systems ist an Hand der Methode des kleinen Parameters bestimmt, für den der Koeffizient der Widerstände in den Rohrleitungen genommen wird. In aller Kürze wird der Fall eines Regulators analysiert, der die selbsterregten Schwingungen des Luftnetzes in der Anlage verhindert. Der Verf. deutet die Verallgemeinerung der Lösung mit Hilfe der Vierpoltheorie

an. Die Arbeit ist in kurzgefaßter Form geschrieben und stellt mathematisch ziemlich hohe Ansprüche. Die Lösungsart sowie die Hauptergebnisse, die man im abschließenden Abschnitt zusammenfaßt, sind von großer Bedeutung für die Analyse und Beseitigung der selbsterregten Schwingungen bei den Maschinen mit Schleuderverdichtern, wie es z. B. bei den Gasturbinen der Fall ist. *J. Rippl.*

Escande, Léopold et Jacques Dat: Remarques sur le calcul des chambres d'équilibre déversantes avec apport de débit. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 1395—1398 (1960).

Formules donnant les caractéristiques essentielles de fonctionnement d'une chambre d'équilibre déversante avec débit d'apport dans le cas où la vitesse dans le canal d'aménée au moment où commence le déversement a une valeur négative.

Dan Gh. Ionescu.

Escande, Léopold: Manœuvres rythmiques dans le cas d'une chambre d'équilibre déversante en tenant compte de l'influence de la hauteur de chute (orifice) et en l'absence de pertes de charge. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 2651—2654 (1960).

On donne une méthode théorique pour l'étude des manœuvres rythmiques provoquant le déversement maximal en tenant compte de l'influence des variations de la hauteur de chute dans le cas d'un récepteur constitué par un simple orifice, en négligeant les pertes de charge.

Dan Gh. Ionescu.

Vladimirescu (Vladimiresku), I.: Zur Berechnung der Hochwasserdurchflüsse an kleinen Wasserbecken mit Hilfe des „Index-Hydrographen“. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 4, 449—462 (1959) [Russisch].

L'A. constant avec M. Cuenod que les courbes expérimentales relatives à des crûes diffèrent parfois essentiellement de celles tracées à l'aide d'un „Indice-Hydrographe“. Un terme complémentaire, introduit dans la formule principale, permet d'obtenir des approximations plus précises. L'A. s'arrête ensuite sur deux cas particuliers qui correspondent à la distribution linéaire des précipitations.

C. Woronetz.

Gilg, B. et M. Gavard: Calcul de la perméabilité par des essais d'eau dans les sondages en alluvions. Bull. techn. Suisse Romande 83, 45—49 (1957).

Les AA. passent en revue les méthodes permettant de résoudre l'équation $\partial^2 q / \partial x^2 + x^{-1} \partial q / \partial x + \partial^2 q / \partial z^2 = 0$, pour des conditions aux limites intervenant dans l'écoulement à travers les milieux poreux: a) méthode analytique basée sur les fonctions de Bessel et de Neumann; b) méthode graphique; c) méthode de relaxation.

Dan Gh. Ionescu.

Wiest, Roger J. M. De: Unsteady flow through an underdrained earth dam. J. Fluid Mechanics 8, 1—9 (1960).

The Curle's technique for considering unsteady development of steady two-dimensional jet and cavity flows is applied to the plane problem of the establishment of the incompressible flow through a homogeneous dam or levee with a horizontal underdrain, when the head behind it is raised and then kept at a constant value. The velocity being given by $q = -K \text{ grad } \Phi$, the expansion $\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + \Phi_1(x, y) e^{-\lambda t} + O(e^{-2\lambda t})$ is used and the unsteady boundary is found by normally displacing the steady-state boundary by an amount $\delta(x, y, t) = \delta_1(x, y) e^{-\lambda t} + O(e^{-2\lambda t})$. A boundary value problem is formulated in a dimensionless hodograph plane and the value of λ is found from the vanishing of the determinant of an infinite system of linear homogeneous equations. The mode of motion of the free surface has been computed for the family of dams considered by R. J. M. DeWiest (1957).

St. I. Gheorghitza.

Vasil'ev, V. A.: Über die Form der Erhebung des Grundwassers bei teilweiser Infiltration auf seine Oberfläche. Izvestija Akad. SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 11, 177—181 (1957) [Russisch].

Nach der Methode von P. Ja. Polubarinova-Kočina wird die hydro-mechanische Lösung angegeben für den Fall der ebenen stationären Filtration (nach

dem Gesetz von Darcy) in eine Schicht homogenen Bodens, die von einer horizontalen, unendlich durchdringbaren Schicht unterbettet ist, unter der Voraussetzung, daß auf einem Teil der Depressionsfläche eine gleichmäßige Infiltration in den Boden oder eine Verdampfung in die Atmosphäre stattfindet.

S. N. Numerov (R. Ž. Mech. 1959, Nr. 6534).

Nikolaevskij, V. N.: Über die genaue und die genäherte Lösung eines ebenen Problems der Filtration für gemischte Randbedingungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 10, 102—105 (1957) [Russisch].

Die genaue und die genäherte Lösung eines ebenen Problems für den Fall der Druckfiltration gegen eine unendliche Reihe unendlich dünner senkrechter Spalte, die in gleichem Abstand voneinander auf der Symmetrieachse einer von geradlinigen Zuführungskonturen begrenzten streifenartigen Schicht angeordnet sind, werden verglichen. — Die Näherungslösung wird konstruiert, indem das Hilbertsche Problem mit inhomogenen Bedingungen auf einer der Berandungen des rechnerisch behandelten Teilstücks des Filtrationsgebietes durch das Dirichlet-Neumannsche Problem mit homogenen Bedingungen auf den Berandungen ersetzt wird. — Die reduzierte genaue Lösung wurde zum ersten Mal von N. N. Pavlovskij bei der Untersuchung der Aufgabe für ein inneres einspundiges Teilstück erhalten (s. N. N. Pavlovskij, Hydromechanische Berechnung von Dämmen Senkoverscher Bauart. Gosstrojizdat 1937). — Es werden die nach dem genauen und dem genäherten Verfahren berechneten Werte der Ergiebigkeiten und des zusätzlichen Filtrationswiderstands, der durch die Einengung des Stroms beim Eintritt in den Spalt bedingt ist, verglichen. Die Resultate des Vergleichs bestätigen für die vorliegende Aufgabe die Annehmbarkeit der Hypothese von I. A. Čarnyj über die Unveränderlichkeit des mittleren gewogenen Potentials. — Es wird empfohlen, das betrachtete Problem zur Bestimmung des Zustroms gegen ein vollkommenes Bohrloch in einer kreisförmigen Schicht für den Fall zu verwenden, wenn die Anstauung nur auf einem Teilgebiet der Außengrenze erfolgt, während ihr übriger Teil undurchdringlich ist. — Bibliographie: 6. Titel.

L. N. Pavlovskaja (R. Ž. Mech. 1959, Nr. 624).

Razumova-Sretenskaja, V. N.: Einige axialsymmetrische Bewegungen des Gases in einem Kohlenflöz. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 6, 118—125 (1957) [Russisch].

Die Aufgabe der Bestimmung der stationären axialsymmetrischen Bewegung eines dem polytropen Gesetz $\rho = \beta p^{1/n}$ unterliegenden Gases (ρ ist die Dichte, p der Druck, β die Gaskonstante, n der Exponent der Polytrope) in einem porösen Medium wird auf die Bestimmung der axialsymmetrischen Potentialbewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit mit dem Potential $\Phi = p^{n-1/n}$ zurückgeführt. — Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, verschiedene Strömungen des polytropen Gases im porösen Medium mittels Verteilung von Quellen und Senken zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit werden auf diese Weise zwei Strömungen eingehend untersucht, eine davon erhält man aus einer punktförmigen Quelle und Senke, die andere durch gleichmäßige Verteilung der Quellen und Senken längs einer Strecke der Symmetrieachse. Für beide Strömungen werden Formeln für die Durchflüsse erlangt und die Stromlinien konstruiert. Zwei Zahlenbeispiele sind untersucht. Die erhaltenen Strömungen können als Näherungslösungen der Aufgabe über den Zustrom des Grundwassers oder des Gases gegen ein einzelnes Bohrloch betrachtet werden.

G. N. Pychteev (R. Ž. Mech. 1958, Nr. 6885).

Želtov, Ju. P.: Über die Bildung vertikaler Risse in einer Schicht mittels einer filterbaren Flüssigkeit. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 8, 56—62 (1957) [Russisch].

Bei Vorhandensein einer stationären Druckverteilung in einem elastischen porösen Medium wird mittels der Methode von N. I. Muschelišvili (Einige Hauptaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie; dies. Zbl. 57, 168) eine komplexe

Darstellung der Spannungen und Verschiebungen für den Fall des ebenen Problems konstruiert. Ferner wird folgende Aufgabe untersucht: in der Schicht hat sich ein vertikaler Riß durch die ganze Mächtigkeit derselben gebildet; die Flüssigkeit bewegt sich aus dem Bohrloch längs des Risses und filtert in die Schicht hinein. Auf der kreisförmigen Zuführungskontur und außerhalb derselben ist der Flüssigkeitsdruck konstant, so daß die Bedingung für das Verschwinden des Laplaceschen Operators in der ganzen Ebene erfüllt ist; die Schicht ist im Unendlichen durch einen konstanten seitlichen Druck zusammengepreßt. Die Druckverteilung auf der Kontur des Spaltes wird durch eine quadratische Parabel approximiert; das Vorhandensein des Spaltes selbst wird vernachlässigt und danach das entsprechende ebene Problem der Elastizitätstheorie gelöst, wobei die Dimension des Risses aus der Bedingung der Endlichkeit der Spannungen an den Enden des Spaltes bestimmt wird. Es wird auch die Veränderung der Breite des Spaltes über seine Länge bestimmt. Ferner wird die Aufgabe der Filtrationstheorie getrennt untersucht.

G. I. Barenblatt (R. Ž. Mech. 1958, Nr. 13160).

Matveenko, T. I.: Über die instationäre Filtration in einer und in zwei Schichten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 6, 126—129 (1957) [Russisch].

In linearisierter Form werden axialsymmetrische Aufgaben über den instationären Zustrom (unter Berücksichtigung der Infiltration) des Grundwassers untersucht: — 1. gegen ein Bohrloch, das eine durch einen schwach durchdringlichen Wasserstau unterbettete Schicht dräniert, wobei der Druck in der unteren Schicht als konstant gilt; — 2. gegen ein Bohrloch bei Zusammenwirken zweier durch eine schwach durchdringbare Schicht getrennter Schichten, unter der Bedingung, daß der Druck in der dritten Schicht konstant ist. — Unter Verwendung der Laplace-Transformation findet der Verf. für beide Fälle die Gleichung der freien Oberfläche sowie den Betrag des Drucks in der zweiten wasserführenden Schicht (im Problem der zwei Schichten). — Wie N. N. Verigin und F. T. Bočever bemerken, ist das vom Verf. erhaltene Integral (1.12) analog dem früher von Hantush bei der Lösung desselben Problems für die Druckschicht gefundenen und von ihm eingehend tabulierten Integral [Trans. Amer. Geophys. Union. 37, 702—714 (1956)]. Die Randbedingung (1.19), welche Verf. für die Wandung des Bohrlochs stellt, entspricht der zeitlichen Veränderung der Durchflußmenge Q auf einer Kurve mit Maximum, wobei für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ die Durchflußmenge $Q \rightarrow 0$; daher kann man bei $Q = \text{const}$ diese Lösung lediglich für ein beschränktes Zeitintervall benutzen. — Bibliographie: 6 Titel.

V. A. Karpyčev (R. Ž. Mech. 1959, Nr. 7851).

Pilatovskij (Pilatovsky), V. P.: The propagation of fluctuations along the boundary of separation, when unhomogeneous flow in porous media is formed by relative sliding of fluids. *Ukrain. mat. Žurn.* 10, 280—288, engl. Zusammenfassung 288 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht die zweidimensionale instationäre Filtration (nach dem Gesetz von Darcy) zweier sich nicht vermischender inkompressibler Flüssigkeiten verschiedener Dichten und Zähigkeiten in einer gegen den Horizont geneigten ebenen dünnen unbegrenzten Schicht. Die Verdrängung einer Flüssigkeit durch die andere soll vollständig sein. Die Durchdringbarkeiten der mit verschiedenen Flüssigkeiten erfüllten Schichtzonen werden für den allgemeinen Fall als verschieden vorausgesetzt. Im Anfangszeitpunkt fällt die Trennungsgrenze der Flüssigkeiten mit der Geraden zusammen, die die Überschneidung der Ebene der Schicht mit der des Horizonts darstellt; dabei findet eine eindimensionale stationäre Filtration in Richtung der Trennungsgrenze der Flüssigkeiten mit relativem Gleiten der einen Flüssigkeit auf der anderen statt. Danach erfolgt spontan eine kleine Störung der Trennungsgrenze der Flüssigkeiten; die Strömungscharakteristiken in der gestörten Bewegung werden für einen beliebigen Zeitpunkt ermittelt. Bei der Ermittlung der erwähnten Strömungscharakteristiken (Form der Flüssigkeitstrennungsgrenze, die Filtrations-

potentiale für jede Flüssigkeit und der Druck) kommt das in einer anderen Arbeit des Verf. (s. dies. Zbl. 81, 206) erhaltene System von Integrodifferentialgleichungen zur Verwendung, wobei in diesem die Glieder entfallen, die die zweiten und darauffolgenden Potenzen des in die Gleichung der gestörten Flüssigkeitstrennungsgrenze eingehenden Störungsparameters enthalten. Auf Grund einer Analyse der erhaltenen Resultate werden Überlegungen über den Charakter der Fortpflanzung der Störung der Trennungsgrenze der Flüssigkeiten angestellt. Zum Schluß des Artikels wird ein Spezialfall der Störung der Flüssigkeitstrennungsgrenze untersucht. — Anmerkung des Referenten. Die im Artikel angegebenen Ausdrücke des Drucks (Formeln [44]) sind falsch, da die eine Flüssigkeit nicht nur die eine Hälfte der Schicht, sondern teilweise auch die andere erfüllt.

S. N. Numerov (R. Ž. Mech. 1959, Nr. 9023).

Klassische Feldtheorie und Relativitätstheorie:

Romain, Jacques: Invariants différentiels d'un champ maxwellien. C. r. Acad. Sci., Paris 251, 1975—1977 (1960).

On calcule les invariants différentiels du premier ordre d'un champ maxwellien dans le vide, du type lumineux en un point d'univers et son voisinage. On en déduit une propriété géométrique du champ et un caractère tensoriel de l'onde plane.

Zusammenfassung des Autors.

Power, G.: Extremum methods for certain electrical problems involving homogeneous anisotropic material. Appl. sci. Research, B 8, 84—92 (1959).

Rybarski, A.: Zur Frage der Variationsprinzipien der Gleichungen einer Synchronmaschine. Zastosowania Mat. 4, 350—360 (1959).

Der Rotor eines Generators möge sich in der Zeit t um den Winkel γ weiterdrehen. Die Induktionskoeffizienten $L_{kj}(\gamma)$ sind dann (endliche, stetige, stetig zweimal differenzierbare) Funktionen von γ . Stellen ferner e_k die äußeren Spannungen, i_k die Stromstärken und r_{kj} die aktiven Widerstände des Systems dar und ist $M(t)$ das mechanische Moment, das auf das System einwirkt sowie J das Trägheitsmoment des Rotors, so gelten für die $n + 1$ Unbekannten i_k und γ die folgenden $n + 1$ Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} [L_{kj}(\gamma) i_j] + r_{kj} i_j = c_k(t), \quad J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \frac{dL_{kj}}{d\gamma} i_k i_j = M(t) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Sie lassen sich aus den Lagrangegleichungen nicht-konservativer Systeme dadurch ableiten, daß man als Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} L_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} J \dot{\gamma}^2 + e_k q_k + M \gamma$$

und als Dissipationsfunktion $R = \frac{1}{2} r_{kj} q'_k q'_j$ annimmt und nachher $q_k = i_k$ setzt.

Das Hamiltonprinzip lautet dann $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial R}{\partial q_k} \delta q_k dt$. Für die oben angegebenen Differentialgleichungen des Generators wird nun je ein Minimalprinzip angegeben, von denen jedes mit den Gleichungen innerhalb einer engeren Funktionenklasse äquivalent ist als es das Hamiltonprinzip ist. E. Hardtwig.

● Higonnet, Rene A. and Rene A Grea: Logical design of electrical circuits. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958. IX, 220 p. \$ 10,00.

● Wait, J. R.: Electromagnetic radiation from cylindrical structures. London: Pergamon Press 1959. IX, 200 p. 50 s. net.

Gliddon, J. E. C.: Use of Green's function in the solution of ionospheric diffusion problems. Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 347—353 (1959).

In der Kontinuitätsgleichung mit Ionendiffusion (partielle Differentialgleichung nach Höhe und Sonnenstand) wird der Anlagerungs-Term durch eine geeignete Transformation beseitigt. So erreicht man die Form der partiellen Differentialgleichung

der Wärmeleitung. Mit Hilfe geeigneter Greenscher Funktionen wird sie für konstante sowie für exponentiell mit der Höhe abnehmende Anlagerung gelöst. Die erste Lösung ist mit der von Ferraro und Özdoğan identisch. *K. Rawer.*

● **Ginzburg, V. M. und I. N. Belova:** Die Berechnung parabolischer Antennen. [Расчет параболических антенн.] Verlag „Sovetskoe Radio“ 1959. 250 S. R. 8,50 [Russisch].

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. Kapitel I. Berechnung parabolischer Antennen nach dem Feld in der Öffnung des Reflektors. § 1. Methodik der Berechnung 8; § 2. Allgemeine Methoden zur Berechnung parabolischer Antennen 22; Kapitel II. Berechnung von Antennen mit punktförmigem Strahler nach den Strömen am Reflektor. § 1. Methodik der Berechnung 65; § 2 Beispiel einer Berechnung und sein Vergleich mit dem Experiment 77. Kapitel III. Berechnung von Antennen mit zusammengesetztem Strahler. § 1. Methodik der Berechnung 91; § 2. Methode der Berechnung von Antennen mit verkleinerten nahen Seitenblättern 94; § 3. Beispiele von Berechnungen 104. Kapitel IV. Programme zur Antennenberechnung auf der elektronischen Rechenmaschine BESM 121; § 1. Zusammenstellung von Formeln und allgemeine Bemerkungen zu den Programmen 122; § 2. Programm I. Berechnung der Richtungsdiagramme von Spiegelantennen 125; § 3. Programm II: Berechnung der Richtungsdiagramme von Spiegelantennen mit verkleinerten Seitenblättern 140; § 4. Programm III: Berechnung der Richtungsdiagramme einer Reihe von willkürlichen Quellen 154; § 5. Programm IV: Berechnung der Ströme auf der Oberfläche von Spiegelantennen 157; Anlage I. Bestimmung der Richtung des Maximums des Diagramms der Strahler 169; Anlage II. Richtungsdiagramme von parabolischen Antennen mit symmetrischen Reflektoren 170; Anlage III. Richtungsdiagramme von parabolischen Antennen mit unsymmetrischen Reflektoren 171. Das Buch ist für Radioingenieure vorgesehen und könnte sich für Studenten höherer Semester an radiotechnischen Hochschulen als nützlich erweisen.

Szulkin, P.: Sur un système de deux dipôles arbitraires couplés, excité par une onde plane. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. techn. 8, 509—514 (1960).

Ting, Lu: On the diffraction of an arbitrary pulse by a wedge or a cone. Quart. appl. Math. 18, 89—92 (1960).

Trifft ein beliebiger zweidimensionaler Impuls q , auf die Kante eines zweidimensionalen Keiles vom Keilwinkel μ , so daß er an der Kante dieses Keiles gebeugt wird, so ergibt sich — wie Verf. zeigt — mit Benutzung des Greenschen Theorems, daß infolge der Beugung an der Kante die Amplitude des Impulses nur den Wert $2\pi/(2\pi - \mu)$ besitzt. Im dreidimensionalen Fall, also bei einer räumlichen Ecke bzw. einer Kegelfläche vom räumlichen Öffnungswinkel ω ergibt sich entsprechend eine Reduzierung der Amplitude des Impulses um den Faktor $4\pi/(4\pi - \omega)$. *J. Picht.*

Thomas, T. S. E.: Screening effect of a circular disk. Amer. J. Phys. 29, 37—39 (1961).

A theory of the effect of a circular metal disk in screening the electric field of a pole and the magnetic field of a radio-frequency dipole (eddy current screening) on the axis is developed in terms of spheroidal functions. The screening effectiveness is defined as the ratio of the screened to the unscreened field and curves are given showing its variation along the disk axis. In the electrical case the field is zero at a certain distance along the axis. Zusammenfassung des Autors.

Kelly, R. E. and A. Russek: Diffraction of a plane electromagnetic wave by cylinders with anisotropic conductivity. Nuovo Cimento, X. Ser. 16, 593—610 (1960).

Die Untersuchung bezieht sich auf Beugungseffekte, bewirkt durch anisotrope leitende Flächen, z. B. Schirme, die aus einer Vielzahl eng benachbarter, aber gegeneinander isolierter Drähte bestehen, so daß in diesen Flächen Ströme nur in ganz bestimmter Richtung fließen können. Verf. spricht daher von einer „Ein-Richtungs-Leitung“. Da bisherige theoretische Untersuchungen sich auf geometrisch ebene Objekte bezogen, behandelt Verf. die Beugung, die durch einrichtungsleitende, nichtebene, also gekrümmte Flächen bewirkt wird. Er behandelt die Beugung an einem Zylinder, der nur in Richtung parallel seiner Achse eine von 0 verschiedene Leitfähigkeit besitzt bzw. — als weiteren Fall — der nur eine zur Achse kreisringförmige Leitfähigkeit längs einer Spiralbahn (einer „schneckenlinienartigen“ Bahn) besitzt. Die Ergebnisse werden mit denen verglichen, die sich für die — gleichfalls behandelte — Beugung an einem isotrop leitenden Zylinder ergeben. — Verf. stellt

die für eine „Ein-Richtungs-Leitung“ in Betracht kommenden 6 Grenzbedingungen (für \mathcal{E} und \mathcal{H} normal bzw. tangential zur Fläche, wobei im letzten Fall noch zu unterscheiden ist zwischen parallel und senkrecht zur Richtung der Leitfähigkeit) zusammen. Das gebeugte Feld wird durch Benutzung der Komponenten des zugehörigen elektrischen bzw. magnetischen Hertzschen Vektors vereinfacht, mit dessen Hilfe \mathcal{E} und \mathcal{H} für die Beugung an einem nur in Achsenrichtung bzw. nur senkrecht zur Achsenrichtung leitenden Zylinder berechnet werden. Um die physikalischen Zusammenhänge besser zu erkennen, werden — für die verschiedenen Fälle — die auf dem Zylinder induzierten Oberflächenströme, die asymptotischen Fernfeld-Komponenten, sowie Streuungsquerschnitt und angulare Verteilung der gebeugten Energie berechnet und graphisch dargestellt, nachdem zunächst die erforderlichen Formeln abgeleitet sind. *J. Picht.*

Boldyrev, N. G.: Geometrische Optik im Lobačevskijschen Raum. Naučn. Doklady vyss., Skoly. fiz-mat. Nauki 1959, Nr. 3, 7—9 (1960) [Russisch].

Klebe, Joachim: Über die Wirkung von Brechzahländerungen eines beliebigen optischen Systems auf dessen paraxiale Schnittweite. Wiss. Z. Päd. Hochschule Potsdam, math.-naturw. R. 3, 3—9 (1957).

Verf. betrachtet zunächst den Fall, daß in einem k -flächigen optischen System eine Änderung der Brechungszahl n eines Mediums erfolgt. Es werden sowohl exakte als auch Näherungsformeln angegeben, mit deren Hilfe die durch die n -Änderung bewirkte Schnittweitenänderung berechnet werden kann. In der Näherungsformel besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Schnittweiten- und Brechungszahländerung. Auf einem ähnlichen Wege wird ein allgemeiner Ausdruck für die Schnittweitenänderung erhalten, die durch Brechungszahländerungen an beliebigen Stellen des Systems bewirkt wird. In der Näherung setzt sich die gesamte bildseitige Schnittweitenänderung additiv aus den einzelnen voneinander unabhängigen Schnittweitenabweichungen zusammen, die jeweils durch eine einzelne Brechzahländerung hervorgerufen werden. Der Verf. weist darauf hin, daß die Formeln auch die chromatische Aberration eines optischen Systems zu berechnen gestatten, falls für eine Wellenlänge die paraxiale Durchrechnung vorliegt. *H. Riesenberg.*

● **Fock, Vladimir:** Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Übersetz. aus dem Russischen. Wissenschaftl. Redaktion Hans Joachim Meister. Berlin: Akademie-Verlag 1960. XIX, 493 S. Ganzln. DM 42,50.

Vgl. die Besprechung der englischen Ausgabe in diesem Zbl. 85, 423.

Synge, J. L.: On certain identities connected with the Einstein tensor. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 61, 29—36 (1960).

Verf. entwickelt den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ nach konstanten Parametern gemäß $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda_k g^k_{\mu\nu}$. Aus dieser Entwicklung ergeben sich Entwicklungen für den Riemann-Tensor $R_{\sigma\mu\nu\lambda}$ und für den Einstein-Tensor $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, die der Verf. bis zu Termen dritter Ordnung explizit angibt. Ferner wird die Entwicklung für den Vektor $G^\mu{}_{;\nu}$ hergeleitet. Das identische Verschwinden dieses Vektors gemäß der Bianchi-Identität liefert einen Satz von Identitäten, die partielle Differentialgleichungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten von $G_{\mu\nu}$ darstellen. *H. Treder.*

Misner, Charles W.: Wormhole initial conditions. Phys. Review, II. Ser. 118, 1110—1111 (1960).

Verf. diskutiert die aus den Einsteinschen Vakuumgleichungen für ein momentan zeitunabhängiges Gravitationsfeld folgende Bedingung für die Cauchyschen Anfangswerte auf der raumartigen Hyperfläche $x^0 = 0$. Es wird gezeigt, daß es Lösungen dieser Bedingung gibt, bei denen die Metrik auf der Anfangsmannigfaltigkeit singularitätsfrei ist, jedoch nicht einfach zusammenhängt, sondern vielmehr eine „wormhole“-Topologie im Sinne von Wheeler (dies. Zbl. 64, 224) besitzt. *H. Treder.*

Papapetrou, A.: Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. der Phys., VII. F. 1, 186—197 (1958).

In Verallgemeinerung der Resultate einer vorangehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 89, 444) wird gezeigt, daß jedes in einem Außenbereich $r \geq r_0$ die Einsteinschen Gravitationsgleichungen und die üblichen Grenzbedingungen erfüllendes Gravitationsfeld, das periodisch von der Zeit abhängig ist, in diesem Bereich auf eine zeitunabhängige Form transformiert werden kann. Unabhängig vom Verhalten des Gravitationsfeldes im Innengebiet $r_0 > r$ gibt es also keine Lösungen der Gravitationsgleichungen, welche im Gebiet $r \geq r_0$ zeitlich periodisch sind. — Darüber hinaus wird gezeigt, daß auch keine im Bereich $r \geq r_0$ zeitlich periodischen Lösungen der Einstein-Maxwellschen Gleichungen für das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld existieren; eine etwaige periodische Abhängigkeit von der Zeit kann durch Koordinaten- und Eichtransformationen eliminiert werden. — Verf. bemerkt, daß die Nichtexistenz zeitlich periodischer Gravitationsfelder im Gebiet $r \geq r_0$ darauf hinweist, daß — in Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis Einsteins [S.-Ber. Preuß Akad. Wiss. Berlin 1918, 154—167 (1918)] — ein beschleunigter Körper, der die Quelle eines zeitabhängigen Gravitationsfeldes ist, Gravitationsstrahlung ausstrahlt.

H. Treder.

Papapetrou, A.: Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. der Physik, VII. F. 2, 87—96 (1958).

Verf. zeigt, daß die in zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 89, 444) und vorstehendes Referat) bewiesene Nichtexistenz von im räumlich Unendlichen galileischen, zeitlich periodischen Gravitationsfeldern insofern unabhängig von der verwandten der Donderschen Koordinatenbedingung ist, als es keine Transformationen gibt, die ein logarithmisch divergierendes Gravitationsfeld zu einem im Unendlichen regulären Feld machen. — Weiter zeigt der Verf., daß die logarithmische Divergenz der 2. Näherung für alle zeitlich periodischen Gravitationsfelder resultiert, bei denen die 1. Näherung im Unendlichen galileisch ist und die Zeitabhängigkeit der 1. Näherung durch Fourier-Reihen darstellbar ist. Es gibt also keine im Unendlichen galileischen, periodischen oder fastperiodischen Gravitationsfelder. — Hingegen ist die logarithmische Divergenz der 2. Näherung dann nicht notwendig, wenn die Zeitabhängigkeit der 1. Näherung in Form eines Fourier-Integrals gegeben ist, mit der Eigenschaft, daß für $t \rightarrow \pm \infty$ das Gravitationsfeld 1. Näherung zeitunabhängig wird.

H. Treder.

Arnowitz, R., S. Deser and C. W. Misner: Energy and the criteria for radiation in general relativity. Phys. Review, II. Ser. 118, 1100—1104 (1960).

In einer früheren Arbeit [ibid. 116, 1322—1330 (1959)] haben die Verff. eine nicht verschwindende Hamilton-Dichte des Gravitationsfeldes definiert, die bei geeigneter Koordinatenwahl mit der Energiedichte identifiziert werden kann. Verff. zeigen, daß bei Verwendung eines im Unendlichen galileischen Koordinatensystems die Gesamtenergie eines mit Feldquellen gekoppelten Gravitationsfeldes durch das über eine unendliche Sphäre zu nehmende Oberflächenintegral $E = \int g^{T,i} dS_i$ gegeben ist. Hierbei ist $-g^{T,i}$ einfach die Hamilton-Dichte, die der linearisierten Einsteinschen Gravitationstheorie entspricht. Im Fall des reinen Gravitationsfeldes ist die gemäß den Verff. definierte Energie mit derjenigen identisch, die sich aus den Pseudotensoren von Einstein oder Landau-Lifschitz herleitet und die sich auch aus der neuen Energiedefinition von Dirac (dies. Zbl. 83, 427) ergibt. — Eine Strömung von gravitativer Strahlungsenergie ist dann vorhanden, wenn in einem kanonischen Koordinatensystem ein im Unendlichen nicht verschwindendes Poynting-Vektor $-2\pi^{ij}$ existiert, wo die π^{ij} die kanonischen Impulsvariablen des Gravitationsfeldes sind.

H. Treder.

Peres, Asher and Nathan Rosen: Gravitational radiation damping of non-gravitational motion. *Ann. of Phys.* **10**, 94—99 (1960).

Verff. definieren als Gravitationsleistung das Integral $U = - \int (g \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{,\nu} dS_{\mu} \neq 0$ und formen den Integranden mit Hilfe der dynamischen Gleichung $\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{;\nu} + = 0$ in einen Ausdruck um, der nur $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ selbst und $g_{\mu\nu}$ nebst ersten Ableitungen enthält. Sie gehen in U dann mit dem Eigengravitationspotential 1. Näherung eines multipolartigen Körpers ein und berechnen so die momentane gravitative Selbstarbeit dieses Körpers. Die Beiträge des Monopol- und des Dipolanteils von $g_{\mu\nu}$ verschwinden. Hingegen liefert der Quadrupolanteil eine Strahlungsleistung, die dem von Einstein [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1918**, 154—167 (1918)] hergeleiteten Ausdruck für die Gravitationsstrahlung eines Quadrupols entspricht. *H. Treder.*

Chambers, Ll. G.: The Hund gravitational equations and the expanding universe. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **120**, 263—270 (1960).

Es werden die von Hund aufgestellten Gravitationsgleichungen (dies. Zbl. **33**, 424) angewandt auf ein sphärisches expandierendes Universum. Im Rahmen dieser so entwickelten kosmologischen Theorie wird dann versucht, aus den jetzigen Werten von beobachtbaren kosmischen Konstanten (der Hubbleschen Konstante und der mittleren Materiedichte des Universums) auf das Alter des Universums zu schließen. *H. Vogt.*

Rindler, W.: Remarks on Schrödinger's model of de Sitter space. *Phys. Review, II. Ser.* **120**, 1041—1044 (1960).

Die geometrischen und topologischen Eigenschaften des von Schrödinger (Expanding Universes, Cambridge 1956, Kap. 1) angegebenen zweidimensionalen Modells des de Sitter-Kosmos werden eingehend diskutiert. Insbesondere bestimmt der Verf. die auf dem Schrödingerschen Hyperboloid verlaufenden Weltlinien von frei bewegten und von gleichmäßig beschleunigten Teilchen. *H. Treder.*

Venini, Carlo: Moto di dipoli elettrici nell'ultima teoria unitaria einsteiniana. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **26**, 490—497 (1959).

Dans cet article, l'A. utilise des résultats dus à E. Clauser [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 408—416 (1956)] pour résoudre de manière approchée les équations du champ et écrire les équations du mouvement. Les équations du champ sont celles de la théorie unitaire d'Einstein. Leur résolution approchée aux ordres 2 et 3 conduit à l'introduction d'un potentiel électrostatique biharmonique; Clauser le supposait fonction uniquement de la distance à la particule alors qu'ici le potentiel est fonction de la distance à la particule et de l'angle avec une direction liée en ce point. Le choix d'un tel potentiel conduit à l'introduction de sept constantes; on les précise en formant les équations du mouvement telles qu'elles ont été écrites par Clauser. Celles-ci sont formées uniquement pour deux masses chargées dipolaires analogues agissant l'une sur l'autre. Les équations trouvées sont conformes aux résultats de Clauser. Il s'introduit un terme tenant compte du dipôle; le potentiel dipolaire apparaît comme un terme additif dans le potentiel électrostatique. L'A. signale l'extension aisée des équations du mouvement à celles d'un système de plus de deux particules. *J. Renaudie.*

Clauser, Emilio: Condizioni di integrabilità e moto di particelle nell'ultima teoria unitaria einsteiniana. *Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **26**, 498—505 (1959).

Pour les équations du champ pur de la théorie gravitationnelle on a étudié les conditions d'intégrabilité au moyen d'un système infini d'équations récurrentes dans l'hypothèse de quasi-stationarité. Ce procédé est adapté dans cet article au champ unitaire d'Einstein (équations de 1953), avec les mêmes hypothèses. *J. Renaudie.*

Mishra, R. S.: Einstein's connections. Tensor, n. Ser. 9, 8—43 (1959).

Dans cet article l'A. détermine les solutions des équations d'Einstein dans les différents cas (trois types d'indices d'inertie et quatre classes) mis en évidence par V. Hlavaty (Geometry of Einstein's Unified Field Theory; ce Zbl. 78, 433) et Mme Tonnelat (La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements; ce Zbl. 66, 220). Dans une première partie il étudie les conditions de validité des résultats obtenus par Mme Tonnelat (ouvrage cité ci-dessus) et cherche à établir à l'aide de contre-exemples que ceux-ci ne sont valables que pour la première classe alors que Mme Tonnelat établissait leur validité aussi pour les autres classes. Il utilise alors les résultats de Hlavaty pour montrer que la solution due à cet auteur pour la première classe peut être utilisée pour la seconde classe par passage à la limite, et ceci pour tous les indices d'inertie en supposant qu'un paramètre λ , introduit au cours du calcul, ne s'annule pas. Dans les deuxième et troisième parties l'A. étudie plus spécialement les cas des indices d'inertie 4 et 0 (resp.) pour les différentes classes. Il montre les conditions d'existence et d'unicité pour l'indice 4 en utilisant les repères non holonomes (v. Hlavaty). Une méthode d'approximation est employée dans certains cas — elle n'est pas valable pour tous —, mais en note il est précisé qu'une méthode de substitutions successives valable dans tous les cas a depuis été trouvée; elle sera publiée ultérieurement. *J. Renaudie.*

Benvenuti, Pietro: Formulazione relativa delle equazioni dell'elettromagnetismo in relatività generale. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 14, 171—193 (1960).

Le-Thanh-Phong: Sur le comportement asymptotique d'une classe de métriques de type II. C. r. Acad. Sci., Paris 251, 210—212 (1960).

Debever, Robert: Espace-temps du type III de Petrov. C. r. Acad. Sci., Paris 251, 1352—1353 (1960).

Verf. gibt (in impliziter Form) Lösungen der Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen an, bei denen $F_{\mu\nu}$ ein Nullfeld und der Weylsche konforme Krümmungstensor vom Petrowschen Typ III ist. Für den Fall, daß die Einsteinschen Vakuumgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ gelten und ferner ein kovariant konstantes Vektorfeld existiert, geht die gefundene Metrik in einen Raum vom Petrowschen Typ II, 0 über. *H. Tredér.*

Dobbertin, Rolf: Sur la quantification du tenseur énergie-impulsion en milieu diélectrique. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 4298—4300 (1960).

Verf. quantisiert die Maxwellschen Gleichungen für ein phänomenologisches Dielektrikum. An Stelle der für das Vakuumfeld gebräuchlichen Lorentz-Konvention tritt hierbei die Bedingung $\chi^{(-)}\psi = 0$ mit $\chi \equiv \mu^{-1}(A^\tau{}_\tau - (\varepsilon\mu - 1)q^\alpha q^\beta A_{\alpha,\beta})$, wo q^α der Operator der Geschwindigkeit des Dielektrikums ist. *H. Tredér.*

Rayski, Jerzy: Interpretation of electrodynamics and baryon theory within a six-dimensional manifold. Nuclear Phys. 17, 289—316 (1960).

Als Ausgangspunkt ist ein sechsdimensionaler Raum mit Signatur +++--- vorgeschlagen. Die „Verteilung der Urmaterie“ ruft in diesem Raum eine singuläre Geometrie hervor. Die singuläre Hyperfläche besitzt vier innere Dimensionen und ist mit der vierdimensionalen Welt von Minkowski oder Riemann zu identifizieren. Die Transformationen dieses vierdimensionalen Unterraumes in sich sind die gewöhnlichen Lorentzschen oder Minkowskischen Koordinatentransformationen, nämlich für x_1, x_2, x_3, x_4 . Die Drehungen in der isotrop angenommenen Ebene x_5, x_6 sind die Eichtransformationen. Es ist keine Homogenität in der Richtung x_5 oder x_6 , und keine Isotropie in der Ebene $x_1 - x_5$ usw., infolgedessen hat der Impuls nur 4, der Drehimpuls nur 6 Komponenten. (Es gibt eigentlich auch eine siebente Drehimpulskomponente mit Indizes 5—6, sie ist die Ladung.) Die Komponenten des Krümmungstensors mit Indizes 1—4 beschreiben die Gravitation, die Komponenten mit

Indizes 5–6 beschreiben die elektromagnetische Feldstärke. Es sind auch achtkomponentige Spinoren in dem sechsdimensionalen Raum eingeführt, die die Baryonen beschreiben. Die isotopen Symmetrien werden auch quasi-geometrisch interpretiert. — Der quantitative Zusammenhang von Materie und Geometrie, die Stabilität der singulären Geometrie in dem postulierten sechsdimensionalen Raum sind nicht diskutiert. Es ist auch nicht das Problem gelöst, ob sich die Materie in die x_5 -Richtung bewegen kann und was das bedeuten würde.

G. Marx.

Rayski, J.: A Six-dimensional interpretation of nuclear forces. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 251–254 (1959).

Unter Verwendung der 8-komponentigen antikommutierenden Matrizen

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} = \gamma_5 \times \tau_1, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} -i\gamma_5 \\ i\gamma_5 \end{pmatrix} = \gamma_5 \times \tau_2, \\ \Gamma_7 = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ -\gamma_5 \end{pmatrix} = \gamma_5 \times \tau_3 = -i\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_6, \quad \Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \\ (k = 1, \dots, 4; \mu, \nu = 1, \dots, 7)$$

läßt sich die Diracgleichung für ein Nukleon in Wechselwirkung mit einem π -Mesonenfeld φ_μ schreiben:

$$\left(M + \sum_{k=1}^4 \Gamma_k \partial_k + i g \sum_{\mu=5}^7 \Gamma_\mu \varphi_\mu \right) \psi = 0.$$

Da 8-komponentige Matrizen einem 6-dimensionalen Raum zugeordnet sind (wie 4-komponentige einem 4-dimensionalen), legt obige Gleichung nahe, den Minkowski-Raum als 1-2-3-4-Unterraum in einen sechsdimensionalen Raum einzubetten. Dann lassen sich Eichtransformation und Ladungskonjugation als Drehung und Spiegelung in 5-6-Unterraum deuten. Der Wechselwirkungsterm zeigt, daß die Existenz der „zusätzlichen“ Matrix Γ_7 einen dreidimensionalen Isoraum, bestehend aus dem 5-5-Unterraum und einer scheinbaren 7-Achse, vortäuscht, wodurch sich von selbst die Auszeichnung einer der drei Achsen des Isoraums ergibt. Weiter ist eine pseudoskalare Pion-Nukleon-Wechselwirkung einfacher als jede andere, da Γ_5 , Γ_6 und Γ_7 das γ_5 enthalten.

K. S. Wohlrab.

Rayski, Jerzy: A six-dimensional riemannian manifold, its applications in meso-electrodynamics, and a systematization of strongly interacting particles. Acta phys. Polon. **18**, 371–385 (1959).

In einer früheren Arbeit des Verf. (s. vorstehendes Referat) war eine 6-dimensionale Behandlung des Nukleons und seiner Wechselwirkung mit dem Mesonenfeld gegeben worden. Dies wird hier weiterentwickelt, indem ein sechsdimensionaler Raum mit einer Signatur $++----$ verwendet wird. In diesem Raum lassen sich elektrische Ladung, Ladungskonjugation und Eichtransformation geometrisch deuten. Ein elektromagnetisches Feld ist gleichbedeutend mit einer Krümmung des Raums. Barionenzahl und Strangeness nebst den üblichen starken Wechselwirkungen lassen sich einbauen.

K. S. Wohlrab.

Quantentheorie:

Brändus, I.: Les relations d'unitarité entre les paramètres de la matrice de diffusion pour les collisions élastiques entre des particules à spins arbitraires. Acta Republ. popul. Romîne, Inst. Fiz. atom. Inst. Fiz., Studii Cerc. Fiz. **11**, 149–160 (1960) [russ. und französ. Zusammenfassung 160 (1960) [Rumänisch].

En partant de la relation d'unitarité [Ryndin, Smorodinskij, Soviet Phys., JETP **1294** (1957) trad. de Žurn. eksper. teor. Fiz. **32**, 1584 (1957)] de la matrice de diffusion pour collisions élastiques entre des particules à spin arbitraires, on a calculé les relations entre les paramètres (Puzikov, ce Zbl. **82**, 419) de la matrice.

Französische Zusammenfassung

Gillet, Vincent: Théorie des corrélations multiples perturbées. *Nuclear Phys.* **0**, 561—584 (1960).

Techniques using irreducible tensorial sets for the calculation of multiple correlated processes are extended to the case when the degeneracies of one or several component states are removed. The irreducible representation of an operator acting on a state perturbed through an interaction with a classical or quantal system is first given in a quite general form. The irreducible product of two operators is then easily generalized when one of the operators is acting on a space of non-degenerate states, the states of the tensor product space being non-degenerate also. This permits the construction of the most general density matrices for perturbed nuclear states prepared from perturbed states initially oriented through the absorption or the emission of a radiation of known polarization.

Zusammenfassung des Autors.

Koba, Ziro: Hypothetical velocity measurements of a Dirac particle. *Suppl. Progress theor. Phys.* Nr. 8, 1—20 (1959).

The author shows that, contrary to a statement due to Aharonov and Bohm (this Zbl. 78, 196), it is possible to distinguish the behavior of a wave packet of a Dirac particle from that of an Aharonov-Bohm particle by a hypothetical experiment of three successive position measurements. At first the investigation is carried out for a massless particle and in only one dimension; then, in later sections, the effect of a finite mass is analyzed in three dimensions. Finally, the possibility of constructing an arbitrarily small wave packet for a Dirac particle with positive energy states only and extending the analysis to bosons are discussed. The two appendices are devoted to the explicit evaluation of the wave functions needed for the main part of the paper.

F. Kortel.

Winogradzki, Judith: Sur le calcul des huit spineurs du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport aux transformations du groupe de Lorentz général. *C. r. Acad. Sci., Paris* **251**, 1983—1985 (1960).

On expose une méthode qui permet de déterminer les spineurs du second rang à composantes invariantes sans résoudre explicitement les équations d'invariance.

Zusammenfassung des Autors.

Le Conteur, K. L.: Integral representation of a double commutator. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **16**, 227—229 (1960).

Dyson's integral representation for the vacuum expectation value of a double commutator is put into a form consistent with the Jacobi identity.

Zusammenfassung des Autors.

Ferrari, E. and G. Jona-Lasinio: Remarks on the appearance of ghost states in relativistic field theories. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **16**, 867—885 (1960).

A subtraction procedure to eliminate ghosts from propagators recently proposed by Redmond (this Zbl. 85, 435) is examined from the standpoint of axiomatic field theory. This procedure is found to be equivalent to the introduction of a special vertex function which in principle can be chosen among functions having the analyticity properties prescribed by the axioms. This situation is shown to exist both in the case of boson and fermion fields. In the above discussion Lehmann integral representation of propagators is taken as an axiom by itself. The modifications brought into the discussion of ghost problems by a subtracted Lehmann dispersion formula are then examined. Of some interest are the consequences on the high frequency behaviour of form factors.

Zusammenfassung des Autors.

Nagy, K. L.: Dipole ghost contributions to propagators. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **15**, 993—995 (1960).

Ma, S. T.: Causality in quantum field theory. *Nuclear Phys.* **11**, 696—699 (1959).

Ergänzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 81, 226), in welcher die störungstheoretische Entwicklung der S-Matrix in eine Form umgeschrieben wurde, aus der sich der kausale Charakter der Fortpflanzung der virtuellen Bosonen direkt ergibt. Hier wird nun die kausale Fortpflanzung der virtuellen Fermionen nachgewiesen.

G. Wanders.

Arnous, E., W. Heitler and Y. Takahashi: On a convergent non-local field theory. *I. Nuovo Cimento, X. Ser.* **16**, 671—682 (1960).

Bei den bisher vorgeschlagenen nichtlokalen Lorentz-kovarianten Feldtheorien glückte es nicht, die Divergenzen vollständig zu eliminieren: in höheren Näherungen

tauchten sie immer wieder auf. Das Programm der Verff. ist, eine konvergente nichtlokale Theorie auszubauen, die in kleinsten Entfernungen irgendeine Abweichung von der strengen Lorentz-Kovarianz erlaubt. (Das kann z. B. die Folge haben, daß ein Bruchteil der Elektronenmasse sich nicht vollkommen relativistisch transformiert). Der Ausgangspunkt ist die Bemerkung, daß die Invarianz der Zustandsgleichung in Wechselwirkungsdarstellung formell bei jedem Hamilton-Operator zu erreichen ist, zieht aber nicht unbedingt die Invarianz der S -Matrix nach sich. In der ersten Veröffentlichung ist dieses Theorem bewiesen. — Die physikalische Interpretation einer Verletzung der Lorentz-Invarianz ist gar nicht diskutiert. Die Frage, ob die Verff. an ein ausgezeichnetes „absolut ruhendes“ Koordinatensystem denken, blieb unbeantwortet. *G. Marx.*

Łopuszański, Jan: On the modification of the Feynman's „integral-over-all-paths“ method. *Acta phys. Polon.* **17**, 117—136 (1958).

Pócsik, G.: Meson-fermion PV -interaction in the Thirring model. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **11**, 177—183 (1960).

Das Thirring-Modell (selbstgekoppeles Fermionfeld in einer zweidimensionalen pseudo-euklidischen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit) ist bekanntlich ein Beispiel für exakt lösbare Quantenfelder. Verff. erweitert dieses Modell mit einem pseudoskalaren Mesonenfeld, das mit dem Spinorfeld durch axialvektorielle Kopplung gekoppelt ist. Das Modell bleibt lösbar. Ist das Mesonenfeld unquantisiert, kann die Wechselwirkung aus der Feldgleichung wegtransformiert werden, und man kommt zur ursprünglichen Thirring-Gleichung zurück. Im Falle eines gequantelten Mesonenfeldes geht das nicht mehr. Man kann die exakte Lösung auch jetzt geben, es tritt aber die bekannte Divergenz der axialvektoriellen Kopplung auf. — Diese Arbeit ist der erste Teil einer Publikationsreihe über das erweiterte Thirringmodell. *G. Marx.*

Bialynicki-Birula, I.: Finite value of the wave function renormalization constant in quantum electrodynamics. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **17**, 122—123 (1960).

In a recent paper by Johnson and Zumino (this Zbl. **88**, 223) the question has been raised whether there exists a special gauge which gives finite value of the electron wave function renormalization constant. The aim of this note is to prove that there exists a class of gauges which give a finite value for this constant in every order of perturbation theory.

Aus der Einleitung.

Białkowski, Grzegorz and Andrzej Jurewicz: Non-adiabatic treatment of the scattering of K^+ mesons by nucleons. *Nuclear Phys.* **17**, 359—376 (1960).

Die Streuung von positiven K -Mesonen an Nukleonen wird mit Hilfe der Tamm-Dancoff-Methode theoretisch behandelt. Es wurde pseudoskalare ANK und ΣNK Kopplung angenommen. Für niedrigere Energien wurde eine recht gute Übereinstimmung mit der Erfahrung erhalten, wenn man die ANK , ΣNK Kopplungskonstanten so groß wählt, wie ungefähr die $NN\pi$ Kopplungskonstante. (Die ANK -Kopplung scheint stärker zu sein als die ΣNK -Kopplung.) Bei höheren Energien treten Diskrepanzen auf. — Die Tamm-Dancoff-Methode gibt ganz sicher zuverlässigere Resultate, als die Störungstheorie. Auch der abstoßende Charakter der fraglichen Wechselwirkung spricht dafür. Eine vollkommene Übereinstimmung mit der Erfahrung ist aber dennoch nicht zu erwarten, weil die meisten feldtheoretischen Untersuchungen für die hohe Teilnahme der Viel-Mesonen-Zustände sprechen. *G. Marx.*

Amati, D., E. Leader and B. Vitale: Theory of low energy nucleon-nucleon scattering. I. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **17**, 68—97 (1960).

Die Nukleon-Nukleon-Streuung ist mit Hilfe der Cini-Fubini-Version der Doppelt-Dispersions-Relationen im Energiebereich unter inelastischen Prozessen behandelt. Die Konstruktion der Integralgleichungen für Partialwellenamplituden wird diskutiert. *G. Marx.*

Baker, M. and F. Zachariasen: Pion-pion scattering in the ϕ^4 theory. *Phys. Review, II. Ser.* **118**, 1659—1664 (1960).

Die Pion-Pion-Streuung ist eine fundamentale Frage der Feldtheorie, man hat aber recht wenig experimentelles Material darüber. Man weiß, daß ein $\lambda \varphi'$ Wechselwirkungsglied auch in der Theorie der pseudoskalaren Pion-Nukleon-Kopplung aus Renormalisationsgründen unbedingt nötig ist. Die physikalischen Konsequenzen einer solchen direkten Pion-Pion-Wechselwirkung sind aber bisher nicht aufgeklärt. Die Verff. behandeln die Pion-Pion-Streuamplituden auf Grund der $\lambda(\varphi_i \varphi_i)^2$ Wechselwirkung mit der Technik der Dispersionsrelationen. Numerische Resultate für S - und P -Amplitude sind in gewisser Näherung gegeben. *G. Marx.*

Gourdin, M. and A. Martin: Photoproduction of pions on pions. Nuovo Cimento, X. Ser. 16, 78—95 (1960).

Die Reaktion $\gamma + \pi \rightarrow \pi + \pi$ wird mit der Cini-Fubini-Version der Doppelt-Dispersions-Relationen behandelt. Die starken Symmetrien ermöglichen die Vereinfachung der Diskussion. Das Problem wird auf die Lösung einer Fredholm'schen Integralgleichung reduziert. In der Integralgleichung tritt aber eine willkürliche multiplikative Konstante in dem inhomogenen Glied auf, die nur durch die Extrapolation der experimentellen Wirkungsquerschnitte zu bestimmen ist. Approximative Lösungen von resonantem Charakter sind gegeben. Die Methode soll auf die Compton-Streuung an Pionen und Nukleonen und auf Photoerzeugung von Pionen an Nukleonen angewandt werden. *G. Marx.*

Chew, Geoffrey F., Robert Karplus, Stephen Gasiorowicz and Fredrik Zachariasen: Electromagnetic structure of the nucleon in localfield theory. Phys. Review, II. Ser. 110, 265—276 (1958).

In Analogie zu der Dispersionsrelationen-Methode für Streuung wird die Beschreibung der elektromagnetischen Struktur des Nukleons durch Massen-Spektral-darstellungen für die Formfaktoren diskutiert. Die Existenz solcher Darstellungen wird plausibel gemacht, wenn auch nicht bewiesen, und es wird gezeigt, daß die spektralen Verteilungsfunktionen in Beziehung stehen zu den Streuamplituden auf der Massenschale, jedoch manchmal in einem unphysikalischen Bereich. Es wird vermutet, daß der Hauptbeitrag zu der magnetischen Moment-Struktur in der Spektralverteilung vom Zwei-Pion-Zustande geleistet wird, und es wird ein Versuch gemacht, diesen Beitrag über das bekannte Verhalten der Pion-Nukleon-Streuung auszuwerten. Eine halbquantitative Berechnung liefert Resultate in vernünftiger Übereinstimmung mit dem Experiment. — Es wird betont, daß der große beobachtete Ladungsradius des Protons nicht das Vorwiegen des Zwei-Pion-Zustandes in der Ladungsstruktur nach sich zieht. So ist es nicht unmöglich, daß höhere Massenkongfigurationen die isotope skalare Ladung liefern, die benötigt wird, um die kleine Neutron-Elektron-Wechselwirkung zu erklären. (Zusammenfassung des Autors.)

W. Wessel.

Federbush, P., M. L. Goldberger and S. B. Treiman: Electromagnetic structure of the nucleon. Phys. Review, II. Ser. 112, 642—665 (1958).

Die elektromagnetische Struktur des Nukleons wird mit Dispersionsrelations-Techniken untersucht. Beiträge des Zwei-Pionen-Zwischenzustandes zu den magnetischen Momenten und mittleren Radienquadraten werden ausgiebig studiert. Es wird gezeigt, daß die elektromagnetische Struktur des Mesons selbst hier eine wichtige Rolle spielen kann; diese Struktur wird auch diskutiert. Der Zwei-Pionen-Zustand scheint vernünftig Rechenschaft zu geben von dem Isotopie-Vektoranteil des magnetischen Moments und des Quadratmittels des Magnetisierungsradius', aber der Ladungsdichte-Radius scheint viel kleiner zu sein als der gegenwärtig angenommene experimentelle Wert. Betreffend die Isotopie-Skalar-Eigenschaften des Nukleons wurden die Beiträge der Zwischenzustände mit zwei K -Mesonen und Nukleon-Antinukleon-Paaren (allgemeiner Baryonen-Paaren) studiert. Mit Hilfe einer Schlußweise, die auf der Unitarität der S -Matrix-beruht, wird gezeigt, daß die Paar-Beiträge klein sein müssen. Gewisse allgemeine Eigenschaften des Drei-Pionen-Zu-

standes, von denen anzunehmen ist, daß sie den Hauptbeitrag zu den Isotopie-Skalar-Größen liefern, werden diskutiert; es ist aber nicht möglich, quantitative Aussagen zu machen. (Zusammenfassung der Autoren.) *W. Wessel.*

Boseo, B. and V. de Alfaro: Three-pion contribution to the electromagnetic structure of the nucleon. Phys. Review, II. Ser. 115, 215—219 (1959).

Es wird der Beitrag von Drei-Pionen-Zuständen zu den skalaren elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons berechnet unter Benutzung der Mesonentheorie mit fester Quelle ohne Wiederstreukorrekturen. Die $(\gamma, 3\pi)$ -Wechselwirkung wird phänomenologisch als Punktwechselwirkung behandelt. Es wird gezeigt, daß für Werte der $(\gamma, 3\pi)$ -Kopplungskonstanten, die mit Photoerzeugungsexperimenten vereinbar sind, die experimentelle Ladungsverteilung mit einem cutoff im Dispersionsintegral von der Ordnung von 7 Pionenmassen roh angepaßt werden könnte. (Zusammenfassung des Autors.) *W. Wessel.*

Thirring, W.: Symmetry properties of elementary particles. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 415—428 (1959).

Dieser Vortrag (gehalten an einer Sommerschule) gibt eine elegante, knappe, aber tiefgehende Zusammenfassung aller Grundideen der Quantenfeldtheorie, beschränkt auf Teilchen mit Spin 0 und $\frac{1}{2}$. Es wird gezeigt, daß durch plausible Forderungen die Durchführung der Quantisation (und damit der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik) eindeutig vorgeschrieben ist. Auch die nichtgeometrischen (sog. „inneren“) Symmetrieeigenschaften sind kurz behandelt, und es wird das Problem formuliert: Was ist die Minimalzahl der unabhängigen Felder, mit denen eine gegebene zusammengesetzte Symmetriegruppe darstellbar ist? *G. Marx.*

Ezawa, Hiroshi and Hiroomi Umezawa: Green's functions for elementary particles. Phys. Review, II. Ser. 116, 463—464 (1959).

Les AA. examinent les objections élevées par J. D. Harris (ce Zbl. 86, 224) relativement à la forme indiquée par H. Umezawa (Quantum Field Theory, ce Zbl. 71, 229) pour la fonction de Green des particules de spin quelconque. Une omission dans le calcul de Harris est à l'origine de son résultat inexact. *G. Petiau.*

Rayski, Jerzy: On a screw model of particles in iso-space. Acta phys. Polon. 16, 279—291 (1957).

Verf. definiert statt der üblichen Strangeness s ein äquivalentes „Attribut“ a : $q = -t_3 + b - a$ (q = Ladung, $t_3 = 3$. Komponente des Isospins, b = Barionenzahl). a wird als 3. Komponente eines „Drehimpulses im Isoraum“ aufgefaßt, der sich mit dem Isospin zu einem „Gesamtisodrehimpuls“ zusammensetzt. Dadurch wird unter anderem erreicht, 1. daß außer dem nur genähert gültigen Erhaltungssatz des Isospins ein exakter Erhaltungssatz der 3. Komponente des Gesamtisodrehimpulses gilt (= Erhaltung von $q - b$); 2. läßt sich das empirische Massenverhältnis der Barionen dazu in verblüffend einfache Beziehung setzen. Es ergibt sich so eine Art Quasi-„Atommodell“ eines Teilchens im Isoraum mit einem isospintragenden Zentrum, einem umlaufenden Punkt mit Isobahndrehimpuls usw. Am Ende der Arbeit wird gezeigt, wie sich dieses Modell aus einer verallgemeinerten Klein-Gordon- bzw. Dirac-Gleichung ergibt, in der die Masse durch einen Massenoperator ersetzt ist, der u. a. Differentialoperatoren im Isoraum enthält. *K. S. Wohlrab.*

Kanazawa, Akira: Foldy transformation in the pion-hyperon system. Phys. Review, II. Ser. 118, 1664—1666 (1960).

Bekanntlich hat Foldy aus dem Hamilton-Operator der Nukleon-Pion-Wechselwirkung die Glieder herausttransformiert, die die „großen“ und „kleinen“ Komponenten des Nukleon-Feldoperators gemischt beinhalten. Verf. hat die ähnliche Transformation für Pion-Hyperon-Wechselwirkung (mit pseudoskalarer Kopplung) angegeben. Die praktischen Anwendungen sind nicht berührt. *G. Marx.*

Wessel, Walter: Zur Theorie des Elektrons. V. Z. Naturforsch. 14a, 1005—1014 (1959).

Complétant les résultats d'une série de publications antérieures (ce Zbl. 47, 214, 65, 443) l'A. étudie une généralisation de la théorie de l'électron introduisant un opérateur de masse conduisant à des équations non linéaires du type introduit par Heisenberg. La structure et les propriétés de cet opérateur sont discutées. G. Petiau.

Physik vieler Teilchen:

● Ehrenfest, Paul and Tatiana Ehrenfest: The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics. Transl. by Michael J. Moravcsik. Ithaca, New York: Cornell University Press 1959. XVI, 114 p.

This book is a faithful English translation (with a Foreword by M. Kac and G. E. Uhlenbeck and a Preface by Tatiana Ehrenfest) of a well-known article by the late Paul Ehrenfest and his wife Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, which was originally published in 1912 in the German "Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften". This work is undoubtedly one of the most brilliant and fundamental which have ever been written on the subject and, as rightly stated by Kac and Uhlenbeck, „in spite of the passage of time it has lost little of its scientific and didactic value“. The few statements that the further development of physics (in particular the rising of quantum mechanics) has proved erroneous—as for instance the calling in question of the adequacy of the ergodic approach, which was suggested by the limited validity of the energy equipartition theorem—can be easily isolated from the context with no harm to the clearness of the main line of thought. The method of exposition is essentially the historical one, leaving aside however any superfluous detail. After a discussion of the kinetic theory of matter, and especially of the Boltzmann H-theorem, the authors investigate the Gibbs and Boltzmann approaches to general statistical mechanics, comparing them step by step. The decisive superiority of the Boltzmann realistic standpoint with respect to the "platonic" attitude of Gibbs emerges from this comparison in an evident way. In conclusion, I consider very commendable the Cornell University Press' decision of publishing the present translation, by means of which such an important work is made more accessible to the English speaking world (which has been perhaps too exclusively influenced by the Gibbsian tradition).

A. Loinger.

Zubarev, D. N. und Ju. A. Cerkovnikov: Zur Theorie des Phasenübergangs in Fermi-Systemen. Naučn. Doklady vyss. Skoly, fiz.-mat. Nauki 1959, Nr. 2, 133—140 (1960) [Russisch].

Bernard, William and Herbert B. Callen: Irreversible thermodynamics of non-linear processes and noise in driven systems. Reviews modern Phys. 31, 1017—1044 (1959).

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein quantenmechanisches System mit einer gestörten Hamilton-Funktion $H = H_0 + \sum F_i(t) Q_i$, mit Hermiteschen Operatoren $Q_i(q, p)$, die extensiven thermodynamischen Parametern zugeordnet sein sollen, während die Funktionen $F_i(t)$ konjugierte intensive Parameter darstellen. Untersucht wird die zeitliche Entwicklung einer für $t < 0$ kanonischen Gesamtheit unter dem Einfluß der bei $t = 0$ oder später einsetzenden Störungen [$F_i(t) = 0$ für $t < 0$], und es werden Mittelwerte der Q_i und aus ihnen aufgebauter weiterer Größen über die Dichtematrix der gestörten Gesamtheit berechnet. Zunächst werden die Ergebnisse einer Störungstheorie erster Ordnung für die Dichtematrix zusammengestellt. Sie werden erweitert auf die zweite Ordnung der Störungstheorie, wobei insbesondere auf Fragen des Rauschens eingegangen wird; so wird als Beispiel das thermische Dissoziations- und Rekombinationsrauschen in Halbleitern im stationären Zustand behandelt. Ferner wird das Schwankungs-Dissipations-Theorem in zweiter

Ordnung entwickelt. Schließlich werden die Wahrscheinlichkeiten $W_1(q'_i, t)$ und $W_2(q_i, t; q'_i, t')$ berechnet und diskutiert; dabei bedeutet z. B. $W_1(q_i, t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein System zur Zeit t die Werte q_i aufweist, wobei die q_i die Werte der makroskopischen Variablen bedeuten, die den Operatoren Q_i entsprechen.

J. Meixner.

Lang, I. G.: Application of density matrix method for conductivity electrons interacting with lattice oscillations. Fiz. tverd. Tela **2**, 2330—2340 (1960) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß aus der Bewegungsgleichung für die Dichtematrix eines Systems von wechselwirkenden Leitungselektronen und Phononen im elektrischen Feld in erster Näherung das gewöhnliche System der Transportgleichungen für die Verteilungsfunktionen der Elektronen und Phononen folgt. Dasselbe gilt auch für andere Streuprozesse, wie Streuung von Elektronen an Störstellen sowie Phonon-Phonon-Streuung.

J. Mertsching.

Hajdu, János: Zur Theorie der magnetischen Widerstandsänderung. I. Z. Phys. **160**, 47—58 (1960).

In dieser ersten von drei Arbeiten wird der Einfluß eines Magnetfeldes auf die elektrische Leitfähigkeit von Metallen mit Hilfe einer Boltzmann-Gleichung untersucht. Es wird also die Existenz einer Verteilungsfunktion angenommen. „Quanteneffekte“ finden also keine Berücksichtigung. Voraussetzung für das Auftreten einer magnetischen Widerstandsänderung ist dann, wenn man den Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung durch Einführung einer Stoßzeit τ vereinfacht, eine Anisotropie von $\tau(k)$ oder ein starkes Abweichen der Flächen konstanter Energie von Flächen zweiter Ordnung. Zunächst wird die Boltzmann-Gleichung mit einer Stoßzeit τ untersucht. Zur besseren Abschätzung der Widerstandsänderung wird analog einer Arbeit von Ziman (dies. Zbl. **73**, 457) ein Variationsverfahren verwendet. Für quadratisches $E(k)$ verschwindet dann die magnetische Widerstandsänderung identisch. Schließlich werden mit Hilfe von mittleren Übergangswahrscheinlichkeiten Stoßzeiten definiert und in einigen typischen Fällen (z. B. Davissches Modell) die magnetische Widerstandsänderung berechnet. Die Ergebnisse stimmen mit den Experimenten überein.

H. W. Streitwolf.

● **Delcroix, J. L.:** Introduction to the theory of ionized gases. Translated from the French by Melville Clark jr., David J. BenDaniel and Judith M. BenDaniel. (Interscience Tracts on Physics and Astronomy. No. 8.) New York and London: Interscience Publishers 1960. XI, 149 p. Cloth \$ 4,50; paper \$ 2,50.

Vgl. die Besprechung des französischen Originals in diesem Zbl. **84**, 233.

Pacholezyk, A. G. and J. S. Stodólkiewicz: The magnetogravitational instability of the medium of finite electrical conductivity. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 681—685 (1959).

In this paper the problem of the effect of finite isotropic electrical conductivity on the magnetogravitational instability of rotating medium is discussed. In addition to the same assumptions as in the first paper, the authors assumed a nonviscous medium and isotropic electrical conductivity. In the case of angular velocity of rotation perpendicular to the YZ plane, starting from the basic equations, the system of equations for amplitudes is derived. The system of the equations has non-trivial solutions, provided that the dispersion equation is satisfied. In conclusion it is stated that the Jeans instability criterion for the rotating medium with finite electrical conductivity remains unaffected by the magnetic field, independently from parallel component of the magnetic field.

S. Ueno.

Veklenko, B. A.: Greens' function for the resonance radiation diffusion equation. Soviet Phys., JETP **36** (9), 138—142 (1959). Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. **36**, 204—211 (1959).

In this paper, by retaining Biberman's assumptions and by considering the photon diffusion in an infinite homogeneous medium, an analytic expression for the

probability of the excited atom in terms of the point and the time is derived, provided that at the initial instant of time only one excited atom is located at the origin of the coordinates. The transient transport equation governing the Green function is written in terms of the point transport kernel. Operating the Ambarzumian transform on the equation, a one-dimensional integro-differential equation is obtained. Furthermore, with the aid of the Fourier transformation, the source function is given. Then, the usage of the inverse Fourier and Ambarzumian transforms provides a complete solution of the problem for an arbitrary form of the spectral line. First, an asymptotic expression of the Green function for the dispersion spectral line is calculated and is discussed. In the next place the asymptotic expression of the Green function for a Doppler spectral line is derived. For large optical distance the photon distribution functions for both the above cases diminish slowly at infinity. While the principal numerical characters of photon diffusion are the mathematical expectation value and the dispersion, they can not be used, because of the even distribution and of the divergence of the integral. Then, assuming no extinction, the average time required for the photon to shift a distance greater than some prescribed value is computed in both the above cases. The comparison of Holstein's formulae with them shows a similarity. In conclusion, the stationary Green function is given and the asymptotic expression for the dispersion spectral line is derived under the assumption of no extinction. S. Ueno.

Bellman, Richard and Robert Kalaba: Functional equations, wave propagation and invariant imbedding. *J. Math. Mech.* 8, 683—704 (1959).

Recently, extending the principle of invariance due to Ambarzumian in the theory of radiative transfer, Bellman and Kalaba stated the principle of invariant imbedding. In the present paper, applying the invariant imbedding technique to the propagation of plane waves, normally incident, through an inhomogeneous flat layer, the systematic application of the functional equation technique concerning the above wave process is treated, by referring to the wave localization principle. Simultaneously, in the field of mathematical physics the authors try to furnish tools which are appropriate to the numerical analysis based on the use of modern electronic computers. It is also stated that invariance principles and functional equations are the appropriate tools. In the application of functional equation technique, the transformation procedure of complex physical processes into the iteration of simple ones is also correlated with the theory of semi-groups due to Hille. In order to describe wave motions in a manner similar to that used in the particle processes, the authors introduced the wave localization principle which will permit the performance of the metamorphosis for wave processes stated above. First, in constructing the mathematical models of reflection and transmission, the plane wave motions are considered in a stratified medium and two semi-infinite homogeneous media, respectively. In order to obtain an approximate solution of the wave equation, the Bremmer series in which the effects of successive reflections are added is used by considering the convergence. With the usage of the Bremmer series, the principle of localization is established provided that the wave number fulfils the stated conditions. After demonstrating an interesting application of the Bremmer series based on the principle of invariant imbedding and that of localization, the authors obtained the differential equations determining the reflected and transmitted waves through the finite one-dimensional slab of arbitrary stratification. As applications of the above procedure, the non-uniform transmission line, the linear differential equations of the N th order, and the matrix equation are considered. S. Ueno.

Amado, R. D. and K. A. Brueckner: Moment of inertia of interacting manybody fermion systems. *Phys. Review, II. Ser.* 115, 778—785 (1959).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß das Trägheitsmoment eines Systems von Fermionen, das sich so bewegt, daß die periodischen Randbedingungen erhalten

bleiben, den klassischen Wert, d. h. den des starren Körpers hat. In Analogie zum „cranking“-Modell wird das „pushing“-Modell behandelt, und es zeigt sich, daß als „Masse“ in entsprechender Weise wie bei einer starren Translation die Gesamtmasse in Rechnung zu stellen ist, „obwohl nur an der Oberfläche Teilchen strömen“. Die störungstheoretischen Formeln für die 1. Näherung in der Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung werden ausgewertet, und es zeigt sich, daß das Ergebnis unverändert bleibt. Mit einer Diskussion schließt die Arbeit.

H. Wüthrich.

Bardeen, J., L. N. Cooper and J. R. Schrieffer: Theory of superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 108, 1175—1204 (1957).

Bogoljubov, N. N.: On a new method in the theory of superconductivity. Nuovo Cimento, X. Ser. 7, 794—805 (1958).

Gor'kov, L. P.: On the energy spectrum of superconductors. Soviet Phys., JETP 7, 505—508 (1958), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. 34, 735—739 (1958).

Kuper, C. G.: The theory of superconductivity. Advances Phys., Quart. Suppl., philos. Mag. 8, 1—44 (1959).

Chalatnikov (Kh:la'tnikov), I. M. and A. A. Abrikosov: The modern theory of superconductivity. Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 8, 45—86 (1959).

Bardeen, J., G. Rickayzen and L. Tewordt: Theory of the thermal conductivity of superconductors. Phys. Review, II. Ser. 113, 982—994 (1959).

● Bogoljubov (Bogoliubov), N. N., V. V. Tolmačev (Tolmachev) and D. V. Širkov (Shirkov): A new method in the theory of superconductivity. Transl. from. Russian. New York: Consultants Bureau, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd, 1959, III, 121 p. \$ 5,75.

Die mikroskopische Theorie der Supraleitung der Metalle ist in letzter Zeit in einer bemerkenswerten Weise entwickelt worden. Der Anstoß zu zahlreichen Veröffentlichungen auf diesem Gebiet erfolgte durch die grundlegende zuerst genannte Arbeit von Bardeen, Cooper und Schrieffer im Jahre 1957. Zusammenfassende Darstellungen sind die Arbeiten von Kuper, Chalatinikov und Abrikosov, sowie Bogoljubov, Tolmačev und Širkov von 1959. Die neue Theorie beruht auf der durch Experimente gestützten Hypothese, daß die Wechselwirkung zwischen Metallelektronen und Gitterschwingungen die wesentliche Rolle beim Supraleitungsmechanismus spielt. Ein geeignetes Modell für diese Wechselwirkung liefert der Hamiltonoperator H_F von Fröhlich. Er enthält Anteile, die eine anziehende Kraft (über die Gitterschwingungen) zwischen den Elektronen vermitteln. Daneben ist die Coulombabstoßung H_C zwischen den Leitungselektronen zu berücksichtigen. Nach der ersten der besprochenen Arbeiten hat aber H_C die Tendenz, die Supraleitung zu verhindern. Daher sollte eine detaillierte Analyse der Gesamthamiltonfunktion $H = H_F + H_C$ entscheiden können, ob ein Metall supraleitend wird oder nicht. — Die in der ersten Arbeit (Bardeen, Cooper, Schrieffer) entwickelte Theorie betrachtet von vornherein einen Supraleiter und benutzt einen noch weiter vereinfachten (reduzierten) Hamiltonoperator. Er beschreibt ein Fermigas, das nur in einer schmalen Umgebung der Fermioberfläche anziehend wechselwirkende Elektronenpaare entgegengesetzten Impulses und Spins enthält. Diese Paarkorrelation geht entscheidend in die Struktur der Wellenfunktionen ein. Das Ritzsche Variationsverfahren gibt eine Absenkung der Energie des Grundzustandes gegenüber dem des wechselwirkungsfreien Fermigases gleicher Teilchenzahl. Hierbei ist bemerkenswert, daß 1. die Energieabsenkung proportional zu $e^{-1/g}$ wird (die Kopplungskonstante g der Paarwechselwirkung ist von der Größenordnung 0.1—0.5) und 2. eine Energielücke zu überwinden ist, um in angeregte Zustände zu gelangen. Die zahlreichen thermischen und elektrischen Eigenschaften der Supraleiter lassen sich mit diesem Modell überraschend gut erklären. Auch ist es möglich, unter Berücksichtigung des veränderten Energiespektrums eine kinetische Theorie zu entwickeln

und damit die Wärmeleitfähigkeit der Supraleiter zu berechnen (wie in der Arbeit von Bardeen, Rickayzen und Tewordt ausgeführt wird). Neben der Variationsmethode wurde von Bogoljubov (vgl. die zweite und die letzte der besprochenen Arbeiten) die Methode der „Quasiteilchen“ auf das Vielteilchenproblem angewendet. Wird der Hilbertvektor des Grundzustandes in der Form $\Psi_0 = U \Phi_0$ geschrieben, wobei U ein unitärer Operator und Φ_0 der Vakuumvektor ist, so werden vermöge $\gamma_q = U c_q U^\dagger$ den alten Elektronenvernichtungsoperatoren c_q neue zugeordnet, deren Vakuum der Grundzustand des Systems ist (q charakterisiert die Quantenzahlen der Einteilchenzustände, z. B. Impuls und Spin). Die (vorerst natürlich unbekannte) Transformation U wird so bestimmt, daß gewisse Divergenzen der normalen Störungsrechnung vermieden werden. Bogoljubov behandelte mit dieser Methode den Fröhlich-Hamilton-Operator H_F ; in der letzten dieser sieben Arbeiten wird ferner gezeigt, daß sich durch „Renormalisierung“ der Elektronen- und Schallquantenenergie die Genauigkeit der Näherungsrechnung vergrößert. Ferner wird die Coulombwechselwirkung H_C sowie die Rolle der kollektiven Elektronenanregungen untersucht. Diese wirken sich mit ziemlicher Sicherheit nicht auf die thermischen Eigenschaften der Supraleiter aus. — Die Methode der Greenschen Funktionen (s. die Arbeit von Gor'kov) ist der Quantenfeldtheorie entlehnt. Sie ergibt in einer bestimmten Näherung, deren Güte zur Zeit untersucht wird, dieselben Ergebnisse wie die anderen Verfahren.

B. Mühlischlegel.

Bogoljubov (Bogoliubov), N. N.: A new method in the theory of superconductivity. I.

Tolmačev (Tolmachev) V. V. and S. V. Tjablikov (Tiablikov): A new method in the theory of superconductivity. II.

Bogoljubov (Bogoliubov), N. N.: A new method in the theorie of superconductivity. III. Soviet Phys., JETP 7, 41—46, 46—50, 51—55 (1958), Übersetzung von Žurn éksper. teor. Fiz. 34, 58—65, 66—72, 73—79 (1958).

Eine diese drei Arbeiten umfassende sowie mit Ergänzungen versehene Publikation stellt das vorstehend — zusammen mit anderen Arbeiten — besprochene Buch von Bogoljubov, Tolmačev und Širkov dar; vgl. auch dies. Zbl. 83, 454.

B. Mühlischlegel.

Blatt, John M.: Electron pairs in the theory of superconductivity. Progress theor. Phys. 23, 447—450 (1960).

The detailed mathematical correspondence between the Bogoliubov theory and the quasi-chemical equilibrium theory is established by means of identities. The Bogoliubov-BCS Ansatz is a special case of the quasi-chemical equilibrium Ansatz, corresponding to perfect Bose-Einstein condensation of the electron pairs.

Zusammenfassung des Autors.

Prange, Richard E.: The moment of inertia of large superfluid fermion systems. Nuclear Phys. 22, 283—500 (1961).

The moment of inertia of a superfluid system is calculated according to the Bardeen-Cooper-Schrieffer-Bogoliubov model.

Aus der Einleitung des Autors.

Parmenter, R. H.: High-current superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 116, 1390—1399 (1960).

The Bardeen, Cooper, and Schrieffer theory of superconductivity is extended to the case of high current densities by explicitly including in the phonon-induced electron-electron attraction the modification of the phonon spectrum in a moving coordinate system.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Parmenter, R. H.: Theory of superconducting contacts. Phys. Review, II. Ser. 118, 1173—1182 (1960).

The BCS theory of superconductivity is generalized to the case of a position-dependent energy gap (at the absolute zero of temperature and in the absence of magnetic fields). The BCS integral equation for the energy gap goes over into an integro-differential equation. The latter has non-trivial solutions (i. e., finite energy gap) even for the case of normal material ($V = 0$). Expressions are obtained for the energy gap, for the volume energy density, and for the surface energy density at an interface, for both normal and superconducting material. These results are applied to a number of problems involving superconducting contacts.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummern mit römischen Ziffern angegeben.

- Abascal, E. Vidal s. Vidal
Abascal, E. 310.
- Abbreviated proceedings of the Oxford mathematical conference for schoolteachers and industrialists 2.
- Abramov, G. D. (Stabilität und Schwingungen von Rahmen) 149.
- Abrikosov, A. A. s. I. M. Chalatnikov 454.
- Aczél, J., V. D. Belousov and M. Hosszú (Associativity and bisymmetry on quasigroups) 243.
- Adams, Ernst (Spannungserhöhung in Mittelscheiben axialer Turboläufer) 398.
- Adjan (Adian), S. I. (Algorithmic problems) 11.
- Adkins, J. E. s. A. E. Green 175.
- Adler, Georges (Problèmes aux limites de la conduction de la chaleur) 78.
- Aeschlimann, Florence (Extension de la théorie fonctionnelle des corpuscules) 191.
- Agmon, S., L. Nirenberg and M. H. Protter (Maximum principle for a class of hyperbolic equations) 74.
- Agostinelli, Cataldo (Figure ellissoidali rotonde di masse fluide) 424.
- Ahmavaara, Y. (Chirality invariance and the Lorentz group) 198.
- Ajanjan, É. M. (Elastoplastisches Gleichgewicht eines schüttigen Mediums) 160.
- Akutowicz, Edwin J. (Schwarz's lemma in the Hardy class H^1) 49; (Extrapolating a positive definite function) 96.
- Albrecht, Julius (Iteration für $y = \sqrt[n]{x}$) 340.
- Aleksandrina, N. I. (Stoß einer Last gegen einen Balken) 172.
- Aleksandrov, K. S. (Elastische Wellen in Kristallen) 232.
- Alexiewicz, A. and Z. Semadeni (Two-norm spaces) 325.
- Alfaro, V. de s. B. Bosco 450.
- Alter, George (Renaissance astronomers: D. Gans — J. Delmedigo) 6.
- Altman, M. (Functional equations in L^p spaces) 335.
- Altwerger, Samuel I. (Modern mathematics) 1.
- Amado, R. D. and K. A. Brueckner (Moment of inertia of interacting manybody fermion systems) 453.
- Amati, D., E. Leader and B. Vitale (Low energy nucleon-nucleon scattering. I.) 448.
- Ambarcumjan, S. A. (Nicht-lineare Theorie anisotroper Platten) 161.
- — — und M. A. Zadojan (Elastoplastische Verbiegung von Balken) 400.
- Amemiya, Ichiro and Israel Halperin (Modular lattices) 251.
- Amenzade, Ju. A. (Verbiegung eines durch Höhlung geschwächten Balkens) 149.
- Amir-Mócz, Ali R. s. Omar Ibn Abraham Al-Khayyami 15.
- Amitsur, S. A. (Finite dimensional central division algebras) 26.
- Ammeter, Hans (Problème de la ruine dans la couverture des excédents de sinistres) 117.
- Anderson, Alan Ross and Nuel D. Belnap jr. (Modalities in Ackermann's "rigorous implication") 9.
- R. D. (Algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms) 388.
- Andreoli, Giulio (Funzioni simmetriche) 23.
- Andrus, Jan F. (Eigenvalue computation) 347.
- Anfert'eva, E. A. (Identität von Chowla und Selberg) 265.
- Angelitch, T. P. (Beltrami-Michell compatibility equations in general tensor) 146.
- Anghel, C. et C. Virsan (Sur le comportement asymptotique des solutions des équations linéaires) 303.
- Anilović, V. Ja. (Dynamik der Aufbereitungssiebe mit Dämpfung) 139.
- Ansbacher, F. (Overlap integral of two harmonic oscillator wave functions) 231.
- Ansel'm, A. A. (Model of a field theory) 201.
- Ansermet, A. (Calcul en topographie) 134.
- Apfelbeck, Alois (Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe) 167.
- Aquaro, G'ovanni (Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico) 128.
- Arbeiten des IV. rumänischen Mathematikerkongresses 1.
- Archipov (Arkhipov), V. N. (Streaming fluctuations behind a solid obstacle) 419.
- Arnol'd, V. I. (Darstellung von Funktionen zweier Veränderlichen) 270; (Darstellung stetiger Funktionen dreier Veränderlichen) 271; (Functions of three variables) 271; (Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlichen) 272.
- Arnous, E., W. Heitler and Y. Takahashi (Convergent non-local field theory. I.) 447.
- Arnowitz, R., S. Deser and C. W. Misner (Energy and the criteria for radiation in general relativity) 443.
- Aronson, D. G. (Linear parabolic equation) 76.
- Arrow, Kenneth J. and Leónid Hurwicz (Equilibria of economic systems) 370.
- Arutjunjan, N. Ch. (Ebene Kontaktaufgabe der Plastizitätstheorie) 163.
- Arvieu, Robert et Marcel Vénéroni (Quasi-particules) 219.

- Arya, Suresh Chandra s. Chandra Arya, Suresh 87.
- Asaturjan, A. Š. und V. I. Černikin (Laminare Bewegung einer zähen Flüssigkeit) 417.
- Ascher, Marcia and George E. Forsythe (SWAC experiments) 347.
- Athen, Hermann (Vektorielle analytische Geometrie) 121.
- Augstkalns (Augstkaln), K. (Bewegung eines Werkstücks) 142.
- Aurora, Silvio (Multiplicative norms for metric rings) 254.
- Axford, W. I. (Oscillating plate problem in magnetohydrodynamics) 428.
- Babaev, N. N. (Schwingungen ebener Balkenüberdeckungen) 166; (Erzwungene Transversalschwingungen von Stäben) 168.
- Babuška, I., E. Vitásek and F. Kroupa (Crystal lattice deformation. I.) 232.
- Backofen, W. A. s. G. T. van Rooyen 157.
- Baganas, Nicolas (Normalité d'une famille de fonctions algébroides) 49.
- Bagley, R. W. and J. D. McKnight (Differentiation of infinite series of functions) 272.
- Bailey, Norman T. J. (Nonequilibrium theory of a simple queue) 352.
- Baker, M. and F. Zachariasen (Pion-pion scattering in the ϕ' theory) 448.
- W. E. (Elastic-plastic response of thin spherical shells) 179.
- jr., Robert M. L. (Librations on a slightly eccentric orbit) 235.
- Balakrishnan, A. V. (Operational calculus for infinitesimal generators of semigroups) 97.
- Balk, M. B. (Bernoullische Zahlen) 279; (Satz über ganze Funktionen) 291.
- Ball, B. J. (Collections of arcs in E^3) 132.
- Bandić, Ivan (Équation différentielle non-linéaire) 57.
- Baños jr., A. and R. Vernon (Large amplitude waves in a collision-free plasma. I.) 214.
- Barbát, I. (Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires) 66.
- Barbilian, D. (Argument d'Euclide pour l'infinité des nombres premiers) 256.
- Bardeen, J., L. N. Cooper and J. R. Schrieffer (Superconductivity) 454.
- , G. Rickayzen and L. Tewordt (Thermal conductivity of superconductors) 454.
- Barenblatt, G. I. (Equilibrium cracks) 152.
- Barsukov, K. A. (Transition radiation in waveguides) 183.
- Bartholomew, D. J. (Test of homogeneity for ordered alternatives. II.) 360.
- Bartoszyński, R. (Convergence of stochastic processes) 109.
- Barut, A. (Vacuum expectation values and analytic functions) 195; (Relativistic invariance and quantum mechanics) 196.
- Bass, J. (Définition temporelle des fonctions aléatoires) 362.
- Bastiani, André et Charles Ehresmann (Appuis d'une pyramide convexe) 326.
- Baudet, Jean, Françoise Cabaret, Jacques Tillieu et Jean Guy (Table d'intégrales à deux centres. II.) 192.
- Baumann, R. (Automatisierte digitale Netzberechnung) 107.
- Baumslag, Gilbert (Wreath product and finitely presented groups) 244; (Problem of Lyndon) 245.
- Bear, H. S. (Boundary properties of function algebras) 93.
- Beaufays, O. (Détermination algébrique d'un spineur) 193.
- Beaumont, R. A. and R. S. Pierce (Partly transitive modules) 25; (Partly invariant submodules of a torsion module) 25.
- Beck, Anatole (Eigen operators of ergodic transformations) 329.
- Becquet, Françoise s. Alice Recoque 106.
- Bedel'baev, A. K. (Stabilität nichtlinearer Regelungssysteme) 306.
- Behnke, Heinrich (Schulmathematik) 3.
- Bell, D. A. (Electrical noise) 211.
- Bellman, Richard (Expansions of infinite products) 278.
- and Kenneth L. Cooke (Stability theory and adjoint operators for linear differential-difference equations) 298.
- and Robert Kalaba (Functional equations, wave propagation and invariant imbedding) 453.
- Belnap jr., Nuel D. s. Alan Ross Anderson 9.
- Belousov, V. D. s. J. Aczél 243.
- Belov, K. M. (Positive curvature surfaces) 380.
- Belova, I. N. s. V. M. Ginzburg 441.
- Benado, Mihail (Théorème de O. N. Golovine) 243.
- BenDaniel, David J. s. J. L. Delcroix 452.
- Judith M. s. J. L. Delcroix 452.
- Bender, B. K. and A. J. Goldman (Capacity requirement of a mail sorting device) 117.
- Benneton, Gaston (Produits infinis complexes semi-convergenents) 40.
- Bennett, B. M. (Methods of determining confidence limits) 114.
- Benvenuti, Pietro (Equazioni dell'elettromagnetismo) 445.
- Bergström, Harald (Fundamental theorem of Roth) 262.
- Berman, D. L. (Konstruktion eines linearen Polynomialoperators) 41.
- Bernard, William and Herbert B. Callen (Irreversible thermodynamics of nonlinear processes) 451.
- Bernardes, N. and H. Primakoff (Solid He³) 221.
- Bers, Lipman (Simultaneous uniformization) 51.
- Bespalov, V. I. (Fluctuations of parameters of linear systems) 351.
- Bessaga, C., A. Pełczyński and S. Rolewicz (Properties of the space (s)) 327.
- Bessonov, A. P. (Bewegung eines Vibrationsmechanismus) 139.
- Bezpal'ko, L. A. s. L. B. Rozenberg 157.
- Bharucha-Reid, Albert T. (Équations intégrales aléatoires de Fredholm) 107, 108.
- Białkowski, Grzegorz and Andrzej Jurewicz (Scatte-

- ring of K^+ -mesons by nucleons) 448.
- Bialynicki-Birula, I. (Wave function renormalization constant in quantum electrodynamics) 448.
- Biermann, Kurt-R. und Hans-Günther Körber (Brief von C. F. Gauß) 7.
- Bird, Otto s. J. M. Bocheński 9.
- Birger, I. A. (Integral equations with large values of the parameter) 320.
- Bishop, R. E. D. and D. C. Johnson (Mechanics of vibration) 142.
- Bittner, R. (Axiomatics for the operational calculus) 58.
- Bjork, Robert L. (Impurity-induced localized modes of lattice vibration in a diatomic chain) 232.
- Blackburn, Norman (Nilpotent groups) 246.
- Blaschke, Wilhelm (Congruenze rettilinee nello spazio ellittico) 120.
- Blatt, John M. (Electron pairs in superconductivity) 455.
- Blinova, E. N. (Forecasting of smoothed values of meteorological elements) 240.
- Block, H. D. (Robbins-Monro stochastic approximation process) 363.
- Bocheński, J. M. (Précis of mathematical logic) 9.
- Bodner, V. A. (Eigenschwingungen in einem System mit Kompressor) 436.
- Boerboom, A. J. H., H. A. Tasman and H. Wachsmuth (Shape of the magnetic field between conical pole faces) 185.
- Bogoljubov (Bogoliubov), N. N. (Superconductivity) 454; (I, III.) 455.
- — — — —, V. V. Tolmachev (Tolmachev) and D. V. Širkov (Širkov) (Superconductivity) 454.
- Boldyrev, N. G. (Geometrische Optik im Lobačevskijschen Raum) 442.
- Bollini, C. G. (Coupling of elementary particles with the electromagnetic field) 203.
- Bonch-Bruevich, V. L. and Sh. M. Kogan (Temperature Green's functions) 221.
- Bondarev, A. L. (Taylorsche Formel) 279.
- Bondi, H. (Magneto-hydrostatics of stellar atmospheres. II.) 238.
- Bonnevier, B. and B. Lehnert (Charged particles in a rotating plasma) 227.
- Bonnor, W. B. (Problem of evolution in general relativity) 188.
- Boole, George (Finite differences) 297.
- Boot, A. R. s. R. Eisenschtz 212.
- Borevič (Borewicz), Z. I. (Principal ideal theorem) 255.
- Borisova, É. P., P. P. Korjovov (Korjovov) and N. N. Moiseev (Automodel problems of penetration) 404.
- Borofsky, S. (Convergence in ordered integral domains) 275.
- Boron, Leo F. s. A. O. Gelfond 261.
- Borovikov, V. A. (Fundamentallösungen linearer partieller Differentialgleichungen) 312.
- Borovkov, A. A. (Limit theorems on distributions of maximum of sums. I.) 355.
- Borowitz, Sidney s. Harvey J. Brudner 230.
- Bosco, B. and V. de Alfaro (Electromagnetic structure of the nucleon) 450.
- Bottema, O. (Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene) 121.
- Bourion, Georges (Théorème de Szegő) 47.
- Bourret, R. C. (Velocity autocorrelations of charged particles) 213.
- Bowen, Julius I. s. Paul H. E. Meijer 210.
- Boyce, W. E. (Strain hardening circular plates) 400.
- Boyd, A. V. (Bounds for Mill's ratio for type III population) 364.
- Boyer, D. W. (Explosion generated by a pressurized sphere) 413.
- Bradley, Ralph Allan s. Clyde Young Kramer 359.
- Brainerd, Barron (Embedding of a vector lattice) 88.
- Brändus, I. (Collisions élastiques entre des particules à spins arbitraires) 446.
- Brauer, Richard and Michio Suzuki (Finite groups whose 2-Sylow group is a quaternion group) 19.
- Brechovskich (Brekhovskikh), L. M. (Attenuation of Rayleigh waves) 435.
- Bremermann, H. J., R. Oehme et J. G. Taylor (Relations de dispersion) 196.
- Breusch, Robert (Extrema of certain polynomials) 15.
- Brinkerhoff, Jesse R. (Evaluation of preflight risks) 348.
- Broer, L. J. F. and J. A. Rietdijk (Measurements on supersonic free jets) 410.
- Broglie, Louis de (Non-linear wave mechanics) 191.
- Bross, Helmut (Richtungsabhängigkeit physikalischer Eigenschaften in Kristallen) 222.
- Brown, R. K. (Univalence of Bessel functions) 50.
- Bruck, R. H. (Sums of normal endomorphisms) 243.
- Brudner, Harvey J. and Sidney Borowitz (Wave functions for alkali atoms) 230.
- Brueckner, K. A. s. R. D. Amado 453.
- Bruijn, Nicolaas Govert de (Verallgemeinerte Riemannsche Sphären) 296.
- Buchwalter, Henri (Saturation dans un espace normé) 280.
- Bucur, I. (Formules de dualité des classes de Chern) 385.
- Buffara, Regina and Jayme Machado Cardoso (Mathematik. Bibliographie) 1.
- Burrows, G. L. s. M. Halperin 358.
- Busbridge, I. W. (Mathematics of radiative transfer) 214.
- Bush, K. A. and I. Olkin (Extrema of quadratic forms) 366.
- Butler, M. C. R. (Module theory and matrix equation $f(S) = T$) 14.
- Cabaret, Françoise s. Jean Baudet 192.
- Caianiello, E. R. (Développements en série de perturbation) 195.
- Cairns, S. S. (Mathematics on the secondary school level) 3.
- Cairó, Lorenzo (Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma) 183.
- Callen, Herbert B. s. William Bernard 451.
- Campedelli, Luigi (Preparazione universitaria) 2; (Insegnar matematica) 3.

- Capella, Alphonse (Quantification du champ électromagnétique) 180.
- Capellen, Walther Meyer zur s. Meyer zur Capellen, Walther 346.
- Cardoso, Jayme Machado s. Regina Buffara 1.
- Caregradskij (Tsaregradsky), I. P. (Capacity of a stationary channel with finite impression) 354.
- Čarin, V. S. (Locally nilpotent groups) 18.
- Carleson, Lennart (Dirichlet integral) 286.
- Carlitz, L. (Congruences involving sums of binomial coefficients) 258.
- Carlson, B. C. (Fields of an accelerated point charge) 183.
- Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (Magnetohydrodynamic flow past a flat plate) 428.
- Carteron, J. (Calcul analogique ou calcul numérique?) 346.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 109.
- Cassels, J. W. S. (Arithmetic on curves of genus 1. I.) 30; (Problem of Steinhaus) 260.
- Castaldo, Domenico (Funzioni simmetriche in un algebra di Boole) 23.
- Castoldi, Luigi (Inversione delle formule di Bayes) 365.
- Cattaneo, Carlo (Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana) 188.
- Caughey, T. K. (Van der Pol's oscillator) 65.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Equibrocadiani) 373.
- Čén Čun-sjan (Chen Chun-sian) and Čzou Si-šin (Chow Shih-hsun) (Basic compensation equation in superconductivity theory) 220; (Energy spectrum of a high density electron gas) 221.
- Cerkovnikov, Ju. A. s. D. N. Zubarev 451.
- Čerkudinov, S. A. and N. V. Speranskij (Synthese von Gelenkviereckgetrieben. I.) 141.
- Černigovskaja, E. I. (Wärmewellen in einer Schicht) 79.
- Černikin, V. I. s. A. Š. Asaturjan 417.
- Černin, K. E. (Konforme Abbildung der aus Rechtecken zusammengesetzten Bereiche) 344; (Axialsymmetrische Aufgabe) 344.
- Černý, G. G. (Gasströmungen mit großer Überschallgeschwindigkeit) 413; (Strömung eines idealen Gases um Körper bei hoher Überschallgeschwindigkeit) 413.
- — — s. A. L. Gonor 408.
- Cesari, Lamberto (Surface area theory) 270.
- Četaev, N. G. (Bewegungsstabilität in der Mechanik) 63; (Bewegung einer Schwingmühle) 139.
- Chabert d'Hières, Gabriel s. Hières, Gabriel Chabert d' 436.
- Chacon, Rafael V. (Limit properties at zero of the Markov semi-group) 109.
- Chajkovič, I. M. (Schwingungen im Relaxationsmedium) 166.
- Chalatnikov (Khalatnikov), I. M. and A. A. Abrikosov (Superconductivity) 454.
- Chambers, L. G. (Hund gravitational equations) 444.
- Chandra Arya, Suresh (Abelian theorem for a generalization of Laplace transformation) 87.
- Chandrasekhar, S. (Hydrodynamic stability of helium II. II.) 421.
- — — and R. J. Donnelly (Hydrodynamic stability of helium II. I.) 420.
- Chang, C. C. and T. S. Lundgren (Incompressible fluid in a hydromagnetic capacitor) 426.
- — — and J. T. Yen (Rayleigh's problem in magnetohydrodynamics) 427.
- Chapman, J. H., W. J. Heikila and J. E. Hogarth (Scatter propagation in the troposphere) 182.
- Chara (Khara), I. S. (Approximate formulas in conformal mappings) 54.
- Charazov, D. F. (Gleichmäßige Konvergenz von Reihen nach Eigenfunktionen gewisser Differentialoperatoren) 59.
- Chaskind, M. D. (Beugung an vertikalem Hindernis in schwerer Flüssigkeit) 433; (Störkräfte und Überflutung von Schiffen beim Seegang) 434.
- Chatiašvili, G. M. (Elastisches Gleichgewicht eines zylindrischen Balkens) 149.
- Chavinson, S. Ja. s. G. C. Tumarkin 50.
- Čažalija, G. Ja. (Näherungsformel der Theorie der konformen Abbildungen) 294.
- Chelazzi, Mirko (Determinazione grafica degli angoli) 374.
- Chern, Shing-Shen (Integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space) 128.
- Chew, Geoffrey F., Robert Karplus, Stephen Gasiorowicz and Fredrik Zachariasen (Electromagnetic structure of the nucleon in local-field theory) 449.
- Chiffi, Antonio (Continuità degli integrali curvilinei) 34.
- Choang Tuj (Hoang Tuy) (Symmetry of the contingent of a measurable function curve) 36.
- R. V. s. G. P. Ljubimov 231.
- Choudhury, P. (Stresses due to nucleus of strain in an infinite slab) 150.
- Chow, Sho-kwan (Homotopy groups) 391.
- Christianović, S. A. s. O. S. Ryžov 412.
- Chrustalev, A. F. und B. I. Kogan (Spannungszustand eines hohlen Kreiszyllinders) 153.
- Chu, Boa-Teh (Thermodynamics of electrically conducting fluids) 210.
- Chuan Ké-čzi (Dünnwandige Stäbe mit offenem Profil) 397.
- Ciesielski, Z. and J. Musielak (Absolute convergence of Haar series) 281.
- Cimmino, Gianfranco (Equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico) 83.
- Čistjakov (Čistyakov), V. P. (Theorem for branching processes) 350.
- Clagett, Marshall (edited by) (Critical problems in the history of science) 3.
- Clark, Charles E. (Statistics of random numbers) 111.
- jr., Melville s. J. L. Delcroix 452.
- Clauser, Emilio (Moto di particelle nell'ultima teoria unitaria einsteiniana) 444.
- Clunie, J. and P. Vermes (Sonnenschein type summability methods) 277.

- Čobanjan, K. S. s. P. O. Galfan 179.
 Cofta, H. (Ferrimagnetic spin-wave resonance) 234.
 Cohen, Arthur (Tables for the sign test) 364.
 — Morrell H., Michael J. Harrison and Walter A. Harrison (Magnetic-field dependence of the ultrasonic attenuation in metals) 222.
 — Paul J. (Green's theorem) 35.
 Cohn, P. M. (Rings of zero-divisors) 253.
 Colloques internationaux (Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs) 193.
 Colombo, Giuseppe (Orbite stabile in un sincrotrone) 304.
 Connell, Ian G. (Beatty sequences. II.) 32.
 Conner, P. E. and Eldon Dyer (Singular fiberings by spheres) 392.
 Conrad, Paul (Semigroup rings. II.) 21.
 Consoli, Térézio et Dimitri Lepechinski (Densité électronique d'un plasma) 212.
 Constantine, A. G. and A. T. James (Canonical correlation distribution) 366.
 Continuous mortality investigation 116.
 Conway, H. D. (Axially symmetrically loaded circular shell) 154.
 Cooke, Kenneth L. s. Richard Bellman 298.
 Cooper, L. N. s. J. Bardeen 454.
 Corciovei, A. (Ferromagnetism of thin films) 234.
 Corinaldesi, E. (Introduction to dispersion relations) 197.
 Coupry, G. (Coefficients stationnaires d'aileron en supersonique) 411.
 Couray, B. S. and A. A. Maradudin (Absorption and emission spectra of an electron) 224.
 Couteur, K. J. Le s. Le Couteur, K. J. 447.
 Cowell, W. R. (Loops with adjoints) 372.
 Cowles, Alfred (Conclusions regarding stock price behavior) 371.
 Cowley, J. M. and A. F. Moodie (Fourier images. I.) 183; (II.) 184.
 Cox, A. D. and L. W. Morland (Dynamic plastic deformations of plates) 163.
 Coxeter (Kokster), H. S. M. (Ch. S. M.) (Real projective plane) 121.
 Craig, Homer V. (Extensors in calculus of variations) 318.
 Cremer, H. und F. Kolberg (Stabilitätsprüfung) 68.
 Cristescu, Romulus (Geordnete lineare Räume) 87.
 Crouch, R. B. (Characteristic subgroups of monomial groups) 18.
 Crowe, A. (Transport of energy and momentum by phonons in fluids) 212.
 Csáki, Endre (Wilcoxon-statistic) 361.
 Čžou Si-siñ s. Čěn Čuñ-sjañ 220, 221.
 Dąbrowski, Ryszard (Curved bridges) 150.
 Daiber, John W. (Optical boundary-layer probe) 418.
 Dally, J. W. s. A. J. Durelli 397.
 Damsté, B. R. s. D. J. Hof-sommer 240.
 Daniel, Cuthbert (Parallel fractional replicates) 112.
 Daniljuk, I. I. (Automorphe quasianalytische Funktionen auf Flächen) 56.
 Danilova, I. N. (Temperaturverteilung in einem Hohlzylinder) 79.
 Danskin, J. M. s. A. M. Rodnjanskij 129.
 Dantzig, D. van et G. Zoutendijk (Itérations markoviennes dans les ensembles abstraits) 109.
 Darwin, J. H. (Three-decision test for comparing two binomial populations) 113.
 Dat, Jacques s. Léopold Escande 437.
 Daubert, André (Ondes permanentes et périodiques de gravité) 431; (Houle de gravité) 432.
 Davies, G. and B. C. Neal (Dynamical behaviour of a strut) 150.
 Davis, Chandler (Separation of two linear subspaces) 326; (Compressions to finite-dimensional subspaces) 329.
 — H. L. (Antiferromagnetic ground state) 224.
 Day, M. M. s. K. A. Sitnikov 129.
 De Wiest, Roger J. M. s. Wiest, Roger J. M. De 437.
 Deaux, R. (Cubique de Mac-Cay) 373.
 Debever, Robert (Espace-temps du type III de Petrov) 445.
 Decaulne, P. s. J. C. Gille 67.
 Decay, Jon Mathews s. Victor Gilinsky 206.
 Deev (Deyev), V. M. (Space problem of elasticity theory) 399.
 Dehevels, René (Points critiques d'une fonctionnelle) 98.
 Dehn, Edgar (Algebraic equations) 241.
 Delande, Georges (Extension des surfaces minimales adjointes d'Ossian Bonnet) 379.
 Delcroix, J. L. (Ionized gases) 452.
 Deloff, A. and J. Wrzeczionko (Baryon-baryon scattering theory) 205.
 DeMarr, Ralph s. K. A. Sitnikov 129.
 Demeur, M. et Ch. Joachain (Méthode de sommation de la théorie des perturbation) 230.
 Deming, W. Edwards and Gerald J. Glasser (Matching lists by samples) 113.
 Denbow, Carl H. and Victor Goedicke (Foundations of mathematics) 1.
 Denjoy, Arnaud (Trajectoires du tore) 61.
 Deprit, A. (Machines à calculer digitales en Grande-Bretagne) 346.
 Derski, Włodzimierz (State of stress and displacement in a thick circular plate) 154.
 Deser, S. s. R. Arnowitz 443.
 DeWit, G. and J. S. Koehler (Interaction of dislocations with an applied stress in anisotropic crystals) 396.
 — s. J. S. Koehler 396.
 — M., C. R. Fischer and W. Zickendraht (Compensations in electron excitation effects in p - p and p - n scattering) 230.
 Dirac, G. A. (Paths and circuits in graphs) 393.
 Ditkin, V. A. (Operator calculus) 322.
 Djubek, Jozef (Stabilität eines gestützten Stabes) 168.
 Dobbertin, Rolf (Quantification du tenseur énergie-impulsion) 445.
 Dobronravov, Ju. A. (G. A.) (Integrals of motion for the hydrogen atom) 230.
 Dolmatov, K. I. (Gesetz von Bachmetev) 58.

- Dolph, C. L. (Saddle point characterization of the Schwinger stationary points) 192.
- Dombrovskij, G. A. (Grenzlinien in einem Strahl) 410.
- Don elly, R. J. s. S. Chandrasekhar 420.
- Dorfman, L. A. (Turbulente Grenzschicht an rotierender Scheibe) 422.
- Dorogovcev (Dorogovtsev), A. Ja. (A. Y.) (Statistical analysis of a difference stochastic equation) 362.
- Dovnorović, V. I. (Räumliche Kontaktaufgaben der Elastizitätstheorie) 170.
- Dowker, (Dauker), C. H. (K. Ch.) (Dualitätssatz von Kolmogorov und Aleksandrov) 392.
- Drăgilă, Pavel (Couples de surfaces harmoniques conjuguées) 379.
- Drenckhahn, Friedrich (Mathematischer Unterricht der 6- bis 15jährigen Jugend) 3.
- Drischel, H. (Kybernetik und Biologie) 115.
- Drs, Ladislav (Umzeichnen von Perspektiven) 134.
- Dubreil, Paul (Mathématiques dans l'enseignement du second degré) 3.
- Dück, W. (Iterationsverfahren von Schulz) 338.
- Dumitrescu, L. s. N. N. Patraulea 403.
- Dunduženko (Dunduchenko), L. E. and S. A. Kas'anjuk (Kasyanyuk) (Analytical functions bounded in n -connected circular regions) 291.
- Dunn, Olive Jean (Medians for dependent variables) 364.
- Durbin, J. (Quenouille's method of bias reduction) 365.
- Durelli, A. J. and J. W. Dally (Stress concentration factors) 397.
- Duschek, Adalbert (Höhere Mathematik. 1.) 33; (3.) 33.
- Dwivedi, S. H. (Entire functions of finite order) 48.
- Dyer, Eldon s. P. E. Conner 392.
- Eckert (Ékkert), W. (V.) J. und Rebecca Jones (Džons) (Elektronische Rechenmaschine) 104.
- Edrei, Albert et Wolfgang H. J. Fuchs (Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes) 288.
- Edwards, S. F. (Statistical thermodynamics of a gas) 209.
- Ehrenfest, Paul and Tatiana Ehrenfest (Statistical approach in mechanics) 451.
- Tatiana s. Paul Ehrenfest 451.
- Ehresmann, Charles s. Andrée Bastiani 326.
- Eimer, Czesław (Theory of creep) 163.
- Eisenhart, Luther Pfahler (Differential geometry of curves and surfaces) 378.
- Eisenschitz, R. and A. R. Boot (Thermal conductivity of monatomic dielectric liquids) 212.
- Éjdel'man, S. D. (Integralprinzip des Maximums für stark parabolische Systeme) 74.
- Elianu, Ion (Courants autoad-joints) 126.
- Elιάś, Jozef (Operatorenmethode zur Lösung von Differenzengleichungen) 297.
- Eliassen, E. (Initial development of frontal waves) 240.
- Elliott, R. J. and R. Loudon (Scattering processes in crystals) 222.
- Elrod jr., H. G. (Turbulent shear stress near a wall) 422; (Erratum) 422.
- Él'sgol'c, L. É. (Periodische Lösungen linearer und quasilinearer Differentialgleichungen) 298; (Stabilität von Differentialgleichungen mit retardierten Argumenten) 299.
- Elsässer, H. (Theorie der astronomischen Szintillation. II.) 236.
- Elteren, Ph. van (Asymptotic distribution of Terpstra's statistic) 359.
- Éltető, Ödön and Károly Sarkadi (Microbiological examination of tomato purées) 369.
- Emel'janov (Emel'yanov), A. A. (Viscosity in the hydrodynamic theory of multiple particle production) 206.
- — S. V. (Nonlinear correcting devices) 309.
- Emery, V. J. and A. M. Sessler (Phase transition in liquid He³) 220.
- Endler, Otto (Inverse Problem der Galoisschen Theorie) 16.
- Engelmann, Folker (Darstellungen der Drehgruppe) 20.
- Englman, R. (Discontinuities in the solutions of the transport equation) 211.
- Epfelbaum, Gilda et Pierre-Jean Laurent (Zéros et extrêmes de la fonction d'Airy, Ai(x)) 348.
- Erdős, P. and T. Gallai (Maximal paths and circuits of graphs) 394.
- Erma, Victor A. (Thomas-Fermische Gleichung) 230.
- Ernst, Dietrich (Elektronische Analogrechner) 104.
- Escande, Léopold (Manœuvres rythmiques dans le cas d'une chambre d'équilibre) 437.
- — et Jacques Dat (Calcul des chambres d'équilibre) 437.
- Eskinazi, Salamon s. John W. Schaefer 415.
- Etayo Miqueo, Jose Javier (Algebraische Mannigfaltigkeiten) 375.
- Éterman, I. I. (Automatic control of a milling machine) 347.
- Etkin, B. (Response of airplanes to random atmospheric turbulence) 421.
- Eves, Howard (Philo's line) 374.
- Evgrafov, M. A. s. Loo-keng Hua 96.
- Ezawa, Hiroshi and Hiroomi Umezawa (Green's functions for elementary particles) 450.
- Ezeilo, J. O. C. (Differential equations of the third order) 66.
- Fabri, Jean and Raymond Siestrunck (Rotating stall in axial flow compressors) 429.
- Fadini, Angelo (Algebra tetravalente di livelli) 23.
- Fadle, J. (Parallelfachwerkträger) 179.
- Fage, M. K. (Integraldarstellungen operator-analytischer Funktionen) 37.
- Falevič (Falevich), B. Ja. (B. J.) (Proving incompleteness theorems for systems with Carnap rule) 12.
- Falgas, Maurice (Séries de base de polynomes) 285.
- Farahat, H. K. and W. Ledermann (Matrices with prescribed characteristic polynomials) 15.

- Farnell, A. B. (Vandermonde determinant) 13; (Curve-fitting matrices) 338.
- Feather, N. (Population of segments of a random series) 349.
- Federbush, P., M. L. Goldberger and S. B. Treiman (Electromagnetic structure of the nucleon) 449.
- Paul G. and Kenneth A. Johnson (Twofold vacuum expectation value) 199.
- Fedorov, É. A. (Bewegung einer Platte nahe der freien Oberfläche einer idealen Flüssigkeit) 404.
- Feinberg, G., P. Kabir and S. Weinberg (Transformation of muons) 207.
- Feit, Walter (p -regular extensions of local fields) 257.
- Feinberg, S. M. (Prinzip der extremalen Spannung) 147.
- Feld, J. M. (Application of turns and slides to spherical geometry) 122.
- Fel'dman, N. I. (Transzendenz der Zahlen gewisser Klassen) 262.
- Fell, J. M. G. (Dual spaces of C^* -algebras) 328.
- Feller, William (Birth and death processes as diffusion processes) 109.
- Ferguson, David E. (Input-output buffering and Fortran) 346.
- Ferrarese, Giorgio (Velocità angolare nei moti rigidi) 148.
- Ferrari, E. and G. Jona-Lasinio (Ghost states in relativistic field theories) 447.
- Fichera, Gaetano (Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe) 284.
- Fil'čakov (Filchakov), P. F. (Constants of Christoffel-Schwarz's integral) 344.
- Filimonov, Ju. M. (Iu. M.) (Stability of solutions of differential equations) 303.
- Filin, A. P. (Vorgespannte Konstruktionselemente) 398.
- Filippov, A. F. (Theorie der optimalen Regelung) 69; (Diffraction of an elastic wave) 170.
- Finney, D. J. (External economy of variational selection) 116.
- Fiorenza, Renato (Problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche) 314.
- Firsov, O. B. (Plasma in a "magnetic grid") 227.
- Fischer, C. R. s. M. DeWit 230.
- Fisher, Franklin M. (Rank and order conditions for identifiability) 117.
- Fišman (Fishman), K. M. (Representation of certain analytic functions) 333.
- Fisz, M. (Validity of the strong law of large numbers) 356.
- Fleishman, B. A. (Progressing waves in a string) 74.
- Fleming, W. H. (Irreducible generalized surfaces) 320.
- — — and L. C. Young (Surfaces with prescribed elementary boundary) 319.
- Flidlíder, G. M. (Transient responses in the magnetic circuits of electromagnetic clutches) 72.
- Flor, Peter (Inequalities among modular functions) 265.
- Fock, Vladimir (Raum, Zeit und Gravitation) 442.
- Fogarassy, B. and G. Németh (Potential function for diatomic molecules) 231.
- Foland, W. D. and R. D. Present (Hydrodynamic theory of spontaneous fission) 219.
- Fomin, S. V. s. A. N. Kolmogorov 87.
- Fong, Paul (Characters of finite solvable groups) 248.
- Ford, H. s. G. Lianis 164.
- Forsythe, George E. s. Marcia Ascher 347.
- Francia, G. Toraldo di s. Toraldo di Francia, G. 183.
- Franklin, J. N. (Numerical stability in computation for diffusion problems) 100.
- Franz, Wolfgang (Eulerscher Polyedersatz) 389.
- Fréchet, Maurice (Tableaux de corrélation) 366.
- Fridman, M. A. (Vollständig reguläre Operationen auf der Klasse der Gruppen) 17.
- Fried, E. (Auflösbarkeit von Gleichungen) 242.
- Friedman, Avner (Free boundary problems for parabolic equations. III.) 78.
- Friedrichs, K. O. (Intégration des fonctionnelles dans l'espace d'Hilbert) 195.
- Frischknecht, M. (Approximative Reservenberechnung) 370.
- Fritscher, O. (Komplexe Wurzeln algebraischer Gleichungen) 339.
- Frejzman, P. A. (Brief an die Redaktion) 253.
- Froissart, M. (Covariant formalism of a field with indefinite metric) 199.
- Frölicher, Alfred and Albért Nijenhuis (Invariance of vector form operations) 387.
- Frostman, Otto (Suites convergentes de distributions d'équilibre) 83.
- Fuchs, L. (Pure subgroups of Abelian groups) 20; (Abelian groups. I, II.) 20.
- Wolfgang H. J. s. Albert Edrei 288.
- Fulton, Curtis M. and Sherman K. Stein (Parallelograms inscribed in convex curves) 127.
- Fung, Y. C. (Fluctuating lift and drag) 421.
- Gabillard, Robert (Étude analytique de processus stochastiques) 108.
- Gaede, Karl-Walter (Reelle Wurzeln der Gleichung n -ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten) 110.
- Galfajan, P. O. und K. S. Čobanjan (Torsion eines rechteckigen Stabes) 179.
- Gallai, T. s. P. Erdős 394.
- Gambirasio, Giorgio (Electrical behavior of an ideal plasma) 226.
- Gamkrelidze, R. V. (Optimal processes) 307; (Optimurrate processes) 308.
- Gårding, Lars (Inequality for hyperbolic polynomials) 16.
- Garnier, René (Cinématique. I.) 145.
- Gasiorowicz, Stephen s. Geoffrey F. Chew 449.
- Gavard, M. s. B. Gilg 437.
- Gazalé, M. Midhat J. (Structures de commutation à m valeurs) 347.
- Geertsma, J. (Thermoelasticity and elasticity of saturated porous media) 160.
- Gehring, F. W. (Quasiconformal mappings) 53; (Solutions of the heat equation) 77.
- — — and Olli Lehto (Total differentiability of functions of a complex variable) 53.
- Geiger, R. E. s. H. T. Nagamatsu 414.
- — — s. Ting-Yi Li 414.
- Geisser, Seymour and Samuel W. Greenhouse (Extension of Box's results) 358.
- Gelfond, A. O. (Transcendental and algebraic numbers) 261.
- Germajde, V. E. (Asymptotische Stabilität von Systemen)

- mit retardiertem Argument) 57.
- Gersten, K. (Corner interference effects) 417.
- Ghildyal, C. D. (Steady self-superposable flows) 415.
- Gião, Antonio et Jean Roulleau (Variation avec l'altitude du gradient vertical moyen dans l'atmosphère libre) 239.
- Gilg, B. et M. Gavard (Perméabilité par des essais d'eau dans les sondages en alluvions) 437.
- Gilinsky, Victor and Jon Matthews (Decay of bound muons) 206.
- Gille, J. C., M. Pelegrin und P. Decaulne (Regelungstechnik. I.) 67.
- Gillet, Vincent (Corrélations multiples perturbées) 447.
- Gini, Corrado (Limiti della invertibilità delle relazioni statistiche) 367.
- Ginzburg, V. M. und I. N. Belova (Berechnung parabolischer Antennen) 441.
- Ginzel, Ingeborg and Hans Multhopp (Wings with minimum drag) 409.
- Giorgiutti, Italo (Tableau spectral) 131; (Interprétation spectrale des invariants de Smith) 131.
- Gjeddebaek, N. F. (Study of grouped observations. IV.) 365.
- Glagolev, A. A. s. H. S. M. Coxeter 121.
- Glansdorff, P. (Non-linear law of the irreversible phenomena) 210.
- Glasser, Gerald J. s. W. Edwards Deming 113.
- Ghiddon, J. E. C. (Solution of ionospheric diffusion problems) 440.
- Globe, Samuel (Magnetohydrodynamic flow in an annular channel) 426.
- Gloden, A. (Table de factorisation des nombres $N^4 + 1$) 30.
- Gluskin, L. M. (Halbgruppen und Ringe von Endomorphismen linearer Räume) 328.
- Glushkov, V. M. (Locally compact groups) 20.
- Godeaux, Lucien (Surfaces de genres zéro. I, II.) 375; (Surfaces cubiques) 376; (Surfaces dont les réglées asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires) 380.
- Gödel, Kurt (Erweiterung des finiten Standpunktes) 10.
- Goedicke, Victor s. Carl H. Denbow 1.
- Goetz, A. (Measures in fibre bundles) 267.
- Gol'man (Holmann), F. M. (Graphoanalytical method of seismic waves frequency analyses) 104.
- Gol'dberg, A. A. (Ordnung und Typus ganzer Funktionen) 54; (Set of defective values of meromorphic functions) 289.
- P. A. (S-Radikal und Sylowbasen der unendlichen Gruppen) 18; (Satz von Wielandt) 247.
- Goldberger, M. L. (Second virial coefficient) 209.
- — s. P. Federbush 449.
- Goldhaber, J. K. (Integral p -adic normal matrices) 259.
- Goldman, A. J. (Capacity requirement of a mail sorting device. II.) 117; (Algebras) 253.
- — s. B. K. Bender 117.
- Goldstein, Louis (Thermal properties of liquid helium three) 221.
- Goldstine, H. H. and L. P. Horwitz (Diagonalization of normal matrices) 100.
- Golinskij, B. L. (Lokale Eigenschaften der Funktionen der Klasse L^p) 42.
- Golokvosčus (Golokvoschus), P. B. (Periodizität eines Fundamentalsystems von Lösungen linearer Differentialgleichungssysteme) 60.
- Golub, V. K. (Balkenplatten auf elastischer Grundlage) 398.
- Golubev-Novozilov, Ju. S. s. J. D. Williams 118.
- Gomes, A. Pereira s. Pereira Gomes, A. 13.
- Gonin, E. G. (Theoretische Arithmetik) 12.
- Gonor, A. L. und G. G. Černyj (Körper geringsten Widerstands bei Überschallgeschwindigkeiten) 408.
- González-Fernández, J. M. (Integrability of trigonometric series) 281.
- Gopak, K. N. und S. G. Krivošeeva (Verbiegung eines flachen Konsolträgers) 168.
- Gordon, Hugh (Topologies and projections on Riesz spaces) 88.
- Gor'kov, L. P. (Energy spectrum of superconductors) 454.
- Gorman, C. D. (Brownian motion of rotation) 108.
- Gorskaja, N. S., I. N. Krutova und V. Ju. Rutkovskij (Dynamik nichtlinearer Servomechanismen) 306.
- Gorskiy, V. V. (Übergangsprozeß im Resonanzkreis) 71.
- Gorup, Guntram v. (Tabulierung eines den Hankelschen Funktionen verwandten Integrals) 102.
- Gosselin, Richard P. (Divergence of Fourier series) 282.
- Goto, Shigeo and Shigeru Machida (Effects of virtual nucleon pairs) 204.
- Gourdin, M. and A. Martin (Photoproduction of pions on pions) 449.
- Govorov, V. E. (Durch endliche Amalgame frei erzeugte Algebren) 253.
- Graev, M. I. s. Loo-keng Hua 96.
- Graham, E. W. (Optimum trajectory problems in gravitational fields) 144.
- Granovskij (Granovskii), Ja. I. (Ya. I.) (Mass spectrum of mesons in Heisenberg's theory) 204.
- Grea, Rene A. s. Rene A. Higgonnet 440.
- Green, A. E. and J. E. Adkins (Large elastic deformations) 175.
- H. G. and L. E. Prior (Twisted cubic) 376.
- John W. (Determination of a function) 34.
- Griem, Hans R., Alan C. Kolb and K. Y. Shen (Stark broadening of hydrogen lines in a plasma) 458.
- Greenberg, O. W., H. K. Sen and Y. M. Trève (Hydrodynamic model of diffusion effects) 214.
- Greenhouse, Samuel W. s. Seymour Geisser 358.
- Greenspan, H. P. s. G. F. Carrier 428.
- Grémillard, Jean (Solutions périodiques de troisième sorte du problème des trois corps) 144.
- Griffin jr., John S. (Affine connections in terms of the tangent bundle) 127; (Rotation number of a normal curve) 131.

- Grigoljuk, É. I. (Stabilität dreischichtiger Schalen) 154.
- Grigoraš, Z. K. (Problem der Tsunami-Wellen) 239.
- Grodzenskaja, L. S. (Entwurf von Gelenkmechanismen) 141.
- Grodzovskij, G. L. (Umströmung von Körpern bei hohen Überschallgeschwindigkeiten) 408; (Interferenz von Flügel und Rumpf bei Hyperschallgeschwindigkeiten) 414.
- Groot, J. de (Metrics in general topology) 387.
- Gross, Eugene P. (Quantum theory of interacting bosons) 217; (Collective rotations of nuclei) 218.
- Leonard (Integration and nonlinear transformations in Hilbert space) 333.
- Grosswald, Emil (Theorems concerning partitions) 30.
- Grottemeyer, K. P. (Flächentheorie im Großen. I—III.) 379.
- Gubkin, K. E. (Discontinuities in sound waves) 434.
- Guerreiro, J. Santos s. Santos
- Guerreiro, J. 92.
- Guerrieri, Giuseppe (Diagrammi razionali nell'analisi statistica) 361.
- Guglielmino, Francesco (Problema di Darboux) 312.
- Gulliksen, Harold (Comparatal dispersion) 368.
- Gupta, A. S. (Laminar motion due to the oscillation of a plate in a compressible fluid) 418.
- Gurevič, G. I. (Maxwellsche Gleichung) 395.
- Gürsey, F. (Symmetries of strong and weak interactions) 198.
- Gurzadjan (Gurzadyan), G. A. (Electron temperature of a medium) 227.
- Gusejnov, I. I. s. A. A. Sokolov 192.
- Gutnik, L. A. (Arithmetik der Matrizen) 31; (Zahlentheoretische Funktionen von Matrizen) 31; (Extension of integral subgroups) 249.
- Gutowski, Roman (Free vibration of a system of one degree of freedom) 65.
- Guttman, Irwin (Problem of L. Moser) 358.
- Guttmann, Louis (Metricizing rank-ordered or unordered data) 115.
- Guy, Jean s. Jean Baudet 192.
- Haag, R. (Théorie des champs locale avec particules composées) 194; (Framework of quantum field theory) 197.
- Hadwiger, H. (Stetigkeitsgeometrische Sätze für Kreis und Kugelfläche) 393.
- Haimovici, Adolf (Problèmes aux limites) 310.
- Hajdu, János (Magnetische Widerstandsänderung. I.) 452.
- Hájek, Otomar (Direct decompositions of lattices. I.) 22.
- Haley, A. C. D. s. M. G. Say 104.
- Hall, A. Rupert (Correcting the principia) 7.
- Hällström, Gunnar af (Halbvertauschbarkeit ganzer Funktionen) 48.
- Halperin, Israel s. Ichiro Amemiya 251.
- M. and G. L. Burrows (Sequential batching for acceptance-rejection sampling) 358.
- Halton, J. H. (Efficiency of quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals) 345.
- Ham, F. S. and D. C. Mattis (Thin-film semiconductors) 223.
- Hama, Francis R. (Transition patterns in axisymmetric boundary layers) 415.
- Hamblen, John W. (Statistical programs for the IBM 650. I.) 106.
- Hamilton, J. (Theory of elementary particles) 202.
- Hanani, Haim (Monotonic subsequences) 13.
- Hancock, Harris (Maxima and minima) 275.
- Handbook of supersonic aerodynamics 407.
- Hannakam, L. (Übergangsverhalten des Drehstrom-Schleifringläufers. I, II.) 72.
- Hannan, E. J. (Variance of the mean of a stationary process) 362.
- Hans, Otto (Reduzierende zufällige Transformationen) 348.
- Hara, Osamu (Charge independence) 190.
- Harary, Frank (Graph theory) 132.
- and R. Z. Norman (Dis-similarity characteristic theorems for graphs) 393.
- Hare, A. (Effect of viscosity on stability of magnetohydrodynamic systems) 214.
- Harrison, Michael J. s. Morrel H. Cohen 222.
- Walter A. s. Morrel H. Cohen 222.
- Hartman, Philip (Completely continuous Hankel matrices) 92; (Uniqueness theorem for closed surfaces) 380.
- S. (Dirichlet's approximation theorem) 265.
- Harumi, K. s. S. Katsura 230.
- Hasimoto, Hidenori (Motion of a cylinder in a conducting fluid) 425.
- Havlíček, Karel (Kanal-W-Flächen) 123.
- Hayashi, Kyuzo (Quasi-equicontinuous sets) 299.
- Haynsworth, Emilie V. (Theorem on partitioned matrices) 241.
- Heikkilä, W. J. s. J. H. Chapman 182.
- Heisenberg, Werner (Mutamenti nelle basi della scienza) 191.
- Heitler, W. s. E. Arno 447.
- Helgason, Sigurdur (Riemannian curvature of homogeneous spaces) 126.
- Hellman, Olavi (Schrödinger eigenvalue problem. II.) 191.
- Hély, Jean (Modèles d'univers en état de radiation pure) 190.
- Hermes, Hans (Einfachheitsprinzip in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) 348.
- Herschel, R. (Grenzen des quadratischen Optimums) 70.
- Herz, Carl S. (Spectral theory of bounded functions) 332.
- J.-C. (Propriétés spectrales des matrices normales) 241.
- Hess, Seymour L. (Theoretical meteorology) 239.
- Hessaby, M. (Modèle de particule infinie) 189.
- Hettner, G. und H. Wagner (Fourier-Analyse des elektrischen Mikrofeldes in einem Plasma. II.) 212.
- Heuser, Harro (Eigenwerte symmetrisierbarer finiter Operatoren) 331.
- Hewitt, Edwin s. V. S. Čarin 18.

- Hiele, Pierre Marie van (Problem of insight) 3.
- Hiele-Geldof, Dina van (Didactics of geometry in secondary school) 3.
- Hières, Gabriel Chabert d' (Clapotis parfait monochromatique) 436.
- Higgins, P. J. s. S. Simons 209.
- Higman, D. G. (Representations of orders over Dedekind domains) 28.
- Higonnet, Rene A. and Rene A. Grea (Logical design of electrical circuits) 440.
- Hill, F. K. (Turbulent boundary layer measurements) 423.
- R. (Rigid-plastic solid. III.) 162.
- s. I. N. Sneddon 173.
- Hirsch, Guy (Opérations homologiques) 392.
- Kurt s. V. M. Gluškov 20.
- Morris W. and Stephen Smale (Involutions of the 3-sphere) 392.
- Hirzebruch, F. and K. Kodaira (Complex projective spaces) 386.
- Hitotumatu, Sin (Quasi-pseudo conformal mapping of Reinhardt circular domains) 295.
- Hobby, Charles (Frattini subgroup of a p -group) 19.
- Hocquenghem, A. (Codes correcteurs d'erreurs) 346.
- Hofsommer, D. J., H. A. Lauwerier and B. R. Damsté (Influence of an exponential windfield upon a semicircular bay) 240.
- Hogarth, J. E. s. J. H. Chapman 182.
- Hollmann, Günther (Mikroturbulenter Vertikalaustausch von Masse und Wärme) 239.
- Holter, Öivin (Effect of magnetic field upon low frequency wave packets) 212.
- Horák, Vladimír (Torsen des Kleinschen Raumes) 124.
- Horie, Chiuji (Exciton and plasmon in insulating crystals) 224.
- Hörmander, Lars (Uniqueness of the Cauchy problem. II.) 80; (Differential operators of principal type) 81.
- Horwitz, L. P. s. H. H. Goldstine 100.
- Hosszú, M. s. J. Aczél 243.
- Houthakker, H. S. (Influence of prices and incomes on household expenditures) 370.
- Hove, Léon van (Théorie quantitative des champs en interaction) 195.
- Howell, K. M. (Programming technique for rational fractions) 347.
- Hsiang, Fu-Cheng (Inequality for Fourier transforms) 86.
- Hsu, L. C. (Integration of violently oscillating functions) 103.
- Hua (Chua), Loo-keng (Loken) (Harmonische Analyse von Funktionen mehrerer komplexer Variablen) 96.
- — and K. H. Look (Harmonic functions in classical domains) 295.
- — and Wang Yuan (Numerical integration) 345.
- Huang, Yu-shan (Column analogy for multi-connected rigid frames) 150.
- Huber, Heinz (Riemannsche Flächen von hyperbolischem Typus) 292.
- Hübner, E. (Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungs-Systeme) 143.
- Hurwicz, Leonid s. Kenneth J. Arrow 370.
- Iglisch, Rudolf (Resonanz bei linearen und nichtlinearen Schwingungen) 64.
- Ignat'eva, A. V. s. B. A. Vostrecov 284.
- Ikenberry, E. (Evaluation of collision integrals) 229.
- Il'cenko, V. I. (Kritische Reynoldsche Zahl für Strömung hinter einem Kreiszylinder) 419.
- Il'in, V. A. and I. A. Šišmarev (Äquivalenz von Systemen verallgemeinerter und klassischer Eigenfunktionen) 314.
- P. (Integral inequalities for differentiable functions) 36.
- Imamura, Tsutomu and Keizo Kobayakawa (Multiple meson production) 205.
- Inoue, Yoshiro (Homotopy groups of css complexes) 391.
- Iochvidov, I. S. und M. G. Kreja (Spektraltheorie der Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik. II.) 332.
- Iogansen, L. V. (Quantum corrections to radiation) 192.
- Ionescu Tulcea, C. and Arthur B. Simon (Spectral representations and unbounded convolution operators) 331.
- Isbell, John s. Ju. M. Smirnov 129.
- Ishida, Shin (Final state interaction in Fermi's theory of multiple particle production) 206.
- Ishiguro, Kazuo (Fourier series. XV.) 283.
- Ishihara, Shigeru (Holomorphically projective changes) 386.
- Iškova, A. G. (Verbiegung einer kreisrunden Platte) 160.
- Ivanilov, Ju. P. (Yu. P.), N. N. Moiseev and A. M. Ter-Krikorov (Lavrent'ev's formulas) 293.
- Ivanov, V. V. (Fluctuations in the star counts) 235.
- Ivanova, L. P. s. E. I. Kim 77.
- Ivlev, D. D. (Ausbeulen eines dickwandigen Rohres) 154; (Verlust der Tragfähigkeit rotierender Scheiben) 155.
- Iwasawa, Kenkichi (Sheaves for algebraic number fields) 29.
- Izbicki, Herbert (Graphentransformationen) 394.
- Izumi, Shin-ichi and Masako Satō (Fourier series. VIII.) 282; (XVI.) 283.
- Jablokov, V. A. (Variation des n -fachen Integrals) 319.
- Jaeger, Arno (Analytic geometry and linear algebra) 120.
- James, A. T. s. A. G. Constantine 366.
- I. M. (Embeddings of projective spaces) 132.
- Jankov (Yankov), V. V. (Conducting gaseous sphere in an electromagnetic field) 227.
- Janssens, Paul (Phénomènes non-linéaires) 62.
- Jardetzky, Wenceslas S. (Figures of celestial bodies) 236.
- Jauch, G. (Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge) 145.
- Jeanel, Joachim (Programming for digital computers) 346.
- Jeffery, R. L. (Integrals with respect to functions of bounded variation) 269.
- Joachain, Ch. s. M. Demeur 230.
- Jochmann, Horst (Kreisteilfehler von Präzisionstheodoliten. I, II.) 134.
- Joga Rao, C. V. s. Rao, C. V. Joga 156.

- Johnson, D. C. s. R. E. D. Bishop 142.
 — H. E. s. E. T. Wong 252.
 — Kenneth A. s. Paul G. Federbush 199.
 — Roger A. (Euclidean geometry) 373.
 Joichi, J. T. (Closed operators with closed range) 91.
 Jona-Lasinio, G. s. E. Ferrari 447.
 Jones, Rebecca s. W. J. Eckert 104.
 — Robert T. (Analysis of accelerated motion) 180.
 Jost, Res (Théorème CTP) 195.
 Jur'ev, I. M. (Berechnung der Düsen) 405.
 Jurewicz, Andrzej s. Grzegorz Bialkowski 448.
 Jürimäe, (Jurimäe) E. I. (É.) (Verallgemeinerte Matrixverfahren) 275.
 Kabe, D. G. s. M. E. Koshti 41.
 Kabir, P. s. G. Feinberg 207.
 Kac (Kats), G. I. (Generalized functions on locally compact groups) 333.
 Kačanov, L. M. (Plastische Biegung krummer dünnwandiger Rohre) 164.
 Kacprzyński, B. s. P. Szulkin 144.
 Kadyrov, S. (Bewegung eines Flügels mit Überschallgeschwindigkeit) 408.
 Kagan, A. M. s. S. Ch. Siradžinov 356.
 Kahane, Jean-Pierre (Exemple, donné par M. de Rham) 272; (Recouvrement d'un cercle) 358.
 — — et Walter Rudin (Fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes) 43.
 Kalaba, Robert s. Richard Bellman 453.
 Kalik, C. (Problème aux limites) 317.
 Källén, Gunnar (Électrodynamique quantique) 195.
 Kalman, G. (Nonlinear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma. I, II.) 213.
 Kämmerer, Wilhelm (Ziffernrechenautomaten) 105.
 Kampen, N. G. van (Decomposition of the operator $p^2 - q^2$) 60.
 Kan, Daniel M. (Adjoint functors) 389; (Functors involving c. s. s. complexes) 390.
 Kanazawa, Akira (Foldy transformation in the pion-hyperon system) 450.
 Kane, E. O. (Phonon broadening of impurity lines) 224.
 Kangro (Cangro), G. (Generalization of a theorem) due to Moore 275.
 Kanwal, R. P. (Magnetohydrodynamic flows) 424.
 Karapetjan (Karapetian), S. E. (Second order Lie surface) 381.
 Karasik, G. Ja. (Periodische Lösung bei Differenzengleichungen) 56.
 Karlikov, V. P. (Ausbreitung einer starken Explosion) 412.
 Karplus, Robert s. Geoffrey F. Chew 449.
 — Walter K. and Walter J. Soroka (Analog methods) 346.
 Kárteszi, F. (Elementargeometrisches Problem) 127.
 Kas'janjuk, S. (Brief an die Redaktion) 287.
 — — A. (Funktionen der Klassen A und \mathcal{H}_3 im Kreisring) 287.
 — — — s. L. E. Dundučenko 291.
 Kato, Tosio (Perturbation theory for quantities of linear operators) 90; (Perturbation of continuous spectra) 331.
 Katsura, S. and K. Harumi (Born-Green linearized integral equation) 230.
 Kaufman, C. s. E. Kazes 199.
 Kay, I. and R. A. Silverman (Uncertainty relation for real signals) 182.
 Kazarinoff, N. D. and R. K. Ritt (Scalar diffraction) 184.
 Kazes, E. (Meson production) 205.
 — — and C. Kaufman (Indefinite metric in the Lee model) 199.
 Keedy, M. L. (Theorem of Jónsson and Tarski) 250.
 Keldyš (Keldysh), L. V. (Non-metallic crystals in strong electric fields) 223.
 Keller, H. B., D. A. Levine and G. B. Whitham (Motion of a bore over a sloping beach) 433.
 — J. B. (Nonlinear wave equations) 318; (Solutions of $\Delta u = f(u)$) 318.
 — Joseph B. s. Willard L. Miranker 314.
 Kelly, R. E. and A. Russek (Diffraction of a plane electromagnetic wave) 441.
 Kemp, Nelson H. and Harry E. Petschek (Flow in the magnetic annular shock tube) 426.
 — R. R. D. and Norman Levinson ($u'' + (1 + \lambda g(x))u = 0$) 56.
 Kennedy, P. B. (Theorem of Hayman) 290.
 Kerimov, B. K. s. A. A. Sokolov 192.
 Kerimov, B. s. A. Sokolow 207.
 Khatri, C. G. (Power-series distributions) 356.
 Khayyam, Omar s. Omar Ibn Abraham Al-Khayyami 5.
 Kiefer, J. and J. Wolfowitz (Optimum designs in regression problems) 114.
 Kijko, L. A. (Pressung von gerippten Rotationsschalen) 395.
 Kilmister, C. W. and B. O. J. Tupper (Eddington's statistical theory. III.) 186.
 Kim, E. I. and L. P. Ivanova (Mixed boundary value problem) 77.
 Kimura, Tosihusa (Propriété d'Iversen) 302.
 Kirillov, A. A. (Unitary representations of nilpotent Lie groups) 98.
 Kitagawa, Tosio (Successive process of statistical inference) 364.
 Klamkin, Murray S. and Donald J. Newman (Reducibility of some linear differential operators) 58.
 Klarsfeld, S. (Équations de la mésodynamique classique) 200.
 Klebe, Joachim (Brezahländerungen eines optischen Systems) 442.
 Klein, A. s. B. W. Lee 200.
 Kleinfeld, Erwin (Rings of (γ, δ) type) 24; (Finite Hjelmslev planes) 371.
 Klemperer, W. B. (Satellite librations) 235.
 Kljušnikov (Kliushnikov), V. D. (Plasticity relations) 162; (Concepts in plasticity and deformation theory) 162.
 Kloek, T. and L. B. M. Mennes (Simultaneous equations estimation) 365.
 Klovov, Ju. A. (Randwertaufgabe für $\bar{x} + \bar{x}f(x, \bar{x}) + \varphi(x) = 0$) 304.

- Knops, R. J. (Linear thermo-elastic problems) 399.
- Knottnerus, U. J. (Approximation formulae for hypergeometric functions) 45.
- Koba, Ziro (Hypothetical velocity measurements of a Dirac particle) 447.
- Kobayakawa, Keizo s. Tsutomu Imamura 205.
- Kobayashi, Shoshichi (Complex contact manifolds) 385.
- Kober, H. (Arithmetic and geometric means and Hölder's inequality) 33.
- Kobrinskij, A. E. (Vibrations-dämpfung durch Stoß) 167.
- Kochen, Manfred (Circle networks of probabilistic transducers) 351.
- Kodaira, K. s. F. Hirzebruch 386.
- Koehler, J. S. and G. DeWit (Dislocation contribution to the elastic constants) 396.
- — — s. G. DeWit 396.
- Kogan, B. I. s. A. F. Chrustalev 153.
- M. N. (Plane flows of ideal gas in magnetic field) 425.
- Sh. M. s. V. L. Bonch-Bruevich 221.
- Kokoris, Louis A. (Nilstable algebras) 24; (Jordan algebras) 24.
- Kolberg, F. s. H. Cremer 68.
- Kolčín, N. I. (Differentielle Methode zur Untersuchung von Verzahnungen) 140.
- Kolettis jr., George (Semi-complete primary abelian groups) 246.
- Kolkunov, V. A., L. B. Okun' and A. P. Rudik (Singular points of Feynman diagrams) 193.
- Kolmogorov, A. N. (Representation of continuous functions of many variables) 271.
- — — und S. V. Fomin (Funktionentheorie, Funktionalanalysis. II.) 87.
- — — und V. M. Tichomirov (ε -Entropie und ε -Kapazität) 335.
- — — und V. A. Uspenskij (Definition des Algorithmus) 11.
- Koltunov, M. A. („Belastung-Durchbiegung“ für biegsame flache Schalen) 395.
- Koppe, Eberhard (Transsonische Kontroverse) 406.
- Koppelman, Walter (Riemann-Hilbert problem) 293.
- Körber, Hans-Günther s. Kurt R. Biermann 7.
- Kordylewski, J. and M. Kuczma (Functional equation) 99.
- Korezlioglu, Hayri (Quantité d'information mutuelle par unité de temps) 107; (Théorème de Pinsker) 350.
- Korjavov, P. P. s. É. P. Borisova 404.
- Korobejnikov (Korobeinikov), V. P. and N. S. Mel'nikov (Linearized problem on point explosion) 412.
- Korovkin, P. P. (Asymptotische Eigenschaft der positiven Summationsmethoden für Fourierreihen) 283.
- Korytnoja, L. A. s. W. J. Eckert 104.
- Koshi, Shôzô (Modulars on semi-ordered linear spaces. II.) 323; (Modulared linear space) 325.
- Koshti, M. E. and D. G. Kabe (Euler's constant and Euler limit) 41.
- Kosiński, A. (Problem of Steinhaus) 393.
- Kostjukov (Kostiukov), A. A. (Lifting force of source) 404; (Profil von Transversalwellen) 434.
- Kostrikin, A. I. (Burnsidesches Problem) 245.
- Kotljär, Ja. M. (Strömung eines zähen Gases) 416.
- Koval', P. I. (Solutions approximatifs des équations différentielles paraboliques) 313.
- Kovalenko, K. R. (Effects of friction on dynamic stability of bars) 151.
- Kraemer, Kurt (Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschriftumschlag) 419.
- Kramer, Clyde Young and Ralph Allan Bradley (Intrablock analysis) 359.
- Krasil'sčikova, E. A. (Bewegungen eines Flügels im kompressiblen Medium) 411.
- Krasner, Marc (Prolongement analytique dans les corps valués complets) 27.
- Krasnosel'skij (Krasnosel'skii), M. A. and P. E. Sobolevskij (Sobolevskii) (Fractional powers of operators) 91.
- Krasovskij, N. N. (Schnitt eines dispersiven dynamischen Systems) 61; (Beste Regelung in nichtlinearen Systemen) 69; (Optimum regula-
- tion of non-linear second order systems) 308.
- Kreisel, Georg (Hilbert's Programme) 10.
- Kreiss, Heinz-Otto (Matrizen, die beschränkte Halbgruppen erzeugen) 98.
- Krejer, G. P. and G. I. Tjurin (Eulersche Kugeln) 373.
- Krejn, M. G. s. I. S. Iochvidov 332.
- Krelle, Wilhelm und Hans Paul Künzi (Lineare Programmierung) 118.
- Kretzschmar, Martin (Gruppentheoretische Untersuchungen zum Schalenmodell. II.) 218.
- Kreyszig, Erwin and John Todd (Radius of univalence of error function) 50.
- Krivošeeva, S. G. s. K. N. Gopak 168.
- Kröner, E. (Kontinuumstheorie der Versetzungen) 176; (Quantenmechanisches Vielteilchenproblem) 192.
- Kroupa, F. s. I. Babuška 232.
- Krutova, I. N. s. N. S. Gorskaja 306.
- Krzywicka, E. (Differential equation $x^{(n)} + A(t)x = 0$) 302.
- Krzyżański, Mirosław (Allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier) 77.
- Kuczma, M. s. J. Kordylewski 99.
- Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Quadratic expansions of Legendre's associated functions) 44.
- Kulik, Stephen (Approximating the complex roots of equations) 339.
- Kuni, F. M. (Dispersion relation for nucleon-nucleon scattering) 204.
- Künzi, H. P. (Lineare Programmierung) 371.
- — — s. Wilhelm Krelle 118.
- Kuper, C. G. (Superconductivity) 454.
- Kurdin, N. S. (Durchbiegungen einer rechtwinkligen Membran) 155.
- Kurepa, G. (School mathematics) 3; (Principes de l'enseignement mathématique) 3; (Teaching of geometry in secondary schools. I.) 3.
- Svetozar (Cosine functional equation) 100.
- Kurita, Minoru (Umbilics of a closed surface) 379.

- Kuroda, Sigekatu (Logical structure of mathematics. V.) 10; (XIII) 10.
- Kuroš, A. G. (Direkte Zerlegungen in algebraischen Kategorien) 21.
- Kurth, Rudolf (Mechanics of the solar system) 234.
- Kurzweil (Kurevejl'), Jaroslav (Ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter) 300.
- and Zdeněk Vorel (Continuous dependence of solutions of differential equations on a parameter) 300.
- Kustaanheimo, Paul (Vector methods in spherical astronomy) 235.
- Kuttner, B. (Bounded bilinear forms) 38.
- Kuznecov (Kuznetsov), Ju. N. (Y. N.) (Struts of minimum weight) 397.
- (Kusnetsoff), L. I. (Motion equations in gyroscopic systems) 137.
- Kuzovkov, N. T. (Bewegung einer gyrostabilisierten Plattform) 137.
- Kvasnica, J. (Losses through Bremsstrahlung) 228.
- Lacroix, Roger s. Jérôme Sierro 234.
- Ladyženskaja (Ladyzhenskaia) O. A. (Boundary-value problem for Navier-Stokes equations) 415.
- Laha, R. G. (Distribution functions) 357.
- Laird, M. J. (Magneto-hydrostatics of stellar atmospheres. I.) 238; (III.) 238.
- Lajzerowicz, Janine et Joseph Lajzerowicz (Information et détermination des structures) 233.
- Joseph s. Janine Lajzerowicz 233.
- Lancaster, H. O. (Generation life tables for Australia) 116.
- Landahl, Marten T. (Unsteady flow around thin wings) 410.
- Lang, I. G. (Density matrix method for conductivity electrons interacting with lattice oscillations) 452.
- Langefors, Börje (Algebraic topology and networks) 393.
- Langer, J. S. (Impurity resistance in metals) 223.
- Lapeyre, Renée (Équation du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique) 185.
- Lapunov, A. A. und G. A. Szestopai (Lösung von Aufgaben an elektronischen Rechenmaschinen) 106.
- Larkin, A. I. s. A. A. Vedenov 225.
- Lašmanova, I. A. und V. V. Novožilov (Wölbkrafttorsion von Rohren) 155.
- Lasota, A. (Effet épidermique pour les inégalités différentielles ordinaires) 299.
- Läuchli, Peter (Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichsrechnung) 338.
- Laurent, Pierre-Jean s. Gilda Epfelbaum 348.
- Lauverier, H. A. s. D. J. Hof-sommer 240.
- Le Couteur, K. J. (Integral representation of a double commutator) 447.
- Leader, E. s. D. Amati 448.
- Lebedeva, L. P. (Method of approximation) 41.
- Ledermann, Sully (Dimensions de la mortalité) 116.
- W. s. H. K. Farahat 15.
- Lee, B. W. and A. Klein (Chew-Low formalism of multi-channel reactions) 200.
- Ke-chun (Kombinatorische invariante endliche Komplexe) 389.
- Lefschetz, Solomon (Coincidences of transformations) 389.
- Leger, G. F. (Derivations of Lie algebras. II.) 251.
- Lehman, R. Sherman and George H. Weiss (Restricted random walk) 349.
- Lehmer, Emma (Euler's criterion) 259.
- Lehnert, B. (Electromagnetic phenomena in cosmical physics) 236; (Plasma physics of cosmical and laboratory scale) 237.
- s. B. Bonnevier 227.
- Lehnigk, S. (Zeitliches Verhalten eines linearen Regelkreises) 308.
- Lehto, Olli (Differentiability of quasiconformal mappings) 53.
- and K. I. Virtanen (Quasiconformal mappings) 52.
- — — — and Jussi Väisälä (Distortion theory of quasiconformal mappings) 51.
- s. F. W. Gehring 53.
- Lemlejn (Lemlein), V. G. (Invariant differentiation in a fractional linear group) 386; (Local centro-projective spaces of a differentiable manifold) 387.
- Lenoir, Marcel (Théorie du champ unifié) 190.
- Leont'ev, N. N. s. V. Z. Vlasov 178.
- Lepechinski, Dimitri s. Térézio Consoli 212.
- Lepin, G. F. (Theorie des Kriechens und der Relaxation) 401.
- Leslie, F. M. (Free convection in tilted open thermosyphon) 417.
- P. H. (Variance in discrete-time stochastic models for biological systems) 115.
- Lester, Anne (Semigroups on the two-cell) 249.
- Le-Thanh-Phong (Vecteur de Poynting en relativité) 187; (Métriques de type II) 445.
- LeVeque, W. J. (Frequency of small fractional parts in real sequences. II, III.) 261.
- Levin, G. (Kippstabilität eines gabelgelagerten Balkens) 148.
- Levine, D. A. s. H. B. Keller 433.
- Jack (Applications of MacMahon diagrams) 242.
- Norman (Functions continuous almost everywhere) 270.
- Levinson, Norman s. R. R. D. Kemp 58.
- Leviton, B. M. (Adjoined operators of generalized translation) 330.
- Lévy, Jack (Théorie du champ unifié d'Einstein) 190.
- Li Dé-juan' (Li Der-yuan) (Uniqueness of Cauchy's problem for an equation of parabolic type) 75.
- Ting-Yi and Richard E. Geiger (Stagnation point of a blunt body in hypersonic flow) 414.
- Lianis, G. and H. Ford (Plastic yielding of single notched bars) 164.
- Lieblein, Julius (Analysis of variance scheme) 112.
- Lillo, James C. (Perturbations of nonlinear systems) 305.
- Lin', Cjun' (Kantorovičs Approximationsmethoden) 335.

- Lin, Wei-guan (Characteristic impedances of the slotted coaxial line) 182.
- Lingenberg, Rolf (Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen) 249.
- Linhart, H. (Discriminant analysis with discrete variables) 361.
- Linnik, Ju. V. (Yu. V.) („Determining statistics“) 357.
- Lions, Jacques-L. (Équations de Navier-Stokes) 82; (Équations différentielles à coefficients opérateurs non bornés) 99.
- Lipkin, Harry J. (Collective motion in many-particle systems. I.) 217.
- Littlewood, D. E. (Kronecker product of symmetric group representations) 248; (Plethysm and the inner product of S -functions) 248.
- J. E. (Corrections) 137.
- Litvin-Sedov, M. Z. (Dynamik des Kreisels mit zwei Freiheitsgraden) 137.
- Littman, Walter (Maximum principle for weakly L -subharmonic functions) 82.
- Ljapunov, A. A. und G. A. Sestopal (Algorithmische Beschreibung von Steuerungsprozessen) 106; (Lösung von Aufgaben an elektronischen Rechenmaschinen) 106.
- Ljubarskij, G. Ja. (Gruppentheorie und ihre Anwendung in der Physik) 250.
- — — und R. V. Polovin (Piston problem in magnetic hydrodynamics) 426.
- Ljubimov, G. A. (Kompression eines Gaszylinders durch Strom) 405.
- (Ljubimov), G. P. und R. V. Chochlov (Khoklov) (Polarization of a beam of molecules) 231.
- Ljusternik, L. A. (Werte von Funktionen einer Variablen) 102.
- — — und W. I. Sobolew (Elemente der Funktionalanalysis) 323.
- Loewner, Charles (Transformation semigroups) 372.
- Löffler, Eugen (Mathematikunterricht) 2.
- Logunov, A. A., B. M. Stepanov und A. N. Tavcheldize (Tavcheldize) (Bound states in photoproduction) 205.
- Lojcanskij, L. G. (Mechanik der Flüssigkeiten und der Gase) 402.
- London, Howard S. (Equations of motion of a solar sail) 235.
- Look, K. H. s. L. K. Hua 295.
- Łopuszański, Jan (Feynman's "integral-over-all-paths" method) 448.
- Lorch, Lee (Extremal problem in Fourier series) 43.
- Loudon, R. s. R. J. Elliott 222.
- Low, William (Paramagnetic resonance in solids) 233.
- Lü, Bao-wei (Forward-scatter propagation of ultra-short radio waves) 182.
- Ludwig, Hubert (Strömung in einem zylindrischen Ringraum) 420.
- Lundgren, T. S. s. C. C. Chang 426.
- Lurié, D. (Pauli group) 193.
- Lykoudis, Paul S. (Compressible laminar boundary layers) 427.
- Lynds, Beverly s. Otto Struve 234.
- Lyra, C. B. de (Homotopy type of a factor space) 130.
- Ma, S. T. (Causality in quantum field theory) 447.
- MacDonald, W. M. s. R. C. Wentworth 182.
- Machida, Shigeru s. Shigeo Goto 204.
- Machol, R. E. (Information and decision processes) 107.
- Macintyre, Sheila Scott (μ -transforms and interpolation series) 285.
- Mack, C. (Efficiency of n machines) 353.
- — —, T. Murphy und N. L. Webb (Efficiency of n machines) 353.
- MacKay, John H. (Asymptotically efficient tests) 113.
- Mackie, A. G. und D. G. Weir (Propagation of shock waves) 411.
- Madansky, Albert (Expectation of a convex function) 112; (Determinantal methods in latent class analysis) 367.
- Madejski, Jan (Work hardening, elastic after-effect and residual stresses) 164.
- Magalinskij (Magalinskii), V. B. (Angular momentum and parity conservation laws) 206.
- Magnus, Kurt (Neuere Ergebnisse der Regelungstheorie) 67.
- Makaeva, G. S. (Asymptotic behaviour of solutions to differential equations) 62.
- Makarevič, O. P. s. V. I. Mossakovskij 172.
- Malinovskij, B. N. s. W. J. Eckert 104.
- Maliński (Malinsky), K. K. (Second variation of the multiple integral) 83.
- Malyšev, B. M. (Plastisches Fließen) 401.
- Maradudin, A. A. s. B. S. Courary 224.
- Maravall Casesnoves, Dario (Brownsche Bewegung und stochastische Schwingungen) 109.
- Marčevskij, M. N. (Zahlen-theorie) 30.
- Marchašov, L. M. (Bewegung eines Kreisels mit kardanischer Aufhängung) 138.
- Marciniak, Zdzisław (States of stress and strain) 148.
- Marcus, S. (Théorème de G. Szekeres) 37; (Fonctions intégrables Riemann) 269; (Théorème de M. S. Stoilow) 273.
- Solomon (Théorie du type Lebesgue) 268.
- Markman, V. V. (Singuläre Lösungen einer gestörten linearen Integralgleichung) 321.
- Markov, A. (Problems in topology) 12.
- Martin, A. (Analytic properties of $l \neq 0$ partial wave amplitudes) 192.
- — — s. M. Gourdin 449.
- Martindale III, Wallace S. (Commutativity of a special class of rings) 26.
- Masterson, Kleber S. (Compilation for two computers with NELIAC) 346.
- Masuda, Katsuhiko (Subgroup of the idèle group) 30.
- Mateescu, Cristea (Répartition des vitesses dans le mouvement uniforme des fluides visqueux) 416.
- Mathur, V. Swarup (Equation of state of elements from the relativistic Thomas-Fermi theory) 229.
- Matjuchin, V. M. (Statische Stabilität der Elektroübertragung) 71.
- Matlis, Eben (Applications of duality) 25; (Injective modules over Prüfer rings) 253.

- Matschinski, Matthias (Polytopes réguliers des séries du cube) 373; (Classification des polytopes saturés) 373; (Géométrie sur la surface d'un polyèdre) 374; (Polytopes saturés) 374; (Géométrie combinatoire) 374.
- Matthews, P. T. and A. Salam (Inelastic scattering of elementary particles) 205.
- Matthies, K. and D. Mazkewitsch (Developments of $\sin^2 x$ into Fourier series) 284.
- Mattis, D. C. (Steady-state distribution function in dilute electron gases) 223.
- — — s. F. S. Ham 223.
- Matveenko, T. I. (Instationäre Filtration in einer und in zwei Schichten) 439.
- Matyeyn (Matytsin), V. D. and V. A. Rjapolov (Rjapolov) (Integral-square estimate) 71.
- Maurer-Tison, F. (Théorie unitaire du champ d'Einstein) 189.
- Maxfield, John E. (Real zeros of certain polynomials) 340.
- Mayer (Majer), M. É. and D. V. Širkov (Širkov) (Thirring's two-dimensional model) 200.
- Mayer-Kalkschmidt, J. (Conditional inclusion of matrix methods) 276.
- Maz'ja (Mazia), V. G. (Dirichlet's problem for an equation of the elliptic type) 79.
- Mazkewitsch, D. s. K. Matthies 284.
- McCarthy, P. J. (Disconjugacy of second-order linear differential equations) 60; (Probability that $(n, f(n))$ is r -free) 260.
- McDougle, Paul (Mapping and space relations) 388.
- McKinley, R. M. s. M. M. Stanišić 399.
- McKnight, J. D. s. R. W. Bagley 272.
- McLachlan jr., Dan (Description mechanics) 351.
- Meder, J. (Euler-Knopp's and Cesàro's summability methods) 42.
- Medvedev, B. V. and K. M. Polivanov (Spectral condition as a method of renormalization) 200.
- Meffroy, Jean (Élimination du terme séculaire pur) 137.
- Meier, Kurt (Regularität einer komplexen Funktion) 47.
- Meijer, Paul H. E. and Julius I. Bowen (Steady state distribution in non-equilibrium processes) 210.
- Meister, Hans Joachim s. Vladimir Fock 442.
- Meligy, A. S. (Expansions of Whittaker's function) 45.
- Mel'nikova, N. S. s. V. P. Korobejnikov 412.
- Melzak, Z. A. (Power series representing rational functions) 32; (Star-shaped bodies) 128.
- Mennes, L. B. M. s. T. Kloek 365.
- Mentel, T. J. s. P. S. Symonds 166.
- Merkes, E. P. (Typically-real functions in a cut plane) 291.
- Mertens, R. and J. Neureiter (Fahrstuhlverteilungen) 352.
- Robert ("Method of parts" for the diffraction of light) 185.
- Mešalkin (Meshalkin), L. D. (Limit theorems for Markov chains) 355.
- Metelieyn, I. I. (Prinzip des kleinsten Zwangs) 172.
- Metzger, R. W. (Elementary mathematical programming) 371.
- Meulenbeld, B. (Quadratic transformations of Legendre's associated functions) 44.
- — — s. L. Kuipers 44.
- Meyer, Ludwig (Singularitätentheorie der Flügelgitter) 428.
- zur Capellen, W. (Übersetzungen in Kurbeltrieben) 146; (Nomogramme zur geneigten Sinuslinie) 346.
- Michel, L. (Covariant description of polarization) 197.
- P.-H. (Nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne) 5.
- Mickey, Ray (Distribution functions of roots of normal determinantal equations) 111.
- Mieghem, Jacques van (Principe variationnel de la mécanique de l'atmosphère) 239.
- Mihailović, D. (Vektoranalysis, Differentialgeometrie und Feldtheorie) 377.
- Mihalek, R. J. (Modularity relations in lattices) 23.
- Mikeladze, M. Š. (Anisotrope starr-plastische Schalen) 165.
- Miklowitz, Julius (Plane-stress unloading waves) 180.
- Mikolajska, Z. (Racines de nombres positifs) 102.
- Mil'čenko, T. I. s. L. A. Zak 346.
- Milechin (Milekhin), G. A. (Hydrodynamic theory of multiple production of particles) 205.
- Miles, John W. (Generation of surface waves by shear flows. III.) 421.
- R. E. (Complete amalgamation into blocks) 360.
- Miller jr., Robert C. (Foci of the conics on a cone) 121.
- Milliat, Jean-Pierre (Écoulement turbulent) 423.
- Milne-Thomson, L. M. (Plane elastic systems) 174.
- Milner, S. R. (Classical field theory of matter and electricity. I.) 181.
- Milnes, Harold W. and Renfrey B. Potts (Numerical solution of partial differential equations) 342.
- Miltzlaff, Gerhard (Integral einer nichtlinearen Differentialgleichung) 73.
- Minorsky, Nicolas (Théorie des oscillations) 63.
- Miqueo, Jose Javier Etayo s. Etayo Miqueo, Jose Javier 375.
- Miranker, Willard L. and Joseph B. Keller (Stefan problem for a nonlinear equation) 314.
- Mirkil, H. (Work of Silov) 93.
- Mirsky, L. (Existence theorem in matrix theory) 15.
- Mišchenko, E. F. und L. S. Pontrjagin (Asymptotische Abschätzungen für Lösungen von Differentialgleichungen) 61; (Statistical problem on optimal control) 308.
- Mishra, R. S. (Einstein's connections) 445.
- Misner, C. W. s. R. Arnowitt 443.
- Charles W. (Wormhole initial conditions) 442.
- Mitchell, Josephine (Linear partial differential equations in three variables) 315.
- Mitjagin (Mitiagin), B. S. (Second mixed derivative) 273.
- Mitropol'skij, Ju. A. (Nicht-lineare Schwingungen) 64.

- Mitrović, Dragiša (Inégalités de Turán) 286.
- Mitterlehner, G. (Einfluß der Kraftwagenfederung auf die Lenkstabilität) 135.
- Mizohata, Sigeru (Problème de Cauchy) 314.
- Mizuno, Hirobumi (Correspondances algébriques) 375.
- Mlak, W. (Differential inequalities in linear spaces) 334.
- Möbius, P. (Many-particle variables for many-body problems) 216.
- Mode, C. J. and H. F. Robinson (Pleiotropism) 369.
- Moffat, John W. (Vacuum expectation values in quantum field theory) 201.
- Mohr, E. (Produktentwicklung des Sinus) 46.
- Moiseyev, N. N. s. É. P. Borisova 404.
- — — s. Ju. P. Ivanilov 293.
- Molokovič, Ju. M. (Näherungsmethode der Lösung von linearen Integralgleichungen) 320.
- Molotkov, I. A. (J. A.) (Longitudinal impact of thin bars) 401.
- Moodie, A. F. s. J. M. Cowley 183, 184.
- Moran, P. A. P. (Survival of a mutant gene under selection) 116.
- Moranda, P. B. (Comparison of estimates of circular probable error) 364.
- Moravcsik, Michael J. (Non-relativistic theories of pion photoproduction) 205.
- — — s. Paul Ehrenfest 451.
- Mori, Mitsuya (Kummersche Erweiterungen) 30; (Klassenkörpertheorie für unendliche Erweiterungen) 257.
- Morice, P. B. (Linear structural analysis) 140.
- Morimoto, Akihiko (Espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe) 385.
- Morita, Tohru (Equation of state of high temperature plasma) 224.
- Moriya, Mikao (Galoissche Theorie der Schiefkörper) 254.
- Morland, L. W. s. A. D. Cox 163.
- Morozov, M. G. (Akustische Ausstrahlung von Hohlräumen) 436.
- Morrey jr., Charles B. (Analytic embedding of abstract real-analytic manifolds) 384.
- Mossakovskij, V. I., O. P. Makarevič und Z. Z. Rudjakov (Abhängigkeit des Adhäsionskoeffizienten von der Rollgeschwindigkeit) 172.
- Motzkin, T. S. s. Oystein Ore 133.
- Moulton, J. F. s. George Boole 297.
- Movčan (Movchan), A. A. (Method of Liapunov in stability problems) 313.
- Mróz, Zenon s. Waclaw Olszak 400.
- Müller, Gottfried (Näherungsberechnungen mittels Formzahlen) 103.
- Hans Robert (Kinematik ebener affin-veränderlicher Felder) 378.
- Heinrich (Elektronische digitale Rechenmaschine) 346.
- K.-H. (Spannungen in anisotropen kreiszylindrischen Rohren) 179.
- Multhopp, Hans s. Ingeborg Ginzl 409.
- Murphy, T. s. C. Mack 353.
- Musiak, J. s. Z. Ciesielski 281.
- Muto, Toshinosuke (Exciton problem) 224.
- Nachtergaele, Jean M. (Enseignement des mathématiques en humanités) 2.
- Nádeník, Zbyněk (Projektive Differentialinvarianten einer ebenen Kurvenschar) 124.
- Naftalevič, A. G. (System von Differenzengleichungen) 297.
- Nagahara, Takasi and Hisao Tominaga (Galois extensions of division rings) 25.
- Nagamatsu, H. T., R. E. Geiger and R. E. Sheer jr. (Real gas effects in flow over blunt bodies at hypersonic speeds) 414.
- Naghdi, P. M. s. C. Nevin De Silva 155.
- Nagler, H. (Amphisbaenic sorting) 107.
- Nagy, K. L. (Dipole ghost contributions to propagators) 447.
- Naito, T. (Problem of Wolk) 24.
- Nakagawa, Yoshinari (Heat transport by convection) 418.
- Nakai, Mitsuru (Function algebra on Riemann surfaces) 292.
- Nakanishi, Noboru (Clothed unstable particles. II.) 207.
- Nakaoka, Minoru (Homology groups of symmetric groups) 390.
- Nanjundiah, T. S. (Formula of A. C. Dixon) 13.
- Narain, Roop (Laplace transform. IV.) 86.
- Nariai, Hidekazu (Cosmic turbulence. I, II.) 237.
- Narimanov, G. S. (Schwingungen einer Flüssigkeit) 432.
- Neal, B. C. s. G. Davies 150.
- Nehari, Zeev (Derivative of an analytic function) 47.
- Nemčinov, I. V. (Dissoziation und Ionisation der Luft) 415.
- Németh, G. s. B. Fogarassy 231.
- Németi, Ladislau (Analyse mathématique dans la planification socialiste) 370.
- Nestor, O. H. and H. N. Olsen (Reducing line and surface probe data) 345.
- Neugebauer, O. (Astronomical tables P. Lond. 1278) 5.
- Neumann, B. H. (Embedding theorems for semigroups) 17.
- Neureiter, J. s. R. Mertens 352.
- Nevin De Silva, C. and P. M. Naghdi (Elastic shells of revolution) 155.
- Nevzgljadov (Nevzglyadov), V. G. (Flow past solid bodies) 422.
- Newell, Gordon F. (Capacity of a traffic intersection) 351.
- Newman, Donald J. (Radical algebra without derivations) 328.
- — — s. Murray S. Klamkin 58.
- Morris (Modular forms) 55.
- P. (Theorem of Urbanik) 267.
- Newton, Roger G. (Radial wave functions) 193.
- Nicolas, Marie Marcel (Géométrie de la chaineite ou hypergéométrie) 122.
- Nijenhuis, Albert s. Alfred Frölicher 387.
- Nikaidō, Hukukane and Hirofumi Uzawa (Walrasian tâtonnement process) 370.
- Nikitin, B. D. (Unendliches System nichtlinearer Integralgleichungen) 321.
- Nikolaeva, T. M. (Algorithm of independent grammatical analysis of the russian language) 367.
- Nikolaevskij, V. N. (Problem der Filtration) 438.

- Nitsche, Johannes C. C. (Con-
stant of E. Heinz) 54; (Har-
monic mappings) 294.
- Nolte, Sidney D. (Application
of generalized means) 274.
- Norkin, S. B. (Lineare homo-
gene Differentialgleichung)
57.
- Norman, R. Z. s. Frank Harary
393.
- Noshiro, Kiyoshi (Cluster sets)
288.
- Novikov, P. S. (Elemente der
mathematischen Logik) 8.
- Novoselov, V. S. (Unilinear un-
holonomous connection) 137;
(Motion of gyroscopic sys-
tems) 138.
- Novožilov, V. V. s. I. A. Laš-
manova 155.
- Nowacki, Witold (Distortion
problem) 159.
- Nowiński, Jerzy (Problems of
orthotropic plates) 156.
- Nozaki, Yasuo (Frostman's
lemma) 316.
- Nožička, František (Kurve im
affinen Raume) 124; (Total
geodätische Hyperflächen. I,
II.) 125.
- Numakura, Katsumi (Wedder-
burn decompositions of com-
pact rings) 28.
- Nunziante-Cesàro, Carlo (Coni
di minima superficie laterale)
374.
- Ohme, R. (Structure singu-
larities of electromagnetic
form factors) 201.
- s. H. J. Bremermann 196.
- Ogieveckij (Ogievetsky), I. I.
(Summability of series by
Borel's method of fractional
order) 39; (Summierung von
Doppelreihen) 278.
- Oğuztöreli, M. Namik (Fon-
ctions algébroides) 289;
(Fonctions méromorphes)
290.
- Ohe, Seizo (Application of ma-
thematical group concept to
human perceptual systems)
2.
- O'Keefe, Kathleen B. (Differen-
tial ideal (y^p)) 254.
- Okulova, J. P. s. W. J. Eckert
104.
- Okun', L. B. s. V. A. Kolku-
nov 193.
- Okurio, Arthur F. s. Constan-
tine C. Pappas 423.
- Olech, C. et Z. Opial (Inégalité
différentielle) 299.
- Olesiak, Zbigniew (Closed cy-
lindrical shells) 398.
- Olevskij (Olevskii), A. M. (Un-
conditioned summability of
functional series) 280.
- Olkin, I. s. K. A. Bush 366.
- Olsen, H. N. s. O. H. Nestor
345.
- Olśzak (Olśak), W. (V.) (In-
homogene elastoplastische
Medien) 161.
- Wacław and Zenon Mróz
(Elastic-plastic solution to
boundary value problem for
eccentric ring) 400.
- — and S. Zahorski (Non-
homogeneous orthotropic cir-
cular segment) 161.
- Olver, F. W. J. (Asymptotic
expansions for Weber para-
bolic cylinder) 46.
- Omar Ibn Abraham Al-Khayya-
mi (Omar Khayyam) (Diffi-
culties in Euclid) 5.
- Onat, E. T. (Analysis of shells
of revolution) 156.
- Onicescu, O. (Mécanique du
point matériel) 180.
- Onišchenko (Onishchenko), V. I.
(Mixed axisymmetrical prob-
lem of the theory of poten-
tial) 315.
- Oniščik (Onishchik), A. L.
(Complex hulls of compact
homogeneous spaces) 94.
- Opat, Geoffrey I. (Electric
dipole sum rule) 191.
- Opial, Z. (Presque-périodicité
et trajectoires sur le tore)
61; (Équation différentielle
non linéaire) 66.
- s. C. Olech 299.
- Ore, Oystein (Directed graphs.
III.) 132.
- — and T. S. Motzkin (Sub-
sets and subgraphs) 133.
- Osadnik, Lucie (Mathemati-
sche Methoden für Volkswirt-
schaftsplanung) 117.
- Ostrowski, A. (Differential- und
Integralrechnung. 1.) 33.
- M. (Rayleigh quotient
iteration. V, VI.) 339.
- Oules, H. (Sousprogrammes,
programmes de simulation,
compilateur) 346.
- Owens, O. G. (Everywhere reg-
ular solution of the reduced
wave equation) 317.
- Özkan, Asim (W-(Weingarten)-
Flächen) 123.
- Pacholczyk, A. G. and J. S.
Stodółkiewicz (Magnetogra-
vitational instability of a
medium) 237; (Magnetogra-
vitational instability of an in-
finite homogeneous medium)
238; (Magnetogravitational
instability of the medium of
finite electrical conductivity)
452.
- Pakshirajan, R. P. (Maximum
partial sums of sequences of
independent random vari-
ables) 110.
- Panchev, Stoitcho (Théorie
statistique de la turbulence)
421.
- Papadopoulos, V. M. (Wave
propagation in a coaxial
system) 182; (Line source on
an interface between two
media) 435.
- Papapetrou, A. (Gravitations-
und elektromagnetische Fel-
der) 443; (Zeitabhängige
Lösungen der Feldgleichun-
gen) 443.
- Papp, Zoltán (Algebraically
closed modules) 24.
- Pappas, Constantine C. and
Arthur F. Okuno (Measure-
ments of skin friction) 423.
- Parameswaran, M. R. (Theo-
rem of Mazur and Orlicz in
summability) 276; (Tau-
berian theorems for Nörlund
summability) 276; (Cesàro
and Borel methods of summa-
bility) 277; (Two tauberian
theorems) 322.
- Parchomovskij (Parkhomov-
skii), S. I. (Virtual masses of
some curvilinear contours)
404.
- Parkus, H. (K. Federhofer) 8.
- Parmenter, R. H. (High-cur-
rent superconductivity) 455;
(Superconducting contacts)
455.
- Parodi, Maurice (Formation de
matrices stochastiques) 241.
- Pati, T. (Absolute Cesàro sum-
mability of Fourier series of
functions of Lebesgue class
 L^p) 282; (Absolute Nörlund
summability of a Fourier
series) 282.
- Patralea, N. N. et L. Dumitrescu
(Profils à jet en cou-
rant limité) 403.
- Pauli, W. and B. Touschek
(Comment on Gürsey's
"Group structure of ele-
mentary particles") 197.
- Pavlov, A. A. (Optimum tran-
sient processes) 308.
- Pawlik, K. (Maximaler Kon-
tingenzkoeffizient) 367.
- Peck, J. E. L. (Doubly stocha-
stic measures) 268.
- Pelczyński, A. s. C. Bessaga
327.

- Pelczynski, T. (Mohrsche Spannungshypothese) 163.
- Pelegrin, M. s. J. C. Gille 67.
- Pellegrino, Franco (L. Fantappiè) 8.
- Penrose, Oliver (Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma) 228.
- Pereira Gomes, A. (Elemente der linearen und multilinearen Algebra. I.) 13.
- Peres, Asher and Nathan Rosen (Gravitational radiation damping of nongravitational motion) 444.
- Peretti, Jean (Frequency spectra of crystal lattices) 231.
- Pearlman, H. S. (*K* ionization by electrons) 230.
- Pernet, Roger (Extension du groupe conforme) 122.
- Perron, Oskar (Irrationalzahlen) 32.
- Perry, R. L. (Univalent functions) 50.
- Pestmaldžjan, D. V. (Symmetrisch belastete Schichten) 156.
- Petelin, D. P. (Auto-oscillations in the automatic control system for a synchronous motor) 139.
- Peters, A. S. and J. J. Stoker (Solitary waves in liquids) 433.
- Petre, A. (Aeroelastic divergence of lifting surfaces in rotation) 431.
- Petrina, D. Ja. (D. Y.) (Dispersion relations in the diffraction problem) 183.
- Petschek, Harry E. s. Nelson H. Kemp 426.
- Pham Mau Quan (Dynamique analytique du point en relativité restreinte) 180.
- Phillips, O. M. (Centrifugal waves) 432.
- Phister jr., Montgomery (Logical design of digital computers) 106.
- Piccard, Sophie (Groupes quasi libres) 17.
- Picone, Mauro (Classico problema di calcolo delle variazioni) 319.
- Pien, Yen-kwei (Tricomi's equation for a transonic jet) 407.
- Pierce, R. S. s. R. A. Beaumont 25.
- Pilatovskij (Pilatovsky), V. P. (Propagation of fluctuations along the boundary of separation) 439.
- Pillans, Helen s. Otto Struve 234.
- Pincherle, L. (Band structure calculations in solids) 221.
- Pirani, F. A. E. (Gravitational waves in general relativity. IV.) 187.
- Pistoia, A. (Dirichlet transforms) 369.
- Piszczek, Kazimierz (Influence of curvature of a curved bar on resonance regions) 169.
- Pitcher, T. S. (Positivity in H-systems and sufficient statistics) 360.
- Plainevaux, J. E. (Intégration graphique des équations différentielles) 341.
- Pócsik, G. (Meson-fermion PV-interaction in the Thirring model) 448.
- Pogorelov, A. V. (Grundlagen der Geometrie) 119.
- Pogorelov, A. W. (Riemannsche Geometrie im Großen) 125.
- Polášek, Jan (Potentialströmung für Spalt-Schaufelgitter) 429.
- Poletaev, I. A. s. J. D. Williams 118.
- Polivanov, M. K. s. B. V. Medvedev 200.
- Poljusuk (Poliusuk), Ju. A. (J. A.) (Anamorphose von Funktionen) 104.
- Pollák, G. (Typen euklidischer Normen) 29.
- Polovin, R. V. s. G. Ja. Ljubarskij 426.
- Pommerenke, Chr. (Problems by Erdős, Herzog and Piranian) 16.
- Pommiez, Michel (Zéros des restes successifs des séries d-Taylor) 47; (Restes successifs des séries de Taylor) 47.
- Pontrjagin, L. S. s. E. F. Miščenko 61, 308.
- Poole, E. G. C. (Linear differential equations) 302.
- Popov, E. P. (Automatische Regelung) 305; (Höhere harmonische unsymmetrische Eigenschwingungen) 345.
- Popović (Popovič), C. P. (K. P.) (Ringe ganzer Dirichletscher Zahlen) 29.
- Popp, Simona (Problème du bilame symétrique) 405.
- Popruzenko, J. (Représentations des fonctions d'ensemble à variation bornée. II.) 267.
- Porath, Günter (Störungstheorie der isolierten Eigenwerte für Transformationen) 330.
- Porcelli, Pasquale (Embedding theorems) 327.
- Portmann, Walter O. (Hausdorff-analytic functions of matrices) 14; (Primary matrix function) 14.
- Postnikov, A. G. (Test for uniformly distributed sequence) 355.
- Potapov, V. P. (*J*-contractive matrix functions) 54.
- Potts, Renfrey B. s. Harold W. Milnes 342.
- Pouzet, Pierre (Intégration numérique de l'équation intégrale de Volterra) 345.
- Povinelli, Louis A. (Turbulent flame propagation) 424.
- Power, G. (Extremum methods for electrical problems) 440.
- Poznjak, É. L. (Wellen jenseits der kritischen Rotationsgeschwindigkeiten) 169.
- Präger, Milan (Konvergenzprinzip im Hilbertschen Raum) 89.
- Prange, Richard E. (Moment of inertia of large superfluid fermion systems) 455.
- Pratt, John W. (Interchanging limits and integrals) 268.
- Present, R. D. s. W. D. Foland 219.
- Preston, G. B. (Embedding any semi-group in a *D*-simple semigroup) 243.
- Primakoff, H. s. N. Bernardes 221.
- Prior, L. E. s. H. G. Green 376.
- Proceedings of the international congress on many-particle problems) 216.
- Procopovici, Eudoxiu s. Anibal Zaharescu 107.
- Prokof'ev, V. A. (Fortpflanzung kleiner Störungen) 420.
- Proksa, F. (Plastisches Blechbiegen) 165.
- Prosperi, G. M. and A. Scotti (Ergodic theorem in quantum mechanics) 209.
- Prouse, Giovanni (Problema misto per le equazioni iperboliche) 73.
- Puppi, G. (Dispersion relations of pion-nucleon scattering) 197.
- Pütter, Paul Stefan (Maximalisierungsverfahren) 337.

- Rabinovič, A. L. (Torsion eines Elementes eines Kreises) 152.
- Rabotnov, Ju. N. (Elastoplastischer Zustand einer rotierenden Scheibe) 161; (Instationäres Kriechen) 165.
- Racah, G. (WEIZAC in theoretical spectroscopy) 230.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 113.
- Rajagopal, A. K. (Ballabh's paper) 315.
- Rakovšič, Ju. A. (Statisch unbestimmte Stabsysteme) 162.
- Ramakrishnan, Alladi. N. R. Ranganathan and S. K. Srinivasan (Meson production in nucleon-nucleon collisions) 206.
- Ranganathan, N. R. s. Alladi Ramakrishnan 206.
- Rao, C. Radhakrishna (Expected values of mean squares) 113.
- — V. Joga (Long rectangular plates) 156.
- P. V. (Construction of incomplete block designs) 359.
- Rasulov, M. L. (Randwertaufgaben und gemischte Aufgaben für Differentialgleichungen. I.) 310.
- Raymond, François H. (Systèmes de traitement d'information avec des bandes magnétiques) 107.
- Rayner, F. J. (Hensel's lemma) 254.
- Rayski, J. (Electrodynamics and baryon theory) 445; (Six-dimensional interpretation of nuclear forces) 446; (Six-dimensional riemannian manifold) 446; (Screw model of particles in iso-space) 450.
- Razumova-Sretenskaja, V. N. (Bewegungen des Gases in einem Kohlenflöz) 438.
- Recoque, Alice et Françoise Becquet (CAB 500 petite calculatrice) 106.
- Rédei, L. und P. Turán (Algebraische Gleichungen über endlichen Körpern) 258.
- Reissig, R. (Stabiles Verhalten bei periodischer Erregung) 61.
- Reissner, Eric (Influence coefficients and nonlinearity for thin shells) 157; (Stresses and displacements for deformations of shells) 157.
- Remizova, M. P. (Regions of values of analytical functions) 47.
- Résibois, P. (Theorie formelle du scattering classique) 209.
- Ribenboim, P. (Constructions de groupes réticulés) 247.
- Rickayzen, G. s. J. Bardeen 454.
- Riddell, W. C. (Ballistic lunar impact trajectories) 145.
- Ridder, J. (Abstraktes Integral. I—III.) 34.
- Riedler, Willi s. Stefan Vajda 118.
- Riegels, Friedrich W. (Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter) 429.
- Rietdijk, J. A. s. L. J. F. Broer 410.
- Rimskij-Korsakov, B. S. (Verallgemeinerte Gammafunktionen) 46.
- Rindler, W. (Schrödinger's model of de Sitter space) 444.
- Ripianu, Andrei (Vibrations transversales des cordes) 401.
- Ritchie, R. W. (Noncommutative Jordan algebras) 251.
- Ritt, R. K. s. N. D. Kazarinoff 184.
- Rivkind, Ja. I. (Approximation von Funktionen) 41.
- Rizza, G. B. (Disuguaglianze per i numeri di Betti) 385; (Curvatura delle faccette di una varietà kähleriana) 385.
- Rjaplov, V. A. s. V. D. Matyčin 71.
- Rjazancev (Riazantsev), Ju. S. (Ju. S.) (Propagation of weak waves in a continuous medium) 435.
- Robertson, A. P. (Rearrangements of infinite series) 39.
- Robinson, H. F. s. C. J. Mode 369.
- Rodberg, Leonard S. (Optical model and inelastic scattering) 219.
- Rodnjanskij (Rodnyanskij), A. M. (Differentiable mappings and the order of connectivity) 129.
- Rogers, C. A. and S. J. Taylor (Analysis of additive set functions in Euclidean space) 266.
- Rolewicz, S. s. C. Bessaga 327.
- Romain, Jacques (Invariants différentiels d'un champ maxwellien) 440.
- Roman, P. (Scalar representation of electromagnetic fields. III.) 216.
- Romanov, M. I. (Aperiodicity of linear systems) 242.
- Romanovskij, P. I. und A. V. Vorob'ev (Beschränktheitsbedingungen für halbadditive Funktionen) 265.
- Rooyen, G. T. van and W. A. Backofen (Interface stress in plane strain) 157.
- Rosen, Nathan s. Asher Peres 444.
- Ronald H. (Tree-like continua and irreducibility) 389.
- Rosenblatt, M. (Multidimensional prediction problem) 350.
- Rosenblum, Marvin (Hilbert matrix. II.) 92.
- Ross, Kenneth A. (Extending semicharacters on semigroups) 17.
- Rossier, Paul (Équation différentielle de la ligne élastique d'une poutre) 149.
- Rósa (Roža), P. (Matrizen in der Mechanik korpuskularer Systeme) 136.
- Rothe, Alexander (Baustatische Theorie statisch unbestimmter Stabtragwerke) 180.
- E. H. (Gradient mappings) 92; (Applications of functional analysis to the calculus of variations) 320.
- Rother, H. (Diffusionswellen. II.) 212.
- Rotkiewicz, A. (Nombres composés n qui divisent $a^{n-1} - b^{n-1}$) 258.
- Roulleau, Jean s. Antonio Gião 239.
- Roy, Durga (Resistance on a circular cylinder) 415.
- P. K. (K-meson-nucleon scattering) 204.
- Royden, H. L. (Rings of meromorphic functions) 49.
- Rozenberg (Rosenberg), D. B. and L. A. Bezpal'ko (Bespalko) (Concentration of stresses in a spherical bottom) 157.
- Rozenbljum, V. I. (Temperaturspannungen im Turbinenrotor beim Anlassen) 160; (T-förmiger Schwanz einer Turbinenschaufel) 165.
- Rozovskij, M. I. (Nichtlineare Integraloperator-Gleichungen des Kriechens) 163.
- R.-Salinas, Baltasar (Stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale) 60.

- Rubin, Herman and Oscar Wesler (Convexity in Euclidean n -space) 127.
- Rudaev, A. K. (Aufgabensammlung über darstellende Geometrie) 133.
- Rudik, A. P. s. V. A. Kolkunov 193.
- Rudin, Walter s. Jean-Pierre Kahane 43.
- Rudjakov, Z. Z. s. V. I. Mossakovskij 172.
- Ruijgrok, Th. W. (Modèle exactement renormalisable de champs quantifiés) 196.
- Russek, A. s. R. E. Kelly 441.
- Rutickij, Ja. B. (Klasse von Banachschen Räumen) 327.
- Rutishauser, Heinz (Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen) 340.
- Rutkovskij, V. Ju. s. N. S. Gorskaja 306.
- Ruibel, Ch. V. (Kh. V.) (Criterion of control inaccuracy) 307.
- Rybarski, A. (Variationsprinzipien der Gleichungen einer Synchronmaschine) 440.
- Rychlík, Karel (Manuscript de Cauchy) 7.
- Ryžkov, V. V. (Affine tangentielle Verbiegung von Flächen) 381.
- Ryžov (Ryzhov), O. S. and S. A. Christianović (Kristianovich) (Nonlinear reflection of weak shock waves) 412.
- Sacerdote, Ugo (Forze agenti su di un corpo aerodinamico) 405.
- Sacharov, I. E. (Erzwungene Schwingungen der Statoren elektrischer Wechselstrommaschinen) 167.
- Safonova, E. V. (Hauptmoment der Kräfte, die auf einen Kugelkreisel seitens des Stators wirken) 138.
- Sagdeev, R. Z. (Containment of a plasma by the pressure of an electromagnetic wave) 226.
- Sakaguchi, Minoru (Statistical applications of information theory. IV.) 354.
- Sakuma, Motoyoshi (Multiplicities in finite modules) 26; (Complete tensor product of modules) 27.
- Salam, A. (Théories scalaires et pseudoscalaires) 196.
- — and J. C. Ward (Weak and electromagnetic interactions) 203.
- — s. P. T. Matthews 205.
- Salát, Tibor (Satz von Dini) 40; (Reihen mit positiven Gliedern) 40; (Absolut konvergente Reihen) 40.
- Saltz, Daniel (Inversion theorem for Laplace-Stieltjes transforms) 86.
- Salvemini, Tommaso (Distribution de l'étendue d'échantillons) 110.
- Samarskij, A. A. s. A. N. Tichonov 341, 342.
- Šamburov, V. A. (Synthese von Pantographen) 141.
- Samokiš, B. A. (Methode des steilsten Abstiegs) 340.
- Sams, Eldon W. (Performance of nuclear rocket) 145.
- Santos Guerreiro, J. (Multiplication des distributions) 92.
- Sargent, W. L. C. (Sequence spaces related to the l^p spaces) 37.
- Sargsjan, I. S. (Entwicklungen nach den Eigenfunktionen des Schrödingerschen Operators) 317.
- Sarkadi, Károly s. Ödön Éltető 369.
- Sasayama, Hiroyoshi (n -dimensional non-holonomic quasi euclidean spaces) 125.
- Šaškov (Shashkov), A. G. (Transient response in a DC circuit) 181.
- Satô, Masako s. Shin-ichi Izumi 282, 283.
- Sawada, Katurô (Ground-state energy of Bose-Einstein gas) 218.
- M. and C. H. Shaw (Transmission factor in X-ray scattering) 232.
- Sawicki, J. (Target exchange corrections in Watson's theory) 219.
- Saxena, Bhagwat Swarup (Symbolic matrix integration) 241.
- Saxon, D. S. and L. I. Schiff (High-energy potential scattering) 192.
- Say, M. G. (consulting editor), A. C. D. Haley and W. E. Scott (advisory editors) (Analogue and digital computers) 104.
- Schaefer, H. H. (Non-linear positive operators) 99; (Fredholm alternative) 328.
- John W. and Salamon Eskinazi (Vortex street generated in a viscous fluid) 415.
- Schafer, R. D. (Cubic forms permitting composition) 252.
- Schäffer, J. J. (Wissenschaftliche Persönlichkeit des Archimedes) 5.
- Schatten, Robert (Norm ideals of operators) 94.
- Schechter, Martin (Free boundary problem for pseudo-analytic functions) 294.
- Schenkman, Eugene (Equation $a^n b^n = c^n$ in a free group) 245.
- Schermerhorn, W. (Aerotriangulation) 134.
- Schiff, L. I. (Motion of a gyroscope) 187.
- — — s. D. S. Saxon 192.
- Schmidt, Rainer (Festigkeitsberechnungen von Radialverdichteraufrädern) 395.
- Schmutzer, Ernst (Projektive Relativitätstheorie. II.) 187.
- Schoenberg, I. J. (Maxima of Hankel determinants) 44.
- Schrieffer, J. R. s. J. Bardeen 454.
- Schröder, Johann (Fixpunktsätze bei numerischer Behandlung nichtlinearer Gleichungen) 101.
- K. (Riemanns Habilitationsvortrag) 382.
- Schucker, R. E. (Use of triads for paired comparisons) 368.
- Schuster, Seymour (Pencils of null polarities) 122.
- Schütte, Kurt (Aussagenlogische Grundeigenschaften formaler Systeme) 9.
- Schützenberger, Marcel Paul (Équation $a^{2+n} = b^{2+m} c^{2+p}$ dans un groupe libre) 244.
- Schwarz, Eleonore (Nogramm) 103.
- Štefan (Algebraische Zahlen) 255.
- Schwinger, Julian (Unitary operator bases) 190.
- Scott, W. E. s. M. G. Say 104.
- Scotti, A. s. G. M. Prosperi 209.
- Sefton, P. and R. Vaillancourt (Coding differential equations) 347.
- Segal, I.-E. (Observables en théorie quantique des champs) 195.

- Segre, Beniamino (Teoria delle corrispondenze) 374.
- Seide, Paul (Donnell type theory for bending and buckling of shells) 158.
- Seki, Takejiro (Brouwer's fixed point theorem) 131.
- Semadeni, Z. s. A. Alexiewicz 325.
- Sen, H. K. s. O. W. Greenberg 214.
- Senitzky, I. R. (Dissipation in quantum mechanics) 191.
- Seregín, L. V. (Stationäre Maße im Folgenraum) 327.
- Šerman, D. I. (Torsion eines elliptischen Balkens) 398.
- Sessler, A. M. s. V. J. Emery 220.
- Šestopal, G. A. s. A. A. Ljapunov 106.
- Seth, B. R. (Finite deformation) 162.
- Ševčenko (Shevchenko), K. N. (Elastic-plastic deformation of a plane) 400.
- Severi, Francesco (Caratterizzazione topologica delle superficie algebriche) 377.
- Severo, Norman C. s. Marvin Zelen 115.
- Shapiro, Victor L. (Intrinsic operators in three-space) 35.
- Sharma, A. (Theorem of Cinquini) 287.
- S. K. (Rotation of a plane lamina in a visco-elastic liquid) 403.
- Shaw, C. H. s. M. Sawada 232.
- Sheer jr., R. E. s. H. T. Nagamatsu 414.
- Shen, Chi-neng (Stability of forced oscillations) 305.
- Shepperd, J. A. H. (Betweenness groups) 244.
- Shimazu, Haruo (Non-local boundary condition in quantum field theory) 193.
- Shimogaki, Tetsuya (Norms by modulars) 324; (Norms by uniformly finite modulars) 324; (Orlicz-Birnbaum-Amemiya's theorem) 325.
- Shimura, Goro (Intégrales attachées aux formes automorphes) 55.
- Shubik, Martin (Bibliography on simulation) 371.
- Šidlovskaja, N. A. (Anwendung der Differentiation nach einem Parameter auf die Lösung nicht-linearer Gleichungen) 101.
- Šidlovskij, A. B. (Transzendenz und algebraische Unabhängigkeit der Werte gewisser Funktionen) 262.
- Sierro, Jérôme et Roger Lacroix (Résonance paramagnétique dans des fluorures de l'ion Gd^{3+}) 234.
- Siestrunk, Raymond s. Jean Fabri 429.
- Siewierski, Lucjan (Variation locale des fonctions univalentes) 291; (Fonctions univalentes) 291; (Fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes) 292.
- Šilov, G. E. (Lokale Eigenschaften partieller Differentialgleichungen) 312.
- Silva, C. Nevin De s. Nevin De Silva, C. 155.
- Silverman, Edward (Extensions of Lebesgue area) 35.
- R. A. s. I. Kay 182.
- Silvey, S. D. (Lagrangian multiplier test) 363.
- Simon, Arthur B. s. C. Ionescu Tulcea 331.
- Simonenko, I. B. (Riemann's boundary value problem) 293.
- Simons, S. and P. J. Higgins (Boltzmann's H -theorem) 209.
- Singer, S. F. s. R. C. Wentworth 182.
- Singh, H. D. (Covariant differentiation process) 378.
- S. K. (Applications des ordres approchés) 287.
- Siraždinov, S. Ch. (Lokaler Grenzwertsatz für eine Markovsche Kette) 354.
- — — und A. M. Kagan (Bedingung von H. Cramér) 356.
- Širkov (Shirkov), D. V. (Compensation equation in superconductivity theory) 220.
- — — s. N. N. Bogoljubov 454.
- — — s. M. É. Majer 200.
- Šisler, Miroslav (Iterationsverfahren für Systeme nicht-linearer Gleichungen) 340.
- Šišmarev, I. A. s. V. A. Il'in 314.
- Sitnikov, K. A. (Combinatorial topology of nonclosed sets. I, II.) 129.
- Skeat, T. L. s. O. Neugebauer 5.
- Skibinsky, Morris (Bayes two-stage tests) 112.
- Skof, Fulvia (Opera scientifica di M. Pieri) 8.
- Skorochod (Skorohod), A. V. (Limit theorems for Markov processes) 355.
- Skowroński, J. and Š. Ziemba (Boundedness of the motion of mechanical systems) 135.
- Slepian, Paul s. Louis Weinberg 15.
- Slepička, František (Potentialströmung für Spalt-Schaukelgitter) 429.
- Šlionskij (Shlionsky), G. G. (Bounded schlicht functions) 49; (Extremalprobleme für differenzierbare Funktionale) 49.
- Slye, John Marshall (Collections whose sums are two-manifolds) 388.
- Smale, Stephen s. Morris W. Hirsch 392.
- Smiley, M. F. (Commutativity of rings) 26.
- Smirjagin, V. P. s. L. A. Zak 346.
- Smirnov, Ju. M. (Yu. M.) (Geometry of infinite uniform complexes) 129; (Satz von P. S. Aleksandrov) 388.
- S. V. (Nomographierbarkeit von Gleichungen) 103.
- Smith, Charles V. L. (Electronic digital computers) 346.
- W. R. (Mutual reflection of two shock waves) 412.
- Smithies, F. s. V. P. Potapov 54.
- Sneddon, I. N. and R. Hill (editors) (Progress in solid mechanics. 1.) 173.
- Sobolevskij, P. E. s. M. A. Krasnosel'skij 91.
- Sobolew, W. I. s. L. A. Ljusternik 323.
- Sokolov, A. A. (Theory of Dirac particles) 200.
- — —, I. I. Gusejnov (Gusejnov) and B. K. Kerimow (Scattering of Dirac particles) 192.
- Sokolow, A. und B. Kerimow (Dirac-Teilchen mit orientiertem Spin) 207.
- Solnceva, T. V. s. H. S. M. Coxeter 121.
- Solomjak (Solomiak), M. Z. (Application of semigroup theory) 99.
- Solov'ev, S. P., Ju. N. Venevcev und G. S. Ždanov (Innere Felder in Dipolstrukturen) 233.
- V. G. (Wave function of an n -particle system) 216.
- Sonnenschein, J. (Procédés de sommation issus de la transformation de Laplace) 278.

- Soroka, Walter J. s. Walter K. Karplus 346.
- Spampinato, Nicolò (Rappresentazione finita di elementi differenziali dell' S_r complesso) 377.
- Spanier, E. H. (Function spaces and duality) 129.
- Speranskij, N. V. s. S. A. Čerkudinov 141.
- Speranza, Francesco (Trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sé (I.—III.) 125.
- Squire, William (Blasius equation with three-point boundary conditions) 417.
- Šragin, I. V. (Schwache Stetigkeit des Nemyckischen Operators) 334.
- Sretenskij, L. N. (Handschriften A. M. Ljapunovs) 403.
- Srinivasacharyulu, Kilambi (Familles différentiables de G -structures) 386.
- Srinivasan, S. K. s. Alladi Ramakrishnan 206.
- Stahl, A. (Informationsbegriff in der statistischen Physik) 211.
- Stanišić, M. M. and R. M. McKinley (Thermal stresses in hollow cylinders) 399.
- Starikova, M. V. (Eigenschwingungen und Stabilität automatischer Systeme) 309.
- Stark, Valter J. E. (Subsonic problem of oscillating finite wing) 406.
- Staś, W. (Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz) 260.
- Stavroulakis, Nicias (Points de rebroussement des surfaces) 378.
- Stearns, Richard (Voting problem) 251.
- Steel, Robert G. D. (Multiple comparison sign test) 360.
- W. H. (Scalar diffraction in terms of coherence) 184.
- Steenrod, N. E. and Emery Thomas (Cohomology operations) 391.
- Stein, P. (Extreme values of a function of several variables) 275.
- R. P. (Heat-flow equation) 58.
- Sherman K. s. Curtis M. Fulton 127.
- Stepanov, B. M. s. A. A. Logunov 205.
- Sternberg, Joseph (Triple-shock-wave intersections) 411.
- Stetter, Hans J. (Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung) 409.
- Stewartson, K. (Motion of a non-conducting body through a conducting fluid) 425.
- Stodółkiewicz, J. S. s. A. G. Pacholczyk 238, 452.
- Stoker, J. J. s. A. S. Peters 433.
- Stolz, Hubertus (Sekundärelektronenemission von Metallen) 222.
- Stone, A. H. (Metrisability of unions of spaces) 387.
- Stong, Robert E. (Hypersurfaces) 123.
- Streitwolf, H. W. (Sekundärelektronenemission von Metallen) 222.
- Strodt, Walter (Euler-Maclaurin and Boole summation formulas) 280.
- Strunkin, V. A. (Axiale Schwingungen der Scheiben von Axialturbinen) 169.
- Struve, Otto, Beverly Lynds and Helen Pillans (Elementary astronomy) 234.
- Stuart, Alan (Equally correlated variates and the multinormal integral) 115; (Records test for trend in normal regression) 359.
- Su Buchin (Affine connections in an areal space) 126.
- Subrahmanyam, N. V. (Lattice theory for rings) 252.
- Succi, Francesco (Funzioni aritmetiche completamente moltiplicative) 260.
- Sudan, Gabriel (Geometrische Theorie der Kettenbrüche) 263.
- Sugie, Atsushi (Imaginary part of the optical potential) 219.
- Sugunamma, M. (Results concerning $\sigma_k(n)$ and $\varphi_k(n)$) 259.
- Sumitomo, Takeshi (Projective and conformal transformations in compact Riemannian manifolds) 383.
- Sundaresan, K. (Strictly convex spaces) 326.
- Suprunenko, D. A. (Lokal nilpotente Gruppen) 20.
- Suvorov, G. D. (Boundary correspondence in topological mapping) 294.
- Suzuki, Michio s. Richard Brauer 19.
- Švec, Alois (Congruences de droites) 381; (Enveloppes des familles ∞^3) 382; (Déformations des congruences de droites) 382.
- Swan, Richard (Projective modules over finite groups) 19.
- Symonds, P. S. and T. J. Mentel (Impulsive loading of plastic beams) 166.
- Synge, J. L. (Relativity) 185; (Identities connected with the Einstein tensor) 442.
- Szabó, István (Höhere Technische Mechanik) 141.
- Szarski, J. (Problèmes de Fourier) 313.
- et T. Ważewski (Conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux différentielles totales) 309.
- Szegő, G. (Fourier coefficients of a nonnegative function) 281.
- Szép, J. (Allgemeine Erweiterung von Gruppen. II.) 246.
- Szeptycki, P. (First boundary problem for a quasilinear elliptic system) 79.
- Szestopal, G. A. s. A. A. Lapunov 106.
- Szulkin, P. (Deux dipôles arbitraires couplés) 441.
- and B. Kacprzyński (Comparative analysis of approximate methods in vibration theory) 144.
- Szűsz, P. (Umordnung bedingt konvergenter Reihen) 39.
- Taam, C. T. (Compact linear transformations) 90.
- Tâche, J. (Vitesse critique d'un arbre) 169.
- Tachibana, Shun-ichi (Almost-analytic vectors in almost-Kählerian manifolds) 386.
- Tafeln der Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichten von Student. 367.
- Takács, Lajos (Renewal theory) 110.
- Takahashi, Y. s. E. Arnous 447.
- Takeuti, Yoshihisa (Electronic structure of exciton) 224.
- Takizawa, Seizi (Induced connexions) 387.
- Talaljan, A. A. (Konvergenz dem Maßenach) 42; (Konvergenz fast überall von Teilfolgen der Partialsummen allgemeiner Orthogonalreihen) 280.
- Tallini, Giuseppe (Caratterizzazione di superficie cubiche. I, II.) 376.
- Talypov, G. B. (Deformationen und Spannungen in Punkten eines Blechs) 166.
- Tamagawa, Tsuneo (Hilbert's modular group) 55.

- Tanaka, Tadashi (Correction) 389.
- Tandori, Károly (Divergenz der trigonometrischen Reihen) 282.
- Tanner, J. C. (Model for delays in overtaking on a two-lane road) 354.
- Taniyama, Yutaka (Distribution of positive 0-cycles) 257.
- Tarasov, Ju. A. (Yu. A.) (Plane Poiseuille flow of a plasma) 214.
- Tarkowski, S. (Comparability of dendrites) 33.
- Tasman, H. A. s. A. J. H. Boerboom 185.
- Tavcholidze, A. N. s. A. A. Logunov 205.
- Taylor, J. G. and A. E. A. Warburton (Singularities of partial-wave amplitudes) 201.
- — — s. H. J. Bremermann 196.
- S. J. s. C. A. Rogers 266.
- Tedeschi, Bruno (Investimento „ottimo“) 369.
- Teicher, Henry (Positive type polynomials) 16.
- Teleman, C. (Variétés de Grassmann) 126.
- Teleman, Silviu (Formule d'Euler-Poincaré-Hopf) 131.
- Tellep, D. M. (Effect of vehicle deceleration on a melting surface) 418.
- Temperley, H. N. V. (Statistical mechanics of non-crossing chains. I.) 228; (Gas of elastic spheres) 229.
- Tenca, Luigi (Teoremi sui determinanti) 241.
- Ter-Krikorov, A. M. s. Ju. P. Ivanilov 293.
- Tewordt, L. s. J. Bardeen 454.
- Thébault, V. (Cône associé à un tétraèdre) 373.
- Thinius, E. (Ortskurvenlehre) 181.
- Thirring, W. (Dispersion relations) 197; (Symmetry properties of elementary particles) 450.
- Thomas, Emery s. N. E. Steenrod 391.
- T. S. E. (Screening effect of a circular disk) 441.
- Thomsen, E. G. (Construction of Hencky-Prandtl nets) 148.
- Thorndike, Lynn (Mathematics and astronomy in the 13th and 14th centuries) 6.
- Thorp, Edward O. (Linear operators) 90.
- Thyssen, M. (Fonction de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet ou de Neumann) 316.
- Tichonov, V. M. s. A. N. Kolmogorov 335.
- Tichonov (Tikhonov), A. N. and A. A. Samarskij (Samarsky) (Homogeneous difference schemes) 341; (Best homogeneous difference scheme) 342; (Convergence of difference schemes) 342.
- Tidman, D. A. (Radio emission by plasma oscillations) 228.
- Tillieu, Jacques s. Jean Baudet 192.
- Ting, Lu (Diffraction of an arbitrary pulse by a wedge) 441.
- Tjablikov, S. V. s. V. V. Tolmačev 455.
- Tjurin, G. I. s. G. P. Krejcer 373.
- Todd, John s. Erwin Kreyszig 50.
- Todorov, I. T. and D. Zidarov (Form of an attracting body) 316.
- M. M. (Ebenes Problem der Elastizitätstheorie) 159.
- Tolmačev, (Tolmachev) V. V. and S. V. Tjablikov (Tjablikov) (Superconductivity. II.) 455.
- — — s. N. N. Bogoljubov 454.
- Tominaga, Hisao s. Takasi Nagahara 25.
- Tondl, Aleš (Zones labiles dans les systèmes quasi-harmoniques) 303.
- Tong, Kin N. (Mechanical vibration) 142.
- Toptygin, I. N. (Multiple scattering of polarized electrons) 211.
- Toraldo di Francia, G. (Babinet's principle for diffraction) 183.
- Törnig, W. (Numerische Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen. I, II.) 343.
- Toscano, Letterio (Soluzioni intere dell'equazione $4x^3 = 27y^2 + N$) 259; (Triangoli con particolare angolo di Brocard) 373.
- Touchard, Jacques (Séries de Lambert et de Dirichlet) 285.
- Touschek, B. s. W. Pauli 197.
- Treiman, S. B. s. P. Federbush 449.
- Trève, Y. M. s. O. W. Greenberg 214.
- Tsuchikura, Tamotsu (Absolute summability of Rademacher series) 42.
- Tsurumi, Shigeru (Ergodic theorems. II.) 98.
- Tukey, John W. (Variances of variance components. I—III.) 359.
- Tulcea, C. Ionescu s. Ionescu Tulcea, C. 331.
- Tulub, A. V. (Relativistic correction to Maxwell distribution) 209.
- Tumarkin, G. C. and S. Ja. Chavinson (Analytische Funktionen) 50.
- Tupiecy (Tupitsyn), A. I. (Optimum parameters of an automatic control system) 70.
- Tupper, B. O. J. s. C. W. Kilminster 186.
- Turán, Paul (Theory of quasi-analytic function-classes) 274.
- — — s. L. Rédei 258.
- Turner, L. H. (Cesari's surface integral) 35.
- Turowicz, A. B. (Racines de nombres positifs) 101; (Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse) 274.
- Tutte, W. T. (Non-Hamiltonian graph) 133.
- Uematu, Tosio (Traffic control at an intersection) 352.
- Uhlhorn, U. (Non-equilibrium phenomena) 207; (Linear theory of irreversible processes. I, II.) 208; (Onsager's reciprocal relations) 208; (Macroscopic observables) 208; (Non-equilibrium thermodynamics) 208.
- Ul'janov (Uljanov), P. L. (A-integrals of Cauchy for contours) 286.
- Ullman, Joseph L. (Faber polynomials) 47.
- Umezawa, Hiroomi s. Hiroshi Ezawa 450.
- Urban, A. (Zweite Krümmungsform einer Fläche) 123.
- Ursell, H. D. (Inequalities between sums of powers) 15.
- Uspenskij, V. A. s. A. N. Kolmogorov 11.
- Uzawa, Hirofumi s. Hukukane Nikaidô 370.

- Vaillancourt, R. s. P. Sefton 347.
- Väisälä, Jussi s. Olli Lehto 51.
- Vajda, S. (Linear programming and theory of games) 118.
- Stefan (Linearplanung und Theorie der Spiele) 118.
- Vajnberg, M. M. (Positive Lösungen gewisser nicht-linearer Integralgleichungen) 321.
- Vaks, V. G. (Theories with an indefinite metric) 199.
- Valatin, J. G. (Divergences dans la théorie quantique des champs) 196.
- Vandiver, H. S. (Abstract algebra for obtaining results involving rational integers) 12; (Distribution problems) 259.
- Vas, É. (Sequential probability ratio test) 112.
- Vasilach, Serge (Calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables) 323.
- Vasil'ev, V. A. (Erhebung des Grundwassers) 437.
- Vaughan, Herbert E. (Enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires) 3.
- Vedenov, A. A. and A. I. Larkin (Equation of state of a plasma) 225.
- Veidinger, L. (Best approximations in the Chebyshev sense) 337.
- Veklenko, B. A. (Resonance radiation diffusion equation) 452.
- Vekua, I. N. (Momentenfreiheit konvexer Schalen) 158; (Verallgemeinerte analytische Funktionen) 295.
- N. P. (Singuläre Integrodifferentialgleichungen) 85.
- Veldkamp, F. D. (Polar geometry. I—IV.) 119.
- Vénéroni, Marcel s. Robert Arvieu 219.
- Venevcev, Ju. N. s. S. P. Solo-
v'ev 233.
- Venini, Carlo (Massa di un corpuscolo elettrizzato) 190; (Moto di dipoli elettrici nell'ultima teoria unitaria einsteiniana) 444.
- Ventcel', E. S. (Theorie der Spiele) 118.
- Vermes, P. s. J. Clunie 277.
- Vernon, R. s. A. Baños jr. 214.
- Vernotte, Pierre (Sommatation pratique des séries divergentes) 39.
- Veyrunes, Jean (Décomposition d'un opérateur linéaire en produit) 302.
- Vidal Abascal, E. (Integral invariants) 310.
- Vietoris, L. (Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. II.) 43.
- Vinogradov, A. A. (Teilweise geordnete lokal nilpotente Gruppen) 18.
- Virsan, C. s. C. Anghel 303.
- Virtanen, K. I. s. Olli Lehto 51, 52.
- Vitale, B. s. D. Amati 448.
- Vitásek, E. s. I. Babuška 232.
- Emil (Quasistationäre Lösung der Wärmeleitungs-gleichung) 313.
- Vitner, Čestmír (Außergewöhnliche Punkte auf Kurven) 383.
- Vjatkín, G. P. (Bewegungsgesetz eines mechanischen Aggregats) 136.
- Vladimirescu (Vladimiresku), I. (Hochwasserdurchflüsse an kleinen Wasserbecken) 437.
- Vladimirov, V. S. (Integro-Differentialgleichung) 84.
- Vlasov, B. F. (Gleichungen der Plattenverbiegung) 158.
- V. Z. und N. N. Leont'ev (Balken, Platten und Schalen) 178.
- Vodička, Václav (Bending of circular plate) 159.
- Volkonskij (Volkonsky), V. A. (Limit theorem for Markov chains) 355.
- Volkov, D. V. (Quantization of half-integer spin fields) 199.
- T. F. (Plasma density distribution) 225; (Ion oscillations in a plasma) 227.
- Volosov, V. M. (Oscillation equations with slowly variable parameters) 62; (Asymptotic of the integrals of perturbed systems) 62; (Solutions in the neighborhood of periodical motions) 62.
- Vorel, Zdeněk s. Jaroslav Kurzweil 300.
- Vorob'ev, A. V. (Halbadditive Funktionen) 266.
- — — s. P. I. Romanovskij 265.
- Vostrecov, B. A. und A. V. Ignat'eva (Approximation analytischer Funktionen) 284.
- Vredenduin, P. G. J. (Pädagogische Studentage) 3.
- Vuylsteke, Arthur A. (Maser theory) 210.
- Wachsmuth, H. s. A. J. H. Boerboom 185.
- Wagner, H. s. G. Hettner 212.
- Wait, J. R. (Electromagnetic radiation from cylindrical structures) 440.
- Walker, A. G. (Axioms for cosmology) 188.
- Wallace, Andrew H. (Sheets of real analytic varieties) 377.
- Wallisch, W. s. E. Weinell 152.
- Wang, Hao (Eighty years of foundational studies) 8; (Ordinal numbers and predicative set theory) 9; (Universal Turing machines) 10.
- Warbanoff, Christo P. (Integration von Systemen simultaner Differentialgleichungen) 159.
- Warburton, A. E. A. s. J. G. Taylor 201.
- Ward, J. C. s. Abdus Salam 203.
- Watson, G. L. (Integral quadratic forms) 31.
- Watterson, G. A. (Linear estimation in censored samples) 114.
- Ważewski, T. s. J. Szarski 309.
- Webb, N. L. s. C. Mack 353.
- Weinberg, Louis and Paul Slepian (Positive real matrices) 15.
- S. s. G. Feinberg 207.
- Weinell, E. and W. Wallisch (Elastizitätsgesetz des verwundenen Stabes) 152.
- Weir, D. G. s. A. G. Mackie 411.
- Weiss, George H. s. R. Sherman Lehman 349.
- Lionel (Spacings generated by mixed samples) 356.
- Wensley, J. H. (Non-analytical iterative processes) 346.
- Wentworth, R. C. W. M. MacDonald and S. F. Singer (Lifetimes of trapped radiation belt particles) 182.
- Wentzel, Gregor (Phase transition of a superconductor) 220.
- Wesler, Oscar s. Herman Rubin 127.
- Wessel, Walter (Theorie des Elektrons. V.) 451.
- Weston, J. D. (Inequality for Fourier coefficients) 281.
- Westwick, Roy (Linear transformations of a Grassmann product space) 14.

- Whitham, G. B. s. H. B. Keller 433.
- Wiest, Roger J. M. De (Unsteady flow through an underdrained earth dam) 437.
- Wightman, A. S. (Problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste) 194.
- Wijsman, Robert A. (Representation of the Wishart matrix) 114.
- Wilde, Piotr (Structural analysis of bridge) 152.
- Wilks, S. S. (Two-stage scheme for sampling without replacement) 111.
- Williams (Vil'jams), J. (Dž.) D. (Complete strategyst) 118.
- Wilson, D. H. (Hydrodynamics) 402.
- Winogradski, Judith (Huit spineurs du second rang) 447.
- Winsten, C. B. (Geometric distributions in theory of queues) 352.
- Wolf, E. (Scalar representation of electromagnetic fields. II.) 215.
- Wolfowitz, J. s. J. Kiefer 114.
- Wong, E. T. and R. E. Johnson (Self-injective rings) 252.
- Woodward, David A. (Integral equation) 84.
- Woolley, Harold W. (Thermodynamic properties of gases at high temperature) 210.
- Working, Holbrook (Correlation of first differences of averages in a random chain) 371.
- Wrzecionko, J. s. A. Deloff 205.
- Wu, Guang-lei (n -manifolds in Euclidean $2n$ -space) 384.
- Wuest, Walter (Verdrängungskorrekturen für rechteckige Windkanäle) 418.
- Wul, E. B. (Functions represented by integrals) 43.
- Wyler, Oswald (Algebra of boundary-value problems) 59; (Operator solutions of boundary-value problems) 59; (Functions of Green for ordinary differential equations) 59.
- Wysiatycki, Kazimierz (Problem of infinite slice) 160.
- Yacoub, K. R. (Semispecial permutations) 248.
- Yakabe, Iwao (Arithmetic properties of Kummer's function) 262.
- Yamaguchi, Y. (Model of strong interactions) 203; (Theory of elementary particles) 203.
- Yang, Hsun-Tiao (Ikenberry-Truesdell equations) 397.
- Kwang-Tzu (Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow) 418.
- Yano, Kentaro (Théorème de M. Matsushima) 386.
- Yen, J. T. s. C. C. Chang 427.
- Yoler, Y. A. (Magneto-hydrodynamics) 424.
- Yosida, Kôzaku (Differential and integral equations) 84.
- Young, John Wesley s. Roger A. Johnson 373.
- L. C. s. W. H. Fleming 319.
- Yuan, Wang s. Loo-keng Hua 345.
- Zachariasen, F. s. M. Baker 448.
- Fredrik s. Geoffrey F. Chew 449.
- Zadojan, M. A. s. S. A. Ambarcumjan 400.
- Zaharescu, Anibal and Eudoxiu Procopovici (Ring detector used in amplifiers for tensor-metry) 107.
- Zahorski, S. s. W. Olszak 161.
- Zaikina, N. G. (Verteilung der n -ten Nichtreste) 255.
- Zak, L. A., T. I. Mil'čenko (Miltsenko) and V. P. Smirjagin (Parameters of the computer BESM-II.) 346.
- Zamansky, Marc (Intégrale de Daniell) 89.
- Zappa, G. (Teorema di Kochendörffer) 19.
- Zawadzki, Jerzy (Reduced pressure as a strength parameter) 166.
- Ždanov, G. S. s. S. P. Solov'ev 233.
- Zelen, Marvin and Norman C. Severo (Graphs for bivariate normal probabilities) 115.
- Želtov, Ju. P. (Bildung vertikaler Risse in einer Schicht) 438.
- Zemmer, J. L. (Boolean geometry for the integers) 265.
- Ziaud-Din, M. (Expression of k -statistic k_{11}) 112.
- Zickendraht, W. s. M. DeWit 230.
- Zidarov, D. s. I. T. Todorov 316.
- Ziemia, S. s. J. Skowroński 135.
- Stefan s. Janislaw Skowroński 135.
- Zierler, Neal (Theorem of Gleason and Marsh) 242.
- Žislin (Zhislin), G. M. (Spectrum of Schrödinger's operator) 82.
- Zitek, František (Theorem of Korolyuk) 349.
- Žitomirskij, Ja. I. (Cauchysches Problem für parabolische Systeme) 74.
- Zoutendijk, G. s. D. van Dantzig 109.
- Zubarev, D. N. und Ju. A. Cerkovnikov (Phasenübergang in Fermi-Systemen) 451.
- Zyryanov (Zyrianov), P. S. (Self-consistent field equations) 216.